Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

# Equations aux Dérivées Partielles

2004-2005

Pierre Raphaël

**Sur la dynamique explosive des solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire**

*Séminaire É. D. P.* (2004-2005), Exposé n$^o$ III, 11 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2004-2005____A3_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

# Sur la dynamique explosive des solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire

Pierre Raphaël

*Université de Paris Sud et CNRS*

Ces travaux en collaboration avec Frank Merle portent sur l'étude de la dynamique explosive des solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire $L^2$ critique en dimension $N$:

$$(NLS) \quad \begin{cases} iu_t = -\Delta u - |u|^{\frac{4}{N}}u, & (t,x) \in [0,T) \times \mathbf{R}^N, \\ u(0,x) = u_0(x), & u_0 : \mathbf{R}^N \to \mathbf{C}, \end{cases} \tag{1}$$

$u_0 \in H^1 = \{u \in L^2 \text{ avec } \nabla u \in L^2\}$. En dimension $N = 2$, (NLS) modèlise la dynamique de l'enveloppe d'une onde plane quasi-monochromatique dans un milieu non linéaire faiblement dispersif. Le phénomène décrit par la dynamique explosive dans l'espace d'énergie $H^1$ est alors la focalisation ponctuelle du faisceau laser en un point de l'espace, voir [19].

(NLS) est un système Hamiltonien de dimension infinie dans l'espace d'énergie $H^1$ dépourvu de propriétés de localisation a priori. C'est dans ce contexte le seul exemple connu avec l'equation de Korteweg-de-Vries généralisée pour lequel l'explosion est dans certains cas avérée. La description de la dynamique explosive comprend trois grandes problématiques: exhiber des conditions suffisantes d'explosion dans l'espace d'énergie, estimer la vitesse de focalisation et la stabilité des différents régimes explosifs, préciser la structure en espace de la formation de la singularité.

## 1 Présentation du problème

### Structure Hamiltonienne dans l'espace d'énergie

Le caractère bien posé du problème de Cauchy dans $H^1$ pour (1) est un résultat classique de Ginibre, Velo, [3]. Donc pour $u_0 \in H^1$, il existe $0 < T \leq +\infty$ telle que $u(t) \in \mathcal{C}([0,T), H^1)$, et soit $T = +\infty$, soit $T < +\infty$ et $\lim_{t\to T} |\nabla u(t)|_{L^2} = +\infty$, la solution explose en temps fini.
Le groupe complet des invariances de l'opérateur de Schrödinger linéaire laisse invariante l'équation non linéaire: si $u(t,x)$ est solution de (1), alors $\forall(\lambda_0, t_0, x_0, \beta_0, \gamma_0) \in \mathbf{R}^+_* \times \mathbf{R} \times$

$\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$,

$$v(t,x) = \lambda_0^{\frac{N}{2}} u(t+t_0, \lambda_0 x + x_0 - \beta_0 t) e^{i\frac{\beta_0}{2}\cdot(x - \frac{\beta_0}{2}t)} e^{i\gamma_0} \quad \text{aussi.}$$

La symétrie pseudo-conforme prend elle place dans l'espace de viriel $\Sigma = H^1 \cap \{xu \in L^2\}$: si $u(t,x) \in \Sigma$ est solution de (1), alors

$$v(t,x) = \frac{1}{|t|^{\frac{N}{2}}} \overline{u}(\frac{1}{t}, \frac{x}{t}) e^{i\frac{|x|^2}{4t}} \quad \text{aussi.} \tag{2}$$

Le groupe des symétries induit les invariants suivants:

$$\begin{array}{l} \text{Norme } \ L^2: \quad \int |u(t,x)|^2 = \int |u_0(x)|^2; \\ \text{Energie}: \quad E(u(t,x)) = \frac{1}{2}\int |\nabla u(t,x)|^2 - \frac{1}{2+\frac{4}{N}} \int |u(t,x)|^{2+\frac{4}{N}} = E(u_0); \\ \text{Moment}: \quad Im\left(\int \nabla u \overline{u}(t,x)\right) = Im\left(\int \nabla u_0 \overline{u_0}(x)\right). \end{array}$$

La conservation de l'énergie exprime le caractère Hamiltonien de l'équation. En outre, dans l'espace de viriel $\Sigma$, la conservation de l'énergie conforme induit la loi dite du viriel:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int |x|^2 |u(t,x)|^2 dx = 16 E(u_0). \tag{3}$$

**Caractérisation variationelle du soliton et solutions globales**

Le critère optimal de globalité des solutions dans $H^1$ a été exhibé par M. Weinstein dans [20] sur la base de méthodes variationelles. Tout d'abord, d'après [1] et [6], il existe une unique solution radiale positive de

$$\Delta Q - Q + Q^{1+\frac{4}{N}} = 0, \quad Q(r) \to 0 \ \text{ quand } \ r \to +\infty. \tag{4}$$

Le ground state $Q$ minimise l'inégalité d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg au sens suivant:

$$\forall v \in H^1, \quad E(v) \geq \frac{1}{2} \int |\nabla v|^2 \left(1 - \left(\frac{|v|_{L^2}}{|Q|_{L^2}}\right)^{\frac{4}{N}}\right). \tag{5}$$

Etant donnée $u_0 \in H^1$ avec $|u_0|_{L^2} < |Q|_{L^2}$, le contrôle (5) couplé avec la conservation de l'énergie et de la norme $L^2$ implique une borne uniforme sur la norme $H^1$ de la solution qui est donc globale et bornée en temps.

**Le cas de masse critique**

Le critère de Weinstein est optimal. D'une part,

$$u(t,x) = Q(x) e^{it}$$

est une solution de (1) de masse critique: c'est l'onde solitaire. D'autre part, la symétrie pseudo-conforme appliquée à cette solution induit la solution explicite de masse critique

$$S(t,x) = \frac{1}{|t|^{\frac{N}{2}}} Q(\frac{x}{t}) e^{i\frac{|x|^2}{4t} - \frac{i}{t}} \tag{6}$$

qui explose en $t = 0$ avec:

$$|\nabla S(t)|_{L^2} \sim \frac{1}{|t|} \quad \text{et} \quad |S(t)|^2 \rightharpoonup \left(\int Q^2\right) \delta_{x=0} \quad \text{quand} \quad t \to 0.$$

Un résultat fondamental de F. Merle, [10], assure que $S(t)$ est l'unique solution explosive de masse critique dans $H^1$ aux symétries de l'équation près.

**Explosion en grandes données: l'identité du viriel**

Nous posons maintenant la question de l'existence de solutions explosives pour des données surcritiques en masse $\int |u_0|^2 > \int Q^2$. Dans ce cas, il existe des données d'énergie strictement négative. Soit alors $u_0 \in \Sigma$ avec $E(u_0) < 0$, la solution correspondante $u(t)$ de (1) satisfait la loi du viriel (3), donc la quantité positive $\int |x|^2 |u(t,x)|^2 dx$ doit devenir négative en temps fini et la solution explose en temps fini, voir [4], [21]. Cet argument remarquable et connu depuis les années 60' est essentiellement le seul résultat explosif en grandes données. *Néanmoins, l'argument étant purement obstructif, il ne dégage aucune information qualitative sur la dynamique explosive et la formation de la singularité.*

**Stabilité orbitale de l'onde solitaire pour la dynamique explosive**

Nous restreignons désormais notre discussion au cas de données de petite masse surcritique:

$$u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha^*} = \{u_0 \in H^1 \quad \text{avec} \quad \int Q^2 \leq \int |u_0|^2 \leq \int Q^2 + \alpha^*\},$$

$\alpha^* > 0$ petit. Cette situation est conjecturée modèlisée la dynamique explosive générique au voisinage d'un point d'explosion.
La caractérisation variationelle du ground state $Q$ implique la stabilité orbitale du soliton en régime explosif dans $\mathcal{B}_{\alpha^*}$. Soit ainsi $u(t) \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$ explosive en temps fini $0 < T < +\infty$, alors il existe des paramètres $(x(t), \gamma(t)) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$ tels que pour $t$ près de $T$, $u(t)$ admet une décomposition géométrique:

$$u(t,x) = \frac{1}{\lambda(t)^{\frac{N}{2}}} (Q + \varepsilon)(t, \frac{x - x(t)}{\lambda(t)}) e^{i\gamma(t)}, \tag{7}$$

avec

$$|\varepsilon(t)|_{H^1} \leq \delta(\alpha^*), \quad \delta(\alpha^*) \to 0 \quad \text{quand} \quad \alpha^* \to 0, \quad \lambda(t) \sim \frac{1}{|\nabla u(t)|_{L^2}}.$$

*Le but de notre analyse est de comprendre dans ce régime perturbatif comment extraire de la dynamique de dimension infinie de (1) une dynamique de dimension finie et possiblement universelle pour les paramètres géométriques* $(\lambda(t), x(t), \gamma(t))$ *couplée à la dynamique dispersive de dimension infinie qui gouverne l'évolution de l'excès de masse* $\varepsilon(t)$.

**Construction de solutions explosives**

Il existe deux résultats fondamentaux de construction de solutions explosives:
- Bourgain et Wang construisent dans [2] en dimension $N = 1, 2$ une famille de solutions $u(t)$ de (1) qui explosent en temps fini et se comportent localement à l'explosion comme la solution de masse critique $S(t)$ donnée par (6), et donc en particulier:

$$|\nabla u(t)|_{L^2} \sim \frac{1}{T-t} \quad \text{quand} \quad t \to T.$$

- Les résultats numériques de Landman, Papanicolaou, Sulem, Sulem, [7], et une analyse heuristique, voir [19], suggèrent l'existence de solutions explosant à la vitesse:

$$|\nabla u(t)|_{L^2} \sim \sqrt{\frac{\log|\log(T-t)|}{T-t}}. \tag{8}$$

Ce comportement se révèle en outre stable numériquement par perturbation de la donnée initiale. En dimension $N = 1$, Perelman prouve dans [17] l'existence et la stabilité dans un espace strictement inclus dans l'espace d'énergie d'une solution satisfaisant (8). Cette loi doit être interprétée comme une correction de la loi plus naturelle du scaling. En effet, une conséquence immédiate du caractère localement bien posé du problème de Cauchy dans $H^1$ est la borne inférieure sur le taux d'explosion:

$$|\nabla u(t)|_{L^2} \geq \frac{C}{\sqrt{T-t}}, \tag{9}$$

estimation qui s'avère optimale dans d'autres contextes.

Notons que l'instabilité structurelle de la loi du log-log (8) est une conséquence d'un résultat de F. Merle, [11]: soit le système de Zakharov en dimension $N = 2$,

$$(Zakharov) \quad \begin{cases} iu_t = -\Delta u + nu \\ \frac{1}{c_0^2} n_{tt} = \Delta n + \Delta |u|^2. \end{cases} \tag{10}$$

Ce système est un raffinement des approximations physiques menant à (1) que l'on retrouve dans la limite $c_0 \to +\infty$. Alors toutes les solutions explosives de (10) vérifient:

$$|\nabla u(t)|_{L^2} \geq \frac{C}{T-t}.$$

Cette vitesse explosive très aussi dessus de la loi en double log (8) est celle de $S(t)$ donnée par (1), et est aussi celle des solutions explicites numériquement stables de (10) construites par Glangetas, Merle dans [5].

## 2 Exposition des résultats

Soit une donnée initiale $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$ telle que la solution correspondante $u(t)$ de (1) explose en temps fini. La stabilité orbitale de l'onde solitaire assure l'existence de la décomposition géométrique (7). Décrire la dynamique explosive revient maintenant à estimer la taille du paramètre $\lambda(t) \sim \frac{1}{|\nabla u(t)|_{L^2}}$ et du reste dispersif $\varepsilon(t)$.

*Le coeur de notre analyse est d'obtenir sur la base de la décomposition (7) des estimations dispersives non linéaires sur $\varepsilon(t)$ qui en retour impliquent des résultats de monotonie pour la dynamique de $\lambda(t)$ qui mesure la taille de la solution. Nous exhibons en effet un argument de type principe du maximum qui implique l'existence d'une fonctionnelle de Lyapounov pour (1). La preuve est basée sur des dégénérescences algébriques de la structure linéaire de (1) au voisinage de $Q$ comme attendu, et sur un usage intensif des lois de conservation. Il s'ensuit des propriétés de classification de la dynamique de l'onde solitaire au coeur de la description de la dynamique explosive.*

**Explosion en énergie strictement négative**

Nous introduisons l'invariant $E_G(u) = E(u) - \frac{1}{2}\left(\frac{Im(\int \nabla u \overline{u})}{|u|_{L^2}}\right)^2$ dont le signe est invariant par le groupe des symétries $H^1$. En outre, nous supposons implicitement vérifiée une *Propriété Spectrale* qui revient à compter le nombre de directions négatives d'un opérateur de Schrödinger $-\Delta + V$ où le potentiel $V(y)$ est stationnaire et construit sur le ground state $Q$. Plus précisement:

**Propriété Spectrale** *Soient les deux opérateurs de Schrödinger réels*

$$\mathcal{L}_1 = -\Delta + \frac{2}{N}\left(\frac{4}{N}+1\right) Q^{\frac{4}{N}-1} y \cdot \nabla Q \quad , \quad \mathcal{L}_2 = -\Delta + \frac{2}{N} Q^{\frac{4}{N}-1} y \cdot \nabla Q,$$

*et la forme quadratique réelle pour $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 \in H^1$:*

$$H(\varepsilon, \varepsilon) = (\mathcal{L}_1 \varepsilon_1, \varepsilon_1) + (\mathcal{L}_2 \varepsilon_2, \varepsilon_2).$$

*Alors il existe une constante universelle $\tilde{\delta}_1 > 0$ telle que $\forall \varepsilon \in H^1$, si $(\varepsilon_1, Q) = (\varepsilon_1, Q_1) = (\varepsilon_1, yQ) = (\varepsilon_2, Q_1) = (\varepsilon_2, Q_2) = (\varepsilon_2, \nabla Q) = 0$, alors $H(\varepsilon, \varepsilon) \geq \tilde{\delta}_1 (\int |\nabla \varepsilon|^2 + \int |\varepsilon|^2 e^{-|y|})$.*

Cette propriété a été démontrée en dimension $N = 1$ dans [12] grâce au caractère explicite de $Q$ dans ce cas, et vérifiée numériquement en dimensions $N = 2, 3, 4$.

L'explosion en temps fini pour les données d'énergie strictement négatives avec une borne universelle optimale sur la vitesse d'explosion a été obtenue dans [12], [13]:

**Théorème 1 ([12], [13])** *Soit $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$ avec*

$$E_0^G < 0,$$

*alors $u(t)$ explose en temps fini $0 < T < +\infty$ avec la borne supérieure sur la vitesse d'explosion pour $t$ près de $T$:*

$$|\nabla u(t)|_{L^2} \leq C^* \left(\frac{\log|\log(T-t)|}{T-t}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Le Théorème 1 découle d'estimations purement locales dans $\dot{H}^1$ et $L^2_{loc}$ sur $\varepsilon(t)$ induites par la structure de viriel (3) dans $\Sigma$. L'explosion en temps fini est ainsi une conséquence d'estimations non linéaires sur $\varepsilon(t)$ dans la région où $Q$, soit la dynamique non linéaire, est dominant, et qui sont en particulier découplées du comportement radiatif à l'infini. En ce sens, ce résultat est optimal et inclut la description de la dynamique explosive des solutions auto-similaires explicites qui sont dans $\dot{H}^1$ mais jamais dans $L^2$.

### Explosion en énergie strictement positive

La symétrie pseudo-conforme (2) permet en énergie strictement positive d'exhiber différents comportements, et la dynamique dans ce cas est beaucoup plus riche. Néanmois, l'argument de type principe du maximum peut-être généralisé de manière optimale à ce cas et est la clé pour séparer les deux régimes explosifs connus.

**Théorème 2 ([18])** *(i) Rigidité de la vitesse d'explosion: Soit $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$ avec*

$$E_G(u_0) > 0$$

*telle que $u(t)$ explose en temps fini $0 < T < +\infty$, alors on a pour $t$ près de $T$ soit*

$$|\nabla u(t)|_{L^2} \leq C_1^* \left(\frac{\log|\log(T-t)|}{T-t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

*soit*

$$|\nabla u(t)|_{L^2} \geq \frac{C_2^*}{(T-t)\sqrt{E_G(u_0)}}. \tag{12}$$

*(ii) Stabilité de la loi en log-log: En outre l'ensemble des données initiales $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$ telles que $u(t)$ explose en temps fini avec la borne (11) est ouvert dans $H^1$.*

Ce théorème exprime la stabilité dans l'espace d'énergie du régime explosif gouverné par la loi (11). Notons en outre que la borne inférieure (12) est optimale puisque satisfaîte par $S(t)$ et les solutions construites dans [2]. La compréhension de l'instabilité de ce régime et l'obtention d'un équivalent de la vitesse d'explosion dans le régime (12) sont en revanche ouverts.

### Borne inférieure sur la vitesse d'explosion: stabilité asymptotique du soliton

Une borne inférieure universelle sur la vitesse d'explosion est donnée par le scaling (9). Si l'explosion auto-similaire décrit en effet la dynamique stable dans d'autres situations comme pour la chaleur ou les ondes non linéaires, une conjecture générale pour (1) est la non existence de solutions auto-similaires dans l'espace d'énergie. Comme d'abord observé par Y. Martel et F. Merle dans [8], ce problème est dans le cadre de notre analyse perturbative équivalent à démontrer l'existence d'un profil universel en espace qui attire les solutions explosives au voisinage de l'explosion. Dans [14], nous démontrons l'universalité de $Q$ comme profil explosif et donc la non existence de solutions auto-similaires dans $\mathcal{B}_{\alpha^*}$:

**Théorème 3 ([14])** *Soit $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$ telle que $u(t)$ explose en temps fini $0 < T < +\infty$, alors il existe des paramètres $\lambda_0(t) = \frac{|\nabla Q|_{L^2}}{|\nabla u(t)|_{L^2}}$, $x_0(t) \in \mathbf{R}^N$ et $\gamma_0(t) \in \mathbf{R}$ tels que:*

$$e^{i\gamma_0(t)}\lambda_0^{\frac{N}{2}}(t)u(t, \lambda_0(t)x + x_0(t)) \to Q \quad \textit{dans} \quad \dot{H}^1 \quad \textit{quand} \quad t \to T.$$

*Ceci implique la borne inférieure sur la vitesse d'explosion:*

$$\lim_{t\to T} \sqrt{T-t}|\nabla u(t)|_{L^2} = +\infty.$$

Rappelons que l'analyse développée dans [12], [13], fournit des estimations dans $\dot{H}^1 \cap L^2_{loc}$, or les profils auto-similaires explicites sont dans cet espace, donc la seule analyse locale ne peut suffire à éliminer a piori ces solutions. *La preuve de la non existence de solutions auto-similaires repose ansi sur l'exhibition de contrôles dispersifs globaux dans $L^2$ qui est l'espace invariant par le scaling.* Elle repose notamment sur la classification des solutions non dispersives dans $L^2$:

**Théorème 4 ([14])** *Soit $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$ telle que la solution correspondante de (1) explose en temps fini $0 < T < +\infty$ et ne disperse pas dans $L^2$ au sens où:*

$$|u|^2(t) \rightharpoonup \left(\int |u(0)|^2\right)\delta_{x=0} \quad \textit{quand} \quad t \to T,$$

*alors $u(t) = S(t-T)$ aux symétries $H^1$ de (1) près.*

### Borne inférieure optimale sur la vitesse et dispersion dans $L^2$

L'obtention de la borne inférieure optimale sur le taux d'explosion correspondant à l'exacte loi du log-log (8) est obtenue dans [15] en poussant les techniques développées dans [14]. Ceci revient à exhiber le mécanisme dispersif exact dans $L^2$ qui correspond à *l'existence d'une fonctionnelle de Lyapounov basée sur la conservation de la norme $L^2$ utilisée de façon dynamique.*

**Théorème 5 ([15])** *Soit $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$ telle que $u(t)$ explose en temps fini $0 < T < +\infty$, alors pour $t$ près de $T$:*

$$|\nabla u(t)|_{L^2} \geq C^* \left( \frac{\log|\log(T-t)|}{T-t} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En outre, l'existence de cette fonctionnelle de Lyapounov permet de classifier le soliton dans la variété d'énergie nulle fondamentale pour la description de l'explosion.

**Théorème 6 ([15])** *Soit $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$ avec*

$$E_G^0 = 0.$$

*Si $u_0$ n'est pas un soliton aux symétries $H^1$ de (1) près, $u(t)$ explose en temps fini pour $t > 0$ et $t < 0$ avec la borne (11).*

**Profils à l'explosion et quantification de la masse focalisée**

Depuis l'exhibition du modèle (NLS) dans les années 60' en dimension $N = 2$, une question de physique fondamentale est celle de la mesure de la masse focalisée à l'explosion qui correspond à la puissance du faisceau laser formé. Cette masse est conjecturée quantifiée. Ce problème est lié à la question de la localisation en espace de la singularité. Plus précisément, étant donnée une solution explosive, le but est de décrire le lieu des points d'explosion et de mesurer la régularité de la solution en dehors de ces points. La conjecture suivante a été formulée dans [16]:

**Conjecture**: *Soit $u(t) \in H^1$ une solution de (1) qui explose en temps fini $0 < T < +\infty$. Alors il existe $(x_i)_{1 \leq i \leq L} \in \mathbf{R}^N$ avec $L \leq \frac{\int |u_0|^2}{\int Q^2}$ et $u^* \in L^2$ tels que: $\forall R > 0$,*

$$u(t) \to u^* \quad \textit{dans} \quad L^2(\mathbf{R}^N - \bigcup_{1 \leq i \leq L} B(x_i, R))$$

$$\textit{et} \quad |u(t)|^2 \rightharpoonup \Sigma_{1 \leq i \leq L} m_i \delta_{x = x_i} + |u^*|^2 \quad \textit{avec} \quad m_i \in [\int Q^2, +\infty).$$

L'ensemble $M$ des masses focalisées admissibles $m_i$ contient pour $N \geq 2$ l'ensemble non borné dans $L^2$ des étas excités solutions de (4), voir [9]. Ce sont les seuls exemples connus.

Nous démontrons la conjecture dans $\mathcal{B}_{\alpha^*}$ dans [16] sur la base des estimations dispersives dans $L^2$ obtenues dans [15] et les contrôles de la dynamique instable de type $S(t)$ de [18].

**Théorème 7 ([16])** *Soit $u_0 \in \mathcal{B}_{\alpha^*}$ telle que $u(t)$ explose en temps fini $0 < T < +\infty$, alors il existe des paramètres $(\lambda(t), x(t), \gamma(t)) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$ et un profil asympotique $u^* \in L^2$ tels que*

$$u(t) - \frac{1}{\lambda(t)^{\frac{N}{2}}} Q\left(\frac{x - x(t)}{\lambda(t)}\right) e^{i\gamma(t)} \to u^* \quad \textit{dans} \quad L^2 \quad \textit{quand} \quad t \to T,$$

*et le point d'explosion converge: $x(t) \to x(T) \in \mathbf{R}^N$ quand $t \to T$. En outre:*
*(i) Régime du log-log: si $u(t)$ vérifie (11), alors*

$$\frac{1}{C^*(\log|\log(R)|)^2} \leq \int_{|x-x(T)|\leq R} |u^*(x)|^2 dx \leq \frac{C^*}{(\log|\log(R)|)^2}, \tag{13}$$

*quand $R \to 0$, et*

$$u^* \notin H^1 \quad \textit{et} \quad u^* \notin L^p \ \textit{pour} \ \ p > 2.$$

*(ii) Régime $S(t)$: si $u(t)$ satisfaît (12), alors*

$$\int_{|x-x(T)|\leq R} |u^*|^2 \leq C^* E_0 R^2,$$

*quand $R \to 0$ et*

$$u^* \in H^1.$$

Ce résultat éclaire la différence entre les deux régimes explosifs et accrédite la thèse selon laquelle les solutions de type $S(t)$ constituent le bord des solutions explosives: la dynamique stable du log-log est basée sur un phénomène radiatif d'éjection de masse qui couple fortement la dynamique non linéaire de focalisation avec la partie régulière de la solution, ce qui induit une explosion faible avec une structure quasi singulière du profil $u^*$ au point d'explosion exprimée par (13); au contraire, le régime $S(t)$ correspond à un découplage très fort de la partie singulière purement représentée par la bulle de la solution de masse minimale avec la partie régulière de la solution qui ne voit pas dans l'espace de Cauchy la formation de la singularité, et c'est en ce sens une explosion critique car minimale.

## References


[1] Berestycki, H.; Lions, P.-L., Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state. Arch. Rational Mech. Anal. 82 (1983), no. 4, 313–345.

[2] Bourgain, J.; Wang, W., Construction of blowup solutions for the nonlinear Schrödinger equation with critical nonlinearity. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 25 (1997), no. 1-2, 197–215 (1998).

[3] Ginibre, J.; Velo, G., On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case. J. Funct. Anal. 32 (1979), no. 1, 1–32.

[4] Glassey, R.T., On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations, J. Math. Phys. 18, 1794-1797 (1977).

[5] Glangetas, L.; Merle, F., Existence of self-similar blow-up solutions for Zakharov equation in dimension two. I. Comm. Math. Phys. 160 (1994), no. 1, 173–215.

[6] Kwong, M. K., Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $R^n$. Arch. Rational Mech. Anal. 105 (1989), no. 3, 243–266.

[7] Landman, M. J.; Papanicolaou, G. C.; Sulem, C.; Sulem, P.-L., Rate of blowup for solutions of the nonlinear Schrödinger equation at critical dimension. Phys. Rev. A (3) 38 (1988), no. 8, 3837–3843.

[8] Martel, Y.; Merle, F., Stability of blow-up profile and lower bounds for blow-up rate for the critical generalized KdV equation, Ann. of Math. (2) 155 (2002), no. 1, 235–280.

[9] Merle, F., Construction of solutions with exactly $k$ blow up points for the Schrödinger equation with critical nonlinearity, J. Diff. Eq. 84 (1990), no. 2, 223-240.

[10] Merle, F., Determination of blow-up solutions with minimal mass for nonlinear Schrödinger equations with critical power. Duke Math. J. 69 (1993), no. 2, 427–454.

[11] Merle, F., Lower bounds for the blow up rate of solutions of the Zakharov equations in dimension two, Comm. Pure. Appl. Math. 49 (1996), n0. 8, 765-794.

[12] Merle, F.; Raphaël, P., Blow up dynamic and upper bound on the blow up rate for critical nonlinear Schrödinger equation, to appear in Annals of Math.

[13] Merle, F.; Raphaël, P., Sharp upper bound on the blow up rate for critical nonlinear Schrödinger equation, Geom. Funct .Ana 13 (2003), 591–642.

[14] Merle, F.; Raphaël, P., On Universality of Blow up Profile for $L^2$ critical nonlinear Schrödinger equation, Invent. Math. 156, 565-672 (2004).

[15] Merle, F.; Raphaël, P., Sharp lower bound on the blow up rate for critical nonlinear Schrödinger equation, preprint.

[16] Merle, F.; Raphaël, P., Profiles and quantization of the blow up mass for critical non linear Schrödinger equation, to appear in Comm. Math. Phys.

[17] Perelman, G., On the blow up phenomenon for the critical nonlinear Schrödinger equation in 1D, Ann. Henri. Poincaré, 2 (2001), 605-673.

[18] Raphaël, P., Stability of the log-log bound for blow up solutions to the critical non-linear Schrödinger equation, to appear in Math. Annalen.

[19] Sulem, C.; Sulem, P.L., The nonlinear Schrödinger equation. Self-focusing and wave collapse. Applied Mathematical Sciences, 139. Springer-Verlag, New York, 1999.

[20] Weinstein, M.I., Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates, Comm. Math. Phys. **87** (1983), 567—576.

[21] Zakharov, V.E.; Shabat, A.B., Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in non-linear media, Sov. Phys. JETP **34** (1972), 62—69.