

SEMINAIRE

**Equations aux  
Dérivées  
Partielles**

**2004-2005**

Mildred Hager

**Instabilité spectrale semiclassique d'opérateurs non-autoadjoints: un exemple**

*Séminaire É. D. P.* (2004-2005), Exposé n° VI, 12 p.

<[http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP\\_2004-2005\\_\\_\\_\\_A6\\_0](http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2004-2005____A6_0)>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.  
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

---

# INSTABILITÉ SPECTRALE SEMICLASSIQUE D'OPÉRATEURS NON-AUTOADJOINTS: UN EXEMPLE

*par*

Mildred Hager

---

## 1. Introduction

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur densément défini et fermé. Soit  $\rho(A)$  son ensemble résolvant. Alors, si  $A$  est autoadjoint, nous avons l'estimation de la norme de la résolvante suivante :

$$(1.1) \quad \|(z - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\text{dist}(z, \text{Spec}(A))}, \quad z \in \rho(A) .$$

Cette estimation n'est plus valable en général pour des opérateurs non-autoadjoints. Pour étudier la taille de la norme de la résolvante, nous introduisons le  $\delta$ -Pseudospectre

$$(1.2) \quad \Sigma_\delta(A) := \text{Spec}(A) \cup \left\{ z \in \rho(A); \|(z - A)^{-1}\| > \frac{1}{\delta} \right\} .$$

Cet ensemble est lié à une forme d'instabilité spectrale. En fait, le théorème de Roch-Silbermann (voir par exemple [2]) affirme que

$$(1.3) \quad \Sigma_\delta(A) = \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ \|B\| < \delta}} \text{Spec}(A + B) .$$

Des perturbations très petites peuvent donc bouger beaucoup le spectre, et il s'agira ici de mieux comprendre ce phénomène.

**1.1. Le cadre semiclassique.** — Soit  $P = p^w(x, hD)$  le quantifié de Weyl d'un symbole  $p \in C_b^\infty(\mathbb{R}^2)$ , indépendant de  $h$ . Nous introduisons

$$(1.4) \quad \Sigma(p) := \overline{p(\mathbb{R}^2)}$$

ainsi que

$$(1.5) \quad \Lambda(p) := p(\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2; \{p, \bar{p}\}(x, \xi) \neq 0\}) .$$

En '99, Davies [1] montre pour certains opérateurs de Schrödinger  $p = \xi^2 + V(x)$  que pour tout  $z = \eta^2 + V(a)$  avec  $\{p, \bar{p}\}(\eta, a) \neq 0$  (donc  $z \in \Lambda(p)$ ) il existe un quasimode de  $P - z$ , c'est à dire

$$(1.6) \quad \exists 0 \neq u_h \in L^2 \text{ t. q. } \|(P - z)u_h\| = O(h^\infty)\|u_h\| .$$

Ceci implique que la norme de la résolvante sera plus grande que  $C_N h^{-N}$ ,  $C_N > 0, \forall N \in \mathbb{N}$  pour ces valeurs de  $z$  (« pseudospectre semiclassique »). En 2001, Zworski [6] met en évidence le lien de ce résultat avec une condition de commutateur de Hörmander, ce qui permet à Dencker, Sjöstrand et Zworski [3] de généraliser la construction. En fait, pour que dans le cas général il existe un quasimode il s'agit non seulement de garantir que  $\frac{1}{i}\{p, \bar{p}\} \neq 0$ , mais il faut aussi que cette quantité soit positive. Ils montrent aussi que sous certaines conditions d'une part  $\overline{\Lambda(p)} = \Sigma(p)$ , et d'autre part que pour tout  $z$  de la forme  $p(x, \xi)$  avec  $\{p, \bar{p}\}(x, \xi) \neq 0$  il existe  $(y, \eta) \in p^{-1}(z)$  tel que  $\frac{1}{i}\{p, \bar{p}\}(y, \eta) > 0$ .

**1.2. Le bloc de Jordan.** — Avant d'énoncer les résultats que nous avons obtenus pour un opérateur-exemple, nous pouvons illustrer les notions intervenant plus loin dans le cas du bloc de Jordan, qui a certaines propriétés formellement similaires à l'opérateur traité. Cet exemple a été notamment étudié par Davies [2] ainsi que Sjöstrand et Zworski [5], ce que nous allons reprendre ici. Considérons

$$(1.7) \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}) .$$

Nous avons  $\text{Spec}(J) = \{0\}$ , et pour  $|\lambda| > 1$

$$(1.8) \quad \|(J - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - 1} ,$$

donc nous allons nous intéresser aux valeurs spectrales dans le disque unité.

*1.2.1. Quasimodes.* — Nous commençons par la construction de quasimodes. Remarquons que  $([J, J^*])_{ij} = \delta_{i1}\delta_{j1} - \delta_{in}\delta_{jn}$ , donc par analogie formelle on peut penser qu'il existera un quasimode concentré près de la première composante, alors qu'il existera un quasimode pour l'adjoint concentré près de la dernière composante. En effet, nous avons

$$(1.9) \quad e_+(\lambda) = (1, \dots, \lambda^{n-1}) \text{ avec } (J - \lambda)e_+(\lambda)^t = O(|\lambda|^n)$$

et  $e_+(0) \in \ker(J)$ , ainsi que

$$(1.10) \quad e_-(\lambda) = (\lambda^{n-1}, \dots, 1) \text{ avec } (J - \lambda)^*e_-(\bar{\lambda})^t = O(|\lambda|^n)$$

et  $e_-(0) \in \ker(J^*) = \text{coker}(J)$ .

*1.2.2. Problème de Grushin.* — Pour stabiliser le problème, nous considérons un opérateur auxiliaire

$$(1.11) \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} J - \lambda & e_-(0)^t \\ e_+(0) & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}.$$

Cet opérateur est inversible, d'inverse

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & e_+(\lambda)^t \\ e_-(\lambda) & E_{-+} \end{pmatrix}$$

avec  $E_{-+} = \lambda^n$ . Le résultat suivant est classique.

**Proposition 1.** — Soient  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  des espaces de Hilbert, et soient  $\mathcal{P} : \mathcal{H}_1 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}_2 \times \mathbb{C}$ ,  $(\mathcal{P})_{11} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  des opérateurs bornés. Supposons de plus que  $\mathcal{P}$  admet un inverse borné

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix}.$$

Alors  $(\mathcal{P})_{11}$  admet une inverse ssi  $E_{-+} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est inversible.

Le spectre de  $J$  est donc l'ensemble des zéros de  $E_{-+}$ , et nous avons réduit le problème spectral à l'analyse des zéros d'une fonction  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

*1.2.3. Perturbation.* — Soit  $Q \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $\|Q\| \leq 1$ . Considérons alors le problème de Grushin pour  $J + \delta Q$ . Pour  $\delta$  assez petit,  $\mathcal{J}^\delta$  (que l'on obtient en remplaçant  $J$  par  $J + \delta Q$  dans (1.11)) est inversible d'inverse  $\mathcal{E}^\delta$ , et nous obtenons un développement perturbatif pour  $E_{-+}^\delta$  :

$$(1.12) \quad E_{-+}^\delta = \lambda^n + \delta \langle Qe_+(\lambda)^t, e_-(\bar{\lambda})^t \rangle + O(\delta^2).$$

Pour une perturbation  $(Q)_{ij} = \delta_{in}\delta_{j1}$  nous voyons que le terme en  $O(\delta^2)$  s'annule, et  $\langle Qe_+(\lambda)^t, e_-(\bar{\lambda})^t \rangle = 1$ , donc  $\text{Spec}(J + \delta Q) \subset \{|\lambda| = \delta^{\frac{1}{n}}\}$ . Pour  $n$  grand, les valeurs propres sont donc très proches du bord du disque unité.

C'est cette idée « d'interaction » entre les quasimodes qui a motivé le choix des perturbations que nous avons considérées pour un opérateur-exemple, afin de voir si l'on obtenait le même phénomène de migration des valeurs propres vers le bord du pseudospectre.

## 2. L'opérateur modèle

Considérons l'opérateur non-formellement-autoadjoint dans  $L^2(S^1)$

$$(2.1) \quad P = hD_x + g(x), \quad h \in (0, 1], \quad D_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x},$$

muni du domaine

$$(2.2) \quad H_{sc}^1(S^1) := \{u \in L^2(S^1); \|u\|_{H_{sc}^1} := \|u\| + \|hD_x u\| < \infty\}.$$

Nous supposons :

**Hypothèse 1.** —  $g(x)$  est un potentiel analytique (à valeurs dans  $\mathbb{C}$ ) tel que

$$(2.3) \quad \text{Im } g' \neq 0,$$

sauf en deux points critiques  $a, b \in S^1$ , avec

$$(2.4) \quad \text{Im } g(a) \leq \text{Im } g(x) \leq \text{Im } g(b), \quad \forall x \in S^1.$$

Nous introduisons le symbole semiclassique

$$(2.5) \quad p(x, \xi) = \xi + g(x), \quad (x, \xi) \in T^*(S^1).$$

Alors nous avons

$$(2.6) \quad \Sigma = \{\text{Im } g(a) \leq \text{Im } z \leq \text{Im } g(b)\},$$

et le spectre se situe à l'intérieur de  $\Sigma$  (ce que nous allons montrer dans le paragraphe suivant).

Pour  $z \in \overset{\circ}{\Sigma}$ , nous introduisons les points  $\rho_{\pm}(z) = (x_{\pm}, \xi_{\pm}) \in T^*(S^1)$  donnés par

$$(2.7) \quad \rho_{\pm}(z) \in p^{-1}(z); \quad \pm \frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}(\rho_{\pm}) = \mp \text{Im } g'(x_{\pm}) > 0.$$

Nous voyons que l'hypothèse 1, qui est l'équivalent de la condition sur le crochet de Poisson mentionnée dans l'introduction, implique que  $\overline{\Lambda} = \Sigma$ .

Pour  $\Gamma \subset \overset{\circ}{\Sigma}$  un ensemble nous définissons

$$(2.8) \quad \Gamma_{-+}(\Gamma) := \{(\rho_-(z), \rho_+(z)); z \in \Gamma\}$$

qui est homéomorphe à  $\Gamma$ .

Si  $\Gamma$  est un ouvert, alors  $\Gamma_{-+}(\Gamma)$  est une sous-variété symplectique de  $T^*(S^1) \times T^*(S^1)$  pour la forme symplectique  $d\xi \wedge dx - d\eta \wedge dy$ , et nous notons  $|\Gamma_{-+}|$  le volume symplectique correspondant.

**2.1. Théorèmes.** — Comme nous verrons plus loin, la norme de la résolvante sera exponentiellement grande en  $h$  dans  $\overset{\circ}{\Sigma}$ . Pour étudier les phénomènes pseudospectraux, il s'agit donc d'examiner le comportement de l'opérateur perturbé par une perturbation exponentiellement petite en  $h$ . De plus, nous allons nous limiter à l'étude de perturbations admettant un noyau oscillatoire.

Nous introduisons la projection

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \Pi_{(x,y)} : T^*(S^1) \times T^*(S^1) &\rightarrow S^1 \times S^1, \\ (x, \xi, y, \eta) &\rightarrow (x, y). \end{aligned}$$

**Théorème 2.** — Soit  $\gamma \subset \Sigma$  une courbe de la forme

$$(2.10) \quad \operatorname{Re} z = f(\operatorname{Im} z), \operatorname{Im} z \in [a', b'], \operatorname{Im} g(a) < a' < b' < \operatorname{Im} g(b)$$

où  $f$  est analytique.

Alors il existe un voisinage  $U \subset S^1 \times S^1$  de  $\tilde{\gamma} = \Pi_{(x,y)}(\Gamma_{-+}(\gamma))$ ,  $\epsilon_0 > 0$ ,  $C_0 > 0$ , une fonction  $\varphi$  analytique dans  $U$  (et indépendante de  $z$ ) avec  $\operatorname{Im} \varphi \geq 0$ , et  $\chi \in C_c^\infty(U)$  (indépendant de  $z$ ),  $\chi = 1$  près de  $\tilde{\gamma}$  tels que :

Si  $Q : L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$  a le noyau intégral

$$(2.11) \quad k(x, y) = \chi(x, y) e^{\frac{i}{h} \varphi(x, y)},$$

et si  $\delta = e^{-\frac{\epsilon}{h}}$ , pour  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ , alors pour  $h$  assez petit en fonction de  $\epsilon$  on a :

$$(2.12) \quad \operatorname{Spec}(P + \delta Q) \cap V_\epsilon = \emptyset,$$

où  $V_\epsilon = \{z \in \Sigma; \operatorname{dist}(z, \gamma) \leq \frac{\sqrt{\epsilon}}{C_0}\}$ .

Nous avons donc réussi à trouver une perturbation qui « chasse le spectre » d'un voisinage d'une courbe à l'intérieur du pseudospectre. Cependant, comme nous le verrons, il ne sera pas possible de faire la même construction pour tout un domaine à l'intérieur du pseudospectre.

Pour étudier le spectre de l'opérateur perturbé dans un domaine, nous considérons une perturbation  $\delta Q$ , où pour  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0 \ll 1$ ,  $\delta = e^{-\frac{\epsilon}{h}}$ ,  $Q = Q(\epsilon)$  est la somme de plusieurs termes oscillants :

**Hypothèse 2.** — Soit

$$(2.13) \quad Q := \sum_{j=1}^N Q_j : L^2(S^1) \rightarrow L^2(S^1)$$

avec

$$(2.14) \quad k_{Q_j}(x, y) = \alpha \chi(x - x_j) \chi(y - y_j) e^{\frac{i}{h} \varphi_j(x, y)}$$

le noyau intégral de  $Q_j$ , où  $\chi \in C_c^\infty((-\pi, \pi))$ ,  $\chi = 1$  sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , est indépendant de  $h$ . La phase est de la forme

$$(2.15) \quad \varphi_j(x, y) = \xi_j(x - x_j) + \frac{i}{2}(x - x_j)^2 - \eta_j(y - y_j) + \frac{i}{2}(y - y_j)^2,$$

avec  $(x_j, \xi_j) \neq (x_k, \xi_k)$ ,  $(y_j, \eta_j) \neq (y_k, \eta_k)$ ,  $\forall j \neq k$ , et  $\alpha$  est tel que  $\|Q_j\| = 1$  (donc  $\alpha \sim (\pi h)^{-\frac{1}{2}}$ ). Ici  $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ,  $(x_j, \xi_j), (y_j, \eta_j) \in \mathbb{R}^2$  dépendent de  $\epsilon$  mais pas de  $h$ , alors que  $\chi, \alpha$  ne dépendent pas de  $\epsilon$ .

**Hypothèse 3.** — Soit  $\Gamma \subset\subset \overset{\circ}{\Sigma}$  un ouvert simplement connexe de bord  $\gamma = \partial\Gamma \in C^\infty$ . Nous supposons alors que pour  $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ ,

$$(2.16) \quad \Gamma_{-+}(\gamma) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq N(\epsilon)} B\left(\left((x_j, \xi_j), (y_j, \eta_j)\right), \frac{\sqrt{\epsilon}}{C}\right),$$

où  $C$  devra être choisi assez grand. De manière générale  $B(x_0, r)$  désigne la boule ouverte de centre  $x_0$  et de rayon  $r$ .

Finalement nous supposons pour chaque  $\epsilon > 0$  une hypothèse 4 remplie de manière générique que nous allons énoncer plus loin.

**Théorème 3.** — Nous supposons que  $P$  remplit l'hypothèse 1, que la perturbation  $Q$  remplit les hypothèses 2, 3 et 4 et que  $\delta = e^{-\frac{\epsilon}{h}}$  avec  $\epsilon > 0$

assez petit indépendant de  $h$ . Alors le nombre de valeurs propres de  $P + \delta Q$  dans  $\Gamma$  vérifie

$$(2.17) \quad \#(\text{Spec}(P + \delta Q) \cap \Gamma) = \frac{1}{2\pi h} |\Gamma_{-+}(\Gamma)| + O\left(\frac{\sqrt{\epsilon}}{h}\right)$$

pour  $h$  assez petit en fonction de  $\epsilon$ . Ici  $|\Gamma_{-+}(\Gamma)|$  désigne le volume symplectique de  $\Gamma_{-+}(\Gamma)$  pour la forme  $d\xi \wedge dx - d\eta \wedge dy$ .

Afin d'illustrer la distribution des valeurs propres obtenue dans ce théorème, nous avons calculé numériquement le spectre d'un discrétisé de  $hD_x + e^{ix} + \delta Q$  (en décomposant le problème en séries de Fourier et en tronquant), où  $Q$  remplit les hypothèses du théorème 3 pour des domaines contenus dans  $(-1, 1) \times (-i, i)$  : la figure 1 montre les valeurs propres du discrétisé calculées par matlab.

Pour comparer ce résultat avec le théorème 3, nous avons tracé dans la figure 2 l'enveloppe de taille  $\frac{\sqrt{\epsilon}}{2\pi h}$  autour de  $\frac{1}{2\pi h} |\Gamma_{-+}(\Gamma)|$  pour des domaines  $\Gamma$  rectangulaires centrés en 0 de largeur 1 et de hauteur variable ( $|\Gamma_{-+}(\Gamma)|$  se calcule alors de manière explicite), et indiqué le nombre de valeurs propres observé dans ces domaines de hauteur  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{2}$  ; nous obtenons une bonne coïncidence.

**2.2. Idées des preuves.** — Pour la preuve des théorèmes, nous renvoyons à [4], et indiquons ici uniquement quelques idées.

Nous allons restreindre la variable spectrale  $z$  à un domaine simplement connexe  $\Omega \subset\subset \overset{\circ}{\Sigma}$  (donc avec  $\text{dist}(\Omega, \partial\Sigma) > 0$  afin de séparer les points  $x_{\pm}$  dans l'espace).

*2.2.1. Quasimodes.* — Nous commençons de nouveau avec la construction de quasimodes.

Soient  $J_{\pm}$  des intervalles ouverts disjoints tels que  $\overline{\{x_{\pm}(z); z \in \Omega\}} \subset J_{\pm}$ . Soient  $I_{\pm} = S^1 \setminus \overline{J_{\mp}}$ , et soient  $\chi_{\pm} \in C_c^{\infty}(I_{\pm})$  à supports disjoints tels que  $\chi_{\pm} = 1$  sur  $\overline{J_{\pm}}$ .

**Lemme 4.** — Il existe  $e_{+} = c_{+}(z; h)e^{\frac{i}{h}\varphi_{+}(x, z)} \in H_{sc}^1(I_{+})$ ,  $\|e_{+}\|_{L^2(I_{+})} = 1$ , tel que  $(P - z)e_{+} = 0$  sur  $I_{+}$ . Nous avons  $\text{Im}\varphi_{+}(x) \sim (x - x_{+})^2$ .

En appliquant  $(P - z)$  à  $e_{+}$ , nous voyons que la phase doit remplir l'équation eikonale

$$(2.18) \quad \varphi'_{+}(x) + g(x) = p(x, \varphi'_{+}(x)) = z.$$

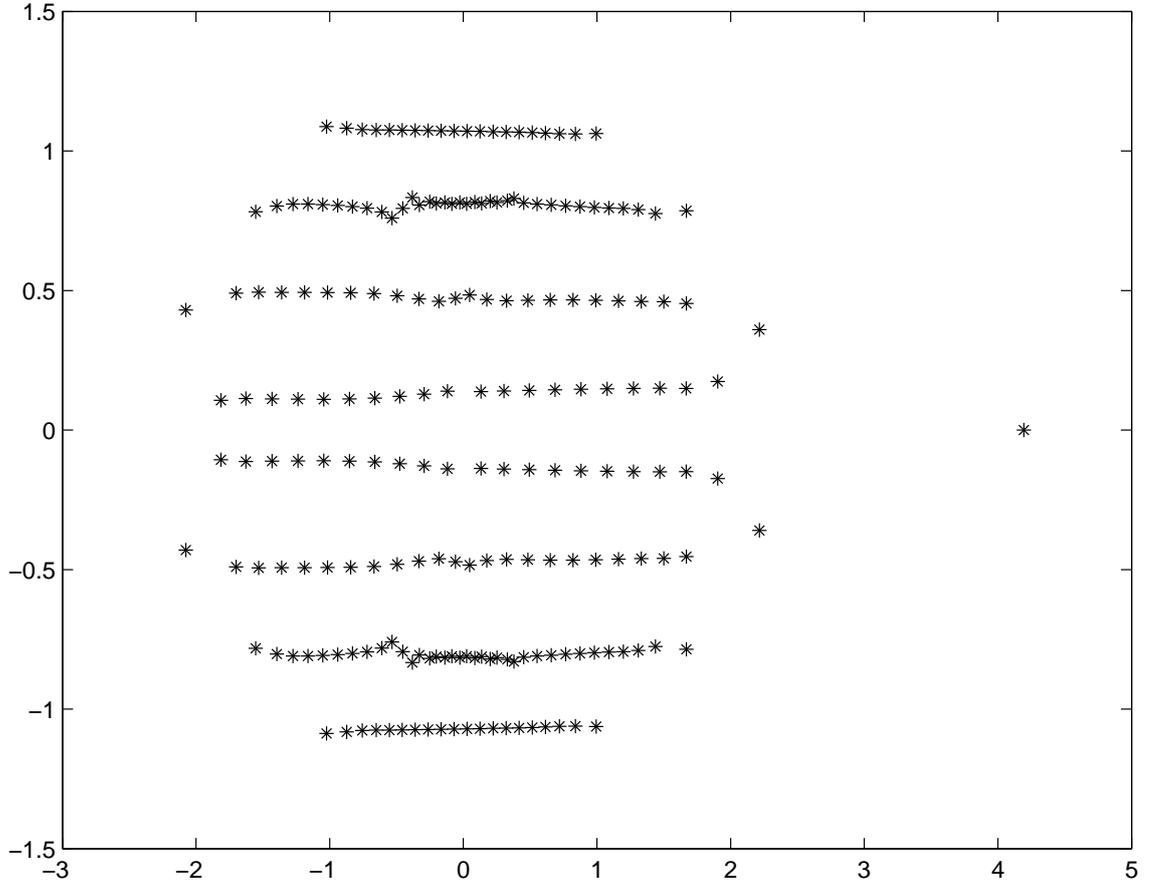


FIGURE 1. Valeurs propres d'un discrétisé de  $hD_x + e^{ix} + \delta Q$  pour  $N = \frac{1}{h} = 100$ ,  $\epsilon = \frac{1}{10}$ .

En imposant  $\varphi_+(x_+) = 0$ , et avec  $\varphi'_+(x_+) = \xi_+ \in \mathbb{R}$ , la partie imaginaire de la phase (qui détermine la croissance de  $e_+$ ) est fixée par sa deuxième dérivée :

$$(2.19) \quad \text{Im } \varphi''_+(x_+) = -\text{Im } g'(x_+) = \frac{1}{2i} \{p, \bar{p}\}(\rho_+) > 0,$$

donc  $\text{Im } \varphi_+(x) \sim (x - x_+)^2$  et  $e_+$  est normalisable dans  $L^2(I_+)$ . Ceci indique donc bien l'importance du signe du crochet de poisson.

Finalement remarquons que  $(P - z)\chi_+e_+ = O(e^{-\frac{1}{c\hbar}})$ , donc  $\chi_+e_+$  est un quasimode pour  $P - z$ .

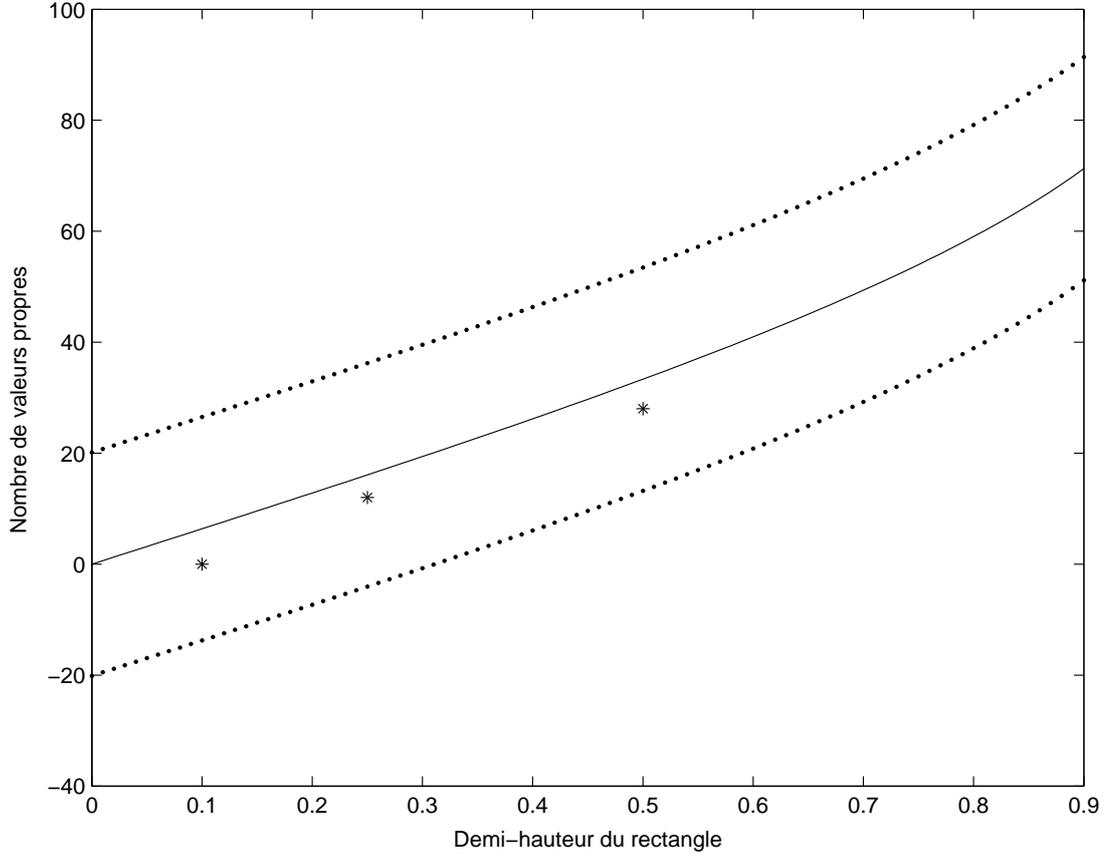


FIGURE 2. Nombre de valeurs propres dans un rectangle centré en 0 de largeur 1 et de hauteur variable : enveloppe théorique, valeurs numériques.

Etant donné que  $\frac{1}{i}\{\bar{p}, p\}(\rho_-) = -\frac{1}{i}\{p, \bar{p}\}(\rho_-) > 0$ , il est possible de construire une solution analogue à  $(P^* - \bar{z})u = 0$  sur  $I_-$ .

**Lemme 5.** — Il existe  $e_- = c_-(z; h)e^{\frac{i}{h}\varphi_-(x, z)} \in H_{sc}^1(I_-)$ ,  $\|e_-\|_{L^2(I_-)} = 1$ , tel que  $(P^* - \bar{z})e_- = 0$  sur  $I_-$ . Nous avons  $\text{Im} \varphi_-(x) \sim (x - x_-)^2$ .

2.2.2. *Problème de Grushin.* — Nous allons poser un problème de Grushin analogue à celui de la section 1.2.2. Soit

$$(2.20) \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} P & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H_{sc}^1 \times \mathbb{C} \rightarrow L^2 \times \mathbb{C}$$

avec

$$(2.21) \quad \begin{aligned} R_+ u &:= \langle u, \chi_+ e_+ \rangle, \quad u \in H_{sc}^1, \\ R_- u_- &:= u_- \chi_- e_-, \quad u_- \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Nous construisons dans [4] un inverse explicite

$$(2.22) \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O(\frac{1}{\sqrt{h}}) & O(1) \\ O(1) & O(\sqrt{h}) \end{pmatrix}$$

et obtenons

$$(2.23) \quad E_{-+} = \frac{A(z; h)}{\sqrt{h}} \left( e^{\frac{i}{h} \int_{x_-}^{x_+} (g(\tilde{x}) - z) d\tilde{x}} - e^{-\frac{i}{h} \int_{x_+}^{x_- + 2\pi} (g(\tilde{x}) - z) d\tilde{x}} \right),$$

où  $A$  est une amplitude non-nulle. La proposition 1 reste valable et nous permet de réduire l'analyse spectrale à l'analyse des zéros de  $E_{-+}$ . Nous voyons que pour  $z \in \Omega$ ,  $E_{-+} = O(e^{-\frac{1}{Ch}})$ , donc la norme de la résolvante  $y$  sera exponentiellement grande en  $h$  (voir [4]).

Un des obstacles pour estimer les zéros de  $E_{-+}$  est que cette fonction n'est pas holomorphe en  $z$ . Or en posant

$$(2.24) \quad l_0 := -i \int_{x_-}^{x_+} (g(\tilde{x}) - z) d\tilde{x}$$

nous avons  $\partial_{\bar{z}} e^{\frac{(l_0 + O(h))}{h}} E_{-+} = 0$ .

Dans [4], nous montrons de plus que  $\text{Re } l_0$  est sousharmonique et que nous avons

$$(2.25) \quad \Delta \text{Re } l_0 \mathcal{L}(dz) = (d\xi \wedge dx - d\eta \wedge dy)_{|\Gamma_{-+}},$$

ce qui implique que si  $\Gamma$  est un domaine, alors  $\Gamma_{-+}(\Gamma)$  est symplectique.

2.2.3. *Perturbation.* — Nous considérons le problème de Grushin perturbé que l'on obtient en remplaçant  $P$  par  $P + \delta Q$  dans (2.20). Pour  $\delta \|Q\| \ll \sqrt{h}$ , on peut trouver un inverse  $\mathcal{E}^\delta$  à partir de (2.22) par série de Neumann. Nous obtenons aussi un développement perturbatif pour  $E_{-+}^\delta$  :

$$(2.26) \quad E_{-+}^\delta = O(e^{-\frac{1}{Ch}}) + \delta \langle Q e_+, e_- \rangle + O\left(\frac{\delta^2}{\sqrt{h}}\right).$$

Nous remarquons tout d'abord qu'il existe  $l^\delta = l^0 + O(\frac{\delta}{\sqrt{h}})$  tel que  $\partial_{\bar{z}} e^{\frac{l^\delta}{h}} E_{-+}^\delta = 0$ .

Nous voulons de nouveau de « rendre dominant » le terme de premier ordre perturbatif. Plaçons nous dans le cadre du théorème 2. Etant donné que  $Q$  a un noyau intégral oscillatoire, nous avons

$$(2.27) \quad \langle Qe_+, e_- \rangle = \iint B(x, y, z; h) e^{\frac{i}{h}(\varphi(x, y) + \varphi_+(y, z) - \overline{\varphi_-}(x, z))} dx dy ,$$

ce qui est grand si la phase totale

$$(2.28) \quad \varphi(x, y) + \varphi_+(y, z) - \overline{\varphi_-}(x, z)$$

a un point critique. Si  $z$  varie le long d'une courbe comme dans le théorème 2, alors il est possible de construire  $\varphi$  telle que la phase totale a un point critique pour tout  $z \in \gamma$ , ce qui impliquera le théorème 2 (voir [4]).

Considérons la variété lagrangienne (par rapport à  $d\xi \wedge dx - d\eta \wedge dy$ ) associée à  $\varphi$  :

$$(2.29) \quad \Lambda_\varphi = \{(x, \varphi'_x, y, -\varphi'_y)\} .$$

La condition d'avoir un point critique pour  $z = z_0$  s'énonce

$$(2.30) \quad \Gamma_{-+}(\{z_0\}) \subset \Lambda_\varphi .$$

Nous voyons que si  $z_0$  varie dans un ouvert  $\Gamma$ , il n'est pas possible de remplir cette condition pour tout  $z_0 \in \Gamma$ , car  $\Gamma_{-+}(\Gamma)$  est symplectique dans ce cas.

Nous avons donc, dans le cas d'un domaine comme dans le théorème 3, considéré une somme de noyaux oscillants tels que pour un ensemble de points  $z_j, j \in J$  une des phases totales

$$(2.31) \quad \varphi_j(x, y) + \varphi_+(y, z_j) - \overline{\varphi_-}(x, z_j)$$

a (près) un point critique. En fait, si  $\text{dist}((\rho_j, \nu_j), \Gamma_{-+}(z))$  est assez petit, la méthode de la phase stationnaire donne

$$(2.32) \quad \iint B_j(x, y, z; h) e^{\frac{i}{h}(\varphi(x, y) + \varphi_+(y, z) - \overline{\varphi_-}(x, z))} dx dy \sim e^{\frac{i}{h}\psi_j(z)} C_j(z; h) ,$$

où

$$(2.33) \quad \text{Im } \psi_j(z) \sim (\text{dist}((\rho_j, \nu_j), \Gamma_{-+}(z)))^2 ,$$

qui admet un minimum en  $z_j, C_j(z_j) \neq 0$ .

**Hypothèse 4.** —  $z_j \neq z_k, \forall j \neq k$  (si ces points sont bien-définis).

Il existera donc un terme qui domine  $\langle Qe_+, e_- \rangle(\tilde{z}_j)$  pour un  $\tilde{z}_j$  dans un voisinage de  $z_j$ , et ainsi aussi  $E_{-+}^\delta(\tilde{z}_j)$ . Ceci nous permet d'obtenir que pour  $h$  assez petit

$$(2.34) \quad |e^{\frac{i\delta}{h}} E_{-+}^\delta|(\tilde{z}_j) \geq e^{\frac{\operatorname{Re} l_0 - 2\epsilon}{h}}, \quad \forall j \in J,$$

avec  $\gamma \subset \cup_j B(\tilde{z}_j, C\sqrt{\epsilon})$ , et nous savons que

$$(2.35) \quad |e^{\frac{i\delta}{h}} E_{-+}^\delta| \leq e^{\frac{\operatorname{Re} l_0}{h}}.$$

Finalement, nous utilisons une proposition reliant le nombre de zéros d'une fonction holomorphe dans un domaine, qui est majorée par  $e^{\frac{1}{h}\phi}$ , et minorée en suffisamment de points par  $e^{\frac{1}{h}(\phi-\epsilon)}$ , avec  $\frac{1}{2\pi h} \int \Delta\phi \mathcal{L}(dz)$  (voir [4]). Ici  $\phi = \operatorname{Re} l_0$ , et avec (2.25), l'intégrale du laplacien est reliée au volume symplectique de  $\Gamma_{-+}$ .

Au total, nous avons donc trouvé une loi de Weyl plutôt qu'une migration des valeurs propres vers le bord.

*Remerciements* : Ce travail fait partie de la thèse de Doctorat de l'auteur préparé sous la direction de J. Sjöstrand.

## Références

- [1] E.B. Davies, Semiclassical states for Non-Self-Adjoint Schrödinger Operators, Commun. Math. Phys. 200 (1999), 35-41
- [2] E.B. Davies, Pseudospectra of differential operators, J.Operator theory 43 (2000), 243-262
- [3] N. Dencker, J. Sjöstrand, M. Zworski, Pseudospectra of semiclassical (pseudo-) differential operators, Comm. Pure Appl. Math. 57 (2004), 384-415
- [4] M. Hager, Instabilité spectrale semiclassique d'opérateurs non-autoadjoints I : un exemple, preprint disponible sur hal.ccsd.cnrs.fr
- [5] J. Sjöstrand, M. Zworski, Elementary linear algebra for advanced spectral problems, preprint.
- [6] M. Zworski, A remark on a paper of E.B. Davies, Proceedings of the AMS 129 (1999), 2955-2957

---

MILDRED HAGER, CMLS, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex  
*E-mail* : hager@math.polytechnique.fr