Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

# Equations aux Dérivées Partielles

2004-2005

Christian Gérard

**Construction de champs quantiques relativistes à température positive**

*Séminaire É. D. P.* (2004-2005), Exposé n° II, 18 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2004-2005____A2_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

# Construction de champs quantiques relativistes à température positive

Christian Gérard,
Université Paris Sud XI,
F-91405 Orsay, France

19 octobre 2004

## 1 Introduction

Nous allons décrire dans cet exposé un travail en collaboration avec Christian Jaekel sur la construction du modéle $P(\phi)_2$ à température positive. Les systèmes quantiques à température positive sont décrits par la mécanique quantique statistique, alors que la théorie quantique des champs relativiste a été introduite à l'origine pour la physique des particules élémentaires. Ces deux théories ont beaucoup de points communs, car elles reposent toutes les deux sur la quantification de systèmes avec un nombre infini de degrés de liberté.

D'habitude les modèles de physique statistique sont des modèles *non relativistes*, et on peut donc se demander pourquoi étudier des modèles *relativistes* à température positive. On peut donner deux justifications: tout d'abord, si l'on croit que les modèles relativistes décrivent les interactions fondamentales, il est naturel de les étudier aussi à température positive. De plus certaines expériences en physique des particules produisent de grandes quantités de particules très énergétiques (et donc relativistes), et la théorie des champs relativistes à température positive est utilisée depuis longtemps (dans sa version perturbative) par les physiciens pour décrire ces expériences (voir par exemple [L], [U]).

Les seuls travaux que nous connaissons sur la construction rigoureuse de modèles relativistes à température positive sont ceux de Hoegh-Krohn [HK] et Froehlich [Fr2], sur le modèle $P(\phi)_2$. Le travail de Hoegh-Krohn est assez hermétique et en particulier certains résultats, comme le caractère localement Fock de l'état à température positive ne sont pas démontrés dans [HK]. Nous avons donc jugé utile de reprendre cette construction, en modifiant l'approche. Le but est d'avoir une base solide pour étudier par la suite d'autres propriétés du modèle $P(\phi)_2$. Par exemple il est possible de démontrer la *condition KMS relativiste* due à Bros et Buchholz, qui est la généralisation naturelle de la condition KMS pour les systèmes relativistes. D'autres problèmes intéressants liés à la théorie de la diffusion, comme par exemple donner une définition précise de la notion de *quasi particule*, pourraient aussi être abordés.

# 2 Quelques rappels

## 2.1 Représentation GNS

Une $C^*-$*algèbre concrète* est une sous algèbre $\mathcal{C}$ de l'algèbre $B(\mathcal{H})$ des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, stable par l'adjoint et fermée pour la topologie de la norme. Le sens de cette définition est qu'on oublie le fait que $\mathcal{C}$ agit sur les vecteurs de $\mathcal{H}$ pour ne garder que les structures algébriques et topologiques de $\mathcal{C}$.

Une *algèbre de von Neumann* est une sous algèbre $\mathcal{A}$ de l'algèbre $B(\mathcal{H})$ stable par l'adjoint et fermée pour la topologie forte. Une algèbre de von Neumann est aussi fermée pour la topologie faible et égale à son bicommutant $\mathcal{A}''$ dans $B(\mathcal{H})$.

Un *état* sur une $C^*-$algèbre $\mathcal{C}$ est une forme linéaire $\omega$ sur $\mathcal{C}$, positive (i.e. $\omega(A) \geq 0$ si $A = B^*B$) de norme 1. Si $\mathcal{C}$ contient une unité $\mathbb{1}$, $\omega$ est normalisée ssi $\omega(\mathbb{1}) = 1$.

Une *dynamique* sur une $C^*-$algèbre $\mathcal{C}$ est un groupe à un paramètre $\tau_t$, $t \in \mathbb{R}$ de $*-$automorphismes de $\mathcal{C}$. On demande souvent que $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tau_t(A)$ soit continu pour tout $A \in \mathcal{C}$, si on munit $\mathcal{C}$ de la topologie de la norme (si $\mathcal{C}$ est seulement une $C^*-$algèbre) ou de la topologie forte (si $\mathcal{C}$ est une algèbre de von Neumann).

Un état $\omega$ est *invariant* si $\omega(\tau_t(A)) = \omega(A)$, pour tout $A \in \mathcal{C}$.

Nous rappelons maintenant la *construction GNS*, qui permet de construire une représentation d'une $C^*-$algèbre $\mathcal{C}$ associée à un état $\omega$. Nous supposerons que $\mathcal{C}$ contient une unité.

On s'aperçoit facilement en utilisant la positivité de $\omega$, que $(A, B) := \omega(A^*B)$ définit une forme sesquilinéaire symétrique positive sur $\mathcal{C}$. Après prise du quotient par les vecteurs de norme nulle et passage au complété, on obtient un espace de Hilbert noté $\mathcal{H}_\omega$. Si $[A] \in \mathcal{H}_\omega$ désigne l'image de $A \in \mathcal{C}$ dans $\mathcal{H}_\omega$, on obtient une représentation $\pi_\omega$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{H}_\omega$ en posant

$$\pi_\omega(A)[B] := [AB],\ A, B \in \mathcal{C}.$$

Si on pose $\Omega_\omega = [\mathbb{1}]$, on voit que

$$\omega(A) = (\Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega).$$

Si $\tau_t$ est une dynamique fortement continue sur $\mathcal{C}$, telle que $\omega$ est invariant par $\tau_t$, on obtient de plus un *groupe unitaire* sur $\mathcal{H}_\omega$ en posant

$$U(t)[A] := [\tau_t](A),$$

et on peut démontrer qu'il existe un unique opérateur autadjoint $H$ sur $\mathcal{H}_\omega$ tel que $U(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}$ et $H\Omega_\omega = 0$. Le générateur $H$ est appelé d'habitude le *Hamiltonien.* Pour les problèmes qui nous intéressent, la construction GNS permet de passer facilement d'une $C^*-$algèbre $\mathcal{C}$ à l'algèbre de von Neumann $\pi_\omega(\mathcal{C})$", fermeture faible de $\pi_\omega(\mathcal{C})$. En effet il est en général plus facile de travailler avec des algèbres de von Neumann.

## 2.2 Etats KMS

Des exemples importants d'états invariants décrivant des systèmes quantiques à température positive sont fournis par les *états de Gibbs*: si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, $H$ un opérateur autoadjoint sur $\mathcal{H}$ tel que $\mathrm{e}^{-\beta H}$ est *à trace* pour $\beta = T^{-1}$. Si $\mathcal{C} = B(\mathcal{H})$, et $\tau_t$ est la dynamique engendrée par $H$ i.e. $\tau_t(A) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH} A \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH}$, l'état

$$\omega(A) := \frac{\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta H} A)}{\mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{-\beta H})}$$

est appelé un *état de Gibbs.* Il est évidemment invariant par $\tau_t$. Les états de Gibbs apparaissent quand on décrit des systèmes à température positive *confinés*, par exemple un gaz de particules libres dans une boite.

Par contre la limite thermodynamique de tels systèmes ne se décrit plus en général par un état de Gibbs: l'opérateur $H$ qui engendre la dynamique n'a plus la propriété que $\mathrm{e}^{-\beta H}$ est à trace (par exemple parce qu'il commute avec le groupe des translations).

Néanmoins une certaine propriété des états de Gibbs survit à la limite thermodynamique: en effet en utilisant la cyclicité de la trace, on vérifie facilement que les états de Gibbs vérifient la propriété suivante: si $A, B \in B(\mathcal{H})$ et si on pose $F_{A,B}(t) := \omega(A\tau_t(B))$, on voit que

$$F_{A,B}(t) \text{ se prolonge holomorphiquement dans } I_\beta^+ = \{z \in \mathbb{C} | \ 0 < \mathrm{Im} z < \beta\}, \tag{2.1}$$

est continue dans $\overline{I_\beta^+}$, et vérifie:

$$F_{A,B}(t + \mathrm{i}\beta) = F_{B,A}(t), \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Si $\mathcal{C}$ est une $C^*-$algèbre et $\tau_t$ une dynamique sur $\mathcal{C}$, un état $\omega$ est appelé un état $(\tau, \beta)-$KMS (pour Kubo-Martin-Schwinger) pour $\beta > 0$ s'il vérifie les propriétés (2.1) et (2.2) ci dessus. Il est facile de vérifier qu'un état KMS est invariant par $\tau_t$.

Les états KMS sont utilisés pour décrire les *états d'équilibre* (associés à une température) de systèmes quantiques 'en volume infini'.

**Exemple.**

Soit $\mathfrak{h}$ un espace de Hilbert, $\epsilon \geq 0$ un opérateur autoadjoint sur $\mathfrak{h}$. Soit

$$\Gamma(\mathfrak{h}) := \oplus_{n=0}^{+\infty} \otimes_{\mathrm{s}}^h \mathfrak{h}$$

l'espace de Fock bosonique sur $\mathfrak{h}$. Les opérateurs de champ

$$\phi_{\mathrm{F}}(h) := \frac{1}{\sqrt{2}}(a^*(h) + a(h))$$

sont autoadjoints sur $\Gamma(\mathfrak{h})$ et on définit les opérateurs de Weyl

$$W_{\mathrm{F}}(h) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{F}}(h)}.$$

Prenons pour $\mathcal{C}$ l'*algèbre de Weyl* engendrée par les opérateurs de Weyl $W_{\mathrm{F}}(h)$. Pour $\beta > 0$ on définit un état sur $\mathcal{C}$ en posant

$$\omega(W(h)) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}(h, \frac{1+\mathrm{e}^{-\beta\epsilon}}{1-\mathrm{e}^{-\beta\epsilon}}h)}, \ h \in \mathfrak{h}.$$

(Il est facile de vérifier que $\omega$ est bien un état, par un argument analogue à celui du théorème de Bochner sur la caractérisation des transformées de Fourier des mesures positives).

Si on définit la dynamique $\tau_t$ sur $\mathcal{C}$ par $\tau_t W_{\mathrm{F}}(h) := W_{\mathrm{F}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\epsilon}h)$, alors l'état $\omega$ est $(\tau, \beta)-$KMS. Ce n'est pas un état de Gibbs sauf si $\mathrm{e}^{-\beta\epsilon}$ est un opérateur à trace sur $\mathfrak{h}$.

# 3 Mesures gaussiennes sur les espaces de distributions

## 3.1 Distributions sur le cylindre $S_\beta \times \mathbb{R}$

Soit $S_\beta = [-\beta/2, \beta/2[$ le cercle de longueur $\beta$. On note par $(t,x)$ les points du cylindre $S_\beta \times \mathbb{R}$. On note par $\mathcal{S}'_{\mathbb{R}}(S_\beta \times \mathbb{R})$ l'espace des distributions *réelles* tempérées sur $S_\beta \times \mathbb{R}$. Ce sont donc des distributions $\beta-$périodiques en $t$, à croissance modérée en $x$. L'espace dual des fonctions $C^\infty$ réelles sur $S_\beta \times \mathbb{R}$ $\beta-$périodiques en $t$, à décroissance rapide en $x$ sera noté $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(S_\beta \times \mathbb{R})$.

On notera aussi par $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de Schwartz sur $\mathbb{R}$ et pour la commodité des notations, par $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(S_\beta)$ l'espace des fonctions $C^\infty$ périodiques sur $S_\beta$.

On note $-\Delta$ l'opérateur $-\partial_t^2 = \partial_x^2$ sur $S_\beta \times \mathbb{R}$ avec conditions aux limites *périodiques* sur $S_\beta$.

On notera aussi par $\delta_k$, $k \in \mathbb{N}$ des approximations $C^\infty$ de la masse de Dirac on 0 sur $S_\beta$ ou sur $\mathbb{R}$.

## 3.2 Mesure gaussienne associée à une covariance

L'espace de configuration $\mathcal{S}'_{\mathbb{R}}(S_\beta \times \mathbb{R})$ sera noté par $Q$, et on note $\Sigma$ la $\sigma-$algèbre des boréliens de $Q$. Si $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(S_\beta \times \mathbb{R})$, on peut définir la *fonction coordonnée* $\phi(f)$ sur $Q$ par

$$\phi(f): \begin{array}{ccc} Q & \to & \mathbb{R} \\ q & \mapsto & \langle q, f\rangle \end{array}.$$

On peut définir la *mesure gaussienne* $\mathrm{d}\phi_C$ sur $(Q,\Sigma)$ de covariance $C := (-\Delta + m^2)^{-1}$ par

$$\int_Q \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(f)} \mathrm{d}\phi_C := \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(f, Cf)},$$

où $(.,.)$ désigne le produit scalaire sur $L^2(S_\beta \times \mathbb{R})$.

Il est facile de voir que les fonctions $\phi(f)$ appartiennent à $\bigcap_{1\le p<\infty} L^p(Q, \mathrm{d}\phi_C)$ pour $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(S_\beta \times \mathbb{R})$.

Par contre il n'est pas possible de définir les fonctions $\phi(t,x)$ pour $(t,x) \in S_\beta \times \mathbb{R}$, ie de donner un sens à $\phi(f)$ pour $f = \delta_{(t,x)}$. Ceci vient du fait que la mesure $\mathrm{d}\phi_C$ n'est pas supportée sur un espace de fonctions.

Par contre si $t \in S_\beta$ et $h \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, on montre facilement que la suite de fonctions

$$\phi(\delta_k(. - t) \otimes h)$$

converge dans $\bigcap_{1\le p<\infty} L^p(Q, \mathrm{d}\phi_C)$ vers une fonction qu'on notera $\phi(t,h)$:

$$\phi(t,h) := \lim_{k\to\infty} \phi(\delta_k(. - t) \otimes h).$$

On vérifie facilement que

$$\int_Q \phi(t_1,h_1)\phi(t_2,h_2)\mathrm{d}\phi_C = \Big(h_1, \frac{\mathrm{e}^{-|t_2-t_1|\epsilon} + \mathrm{e}^{-(\beta-|t_2-t_1|)\epsilon}}{2\epsilon(1-\mathrm{e}^{-\beta\epsilon})} h_2\Big)_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{3.1}$$

où

$$\epsilon := (D_x^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On peut donc considérer la famille de fonctions sur $Q$ $\{\phi(t,h)\}_{t\in S_\beta}$ comme définissant un processus aléatoire à valeurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et $\beta-$périodique. Ce processus est un processus gaussien de covariance:

$$C_0(t_1,h_1,t_2,h_2) := \Big(h_1, \frac{\mathrm{e}^{-|t_2-t_1|\epsilon}+\mathrm{e}^{-(\beta-|t_2-t_1|)\epsilon}}{2\epsilon(1-\mathrm{e}^{-\beta\epsilon})}h_2\Big)_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{3.2}$$

De même (en utilisant que la dimension d'espace est 1), on voit que si $x\in\mathbb{R}$, $g\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(S_\beta)$, la suite de fonctions $\phi(g\otimes\delta_k(.-x))$ converge dans $\bigcap_{1\leq p<\infty}L^p(Q,\mathrm{d}\phi_C)$ vers une fonction qu'on notera $\phi(g,x)$. L'identité analogue de (3.1) est:

$$\int_Q \phi(g_1,x_1)\phi(g_2,x_2)\mathrm{d}\phi_C = \Big(g_1, \frac{\mathrm{e}^{-|x_1-x_2|b}}{2b}g_2\Big)_{L^2(S_\beta)}, \tag{3.3}$$

où

$$b=(D_t^2+m^2)^{\frac{1}{2}},$$

$D_t^2$ étant défini avec des conditions aux limites périodiques sur $S_\beta$.

A nouveau la famille de fonctions sur $Q$ $\{\phi(g,x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ définit un processus aléatoire à valeurs dans $\mathcal{S}'_{\mathbb{R}}(S_\beta)$. C'est un processus gaussien de covariance:

$$C_\beta(g_1,x_1,g_2,x_2) := \Big(g_1, \frac{\mathrm{e}^{-|x_1-x_2|b}}{2b}g_2\Big)_{L^2(S_\beta)}. \tag{3.4}$$

# 4 L'approche euclidienne

Nous rappelons maintenant l'approche euclidienne qui permet à l'aide d'une mesure de probabilité sur $\mathcal{S}'_{\mathbb{R}}(S_\beta\times\mathbb{R})$ vérifiant une certaine propriété de positivité de construire à la fois *un champ quantique à température* $\beta^{-1}$ sur la droite $\mathbb{R}$ et *un champ quantique à température nulle* sur le cercle $S_\beta$. Des références pour cette section sont [GJ1], [K] pour le cas de la température nulle et [KL1] pour le cas de la température positive.

L'avantage de cette approche est qu'elle permet de construire en une seule fois *tous* les objets nécessaires, c'est à dire un espace de Hilbert, une dynamique unitaire, une représentation d'une certaine algèbre et un état invariant.

Supposons donnée une mesure de probabilité $\mathrm{d}\mu$ sur $(Q,\Sigma)$. Pour la construction d'une telle mesure, on utilise d'habitude le *théorème de Minlos*, qui caractérise de telles mesures en fonctions de leur transformation de Fourier:

en effet si $\mathrm{d}\mu$ est une mesure de probabilité sur $(Q,\Sigma)$, on peut définir sa *transformée de Fourier*:

$$E(f) := \int_Q \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(f)}\mathrm{d}\mu(\phi),\ f\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(S_\beta\times\mathbb{R}).$$

Elle vérifie clairement les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} &i)\ E(0)=1,\\ &ii)\ \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(S_\beta\times\mathbb{R})\ni f\mapsto E(f)\in\mathbb{C}\text{ est continue},\\ &iii)\ \textstyle\sum_{i,j=1}^n z_i\overline{z}_jE(f_i-f_j)\geq 0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ z_i\in\mathbb{C},\ f_i\in\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(S_\beta\times\mathbb{R}).\end{aligned} \tag{4.1}$$

Le théorème de Minlos affirme que toute fonction $E$ sur $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(S_\beta\times\mathbb{R})$ vérifiant (4.1) est la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité sur $(\mathcal{S}'_{\mathbb{R}}(S_\beta\times\mathbb{R}),\Sigma)$.

### 4.1 Le cas de la température nulle

Notons par $r_{\mathsf{C}} : Q \to Q$ la réflection autour de $x = 0$, i.e. $r_{\mathsf{C}}\phi(t,x) = \phi(t,-x)$, et par $a_x : Q \to Q$, $x \in \mathbb{R}$ le groupe des translations en espace sur $Q$.

Nous supposerons que la mesure $\mathrm{d}\mu$ est invariante par ces transformations ponctuelles. La réflection $r_{\mathsf{C}}$ induit donc une involution notée $R_{\mathsf{C}}$ agissant sur les fonctions sur $Q$ définie par $R_{\mathsf{C}}F(\phi) = F(r_{\mathsf{C}}\phi)$, où $F$ est une fonction sur $Q$. Comme $r_{\mathsf{C}}$ préserve la mesure, on voit que l'involution $R_{\mathsf{C}}$ est autoadjointe sur $L^2(Q,\Sigma,\mathrm{d}\mu)$. De même le groupe $a_x$ induit un groupe $U_{\mathsf{C}}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ agissant sur les fonctions sur $Q$, qui est un groupe unitaire fortement continu sur $L^2(Q,\Sigma,\mathrm{d}\mu)$.

Nous supposons que $\mathrm{d}\mu$ vérifie la propriété suivante, appelée *positivité d'Osterwalder-Schrader:*

$$\int_Q R_{\mathsf{C}}\overline{F}(\phi)F(\phi)\mathrm{d}\mu(\phi) \geq 0,$$

pour toute fonction mesurable bornée $F$, *supportée* sur le sous espace des distributions à support dans $S_\beta \times \mathbb{R}^+$.

Une autre manière d'écrire cette condition est d'introduire la sous $\sigma-$algèbre $\Sigma_{[0,+\infty[}$ de $\Sigma$ engendrée par les fonctions $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(f)}$ avec $\mathrm{supp}\, f \subset S_\beta \times [0,+\infty[$.

On peut alors considérer le sous espace de $L^2(Q,\Sigma,\mathrm{d}\mu)$ noté $L^2(Q,\Sigma_{[0,+\infty[},\mathrm{d}\mu)$ des fonctions $L^2$ mesurables par rapport à $\Sigma_{[0,+\infty[}$. La projection orthogonale d'une fonction $F$ sur $L^2(Q,\Sigma_{[0,+\infty[},\mathrm{d}\mu)$ se note $E_{[0,+\infty[}F$ et s'appelle *l'espérance conditionnelle* de $F$ par rapport à la $\sigma-$algèbre $\Sigma_{[0,+\infty[}$. La positivité d'Osterwalder-Schrader peut donc s'écrire:

$$\int_Q R_{\mathsf{C}}\overline{F}(\phi)F(\phi)\mathrm{d}\mu(\phi) \geq 0, \ \forall F \in L^2(Q,\Sigma_{[0,+\infty[},\mathrm{d}\mu),$$

où en d'autres termes l'opérateur $E_{[0,+\infty[}R_{\mathsf{C}}E_{[0,+\infty[}$ est un opérateur autoadjoint positif sur $L^2(Q,\Sigma,\mathrm{d}\mu)$. La forme sesquilinéaire

$$(F,G) := \int_Q R_{\mathsf{C}}\overline{F}(\phi)G(\phi)\mathrm{d}\mu(\phi)$$

est symétrique (car $R_{\mathsf{C}}$ autoadjoint) et positive (mais non définie) sur $L^2(Q,\Sigma_{[0,+\infty[},\mathrm{d}\mu)$.

On note $\mathcal{N}_{\mathsf{C}}$ le sous espace de $L^2(Q,\Sigma_{[0,+\infty[},\mathrm{d}\mu)$ des vecteurs avec $(F,F) = 0$.

On pose alors

$$\mathcal{H}_{\text{phys}} := \overline{L^2(Q,\Sigma_{[0,+\infty[},\mathrm{d}\mu)/\mathcal{N}},$$

complété de $L^2(Q,\Sigma_{[0,+\infty[},\mathrm{d}\mu)/\mathcal{N}$ pour la norme $(.,.)^{\frac{1}{2}}$, qui est l'espace de Hilbert de la théorie physique associée.

Soit $\nu_{\mathsf{C}} : L^2(Q,\Sigma_{[0,+\infty[},\mathrm{d}\mu) \to L^2(Q,\Sigma_{[0,+\infty[},\mathrm{d}\mu)/\mathcal{N}$ la projection canonique.

L'espace physique $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ contient un vecteur distingué:

$$\Omega := \nu_{\mathsf{C}}(1),$$

appelé le *vide physique*, où 1 est la fonction constante égale à 1 sur $Q$.

On remarque aussi que le groupe unitaire $U_{\mathsf{C}}(x)$ pour $x$ *positif* préserve $L^2(Q,\Sigma_{[0,+\infty[},\mathrm{d}\mu)$ ainsi que le sous espace $\mathcal{N}_{\mathsf{C}}$ des vecteurs de longueur nulle. On peut donc définir pour $F \in L^2(Q,\Sigma_{[0,+\infty[},\mathrm{d}\mu)$:

$$P_{\mathsf{C}}(x)\nu(F) := \nu(U_{\mathsf{C}}(x)F), \ t \geq 0.$$

Il est facile de voir que $\mathbb{R}^+ \ni x \mapsto P_{\mathtt{C}}(x)$ définit un *semigroupe de contractions symétriques*, fortement continu. En effet si $u = \nu(F)$, on obtient:

$$\|P_{\mathtt{C}}(x)u\| = (\int_Q RU_{\mathtt{C}}(x)\overline{F}U_{\mathtt{C}}(x)F\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (\int_Q R\overline{F}U_{\mathtt{C}}(2x)F\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{2}} \leq \|u\|^{\frac{1}{2}}\|P_{\mathtt{C}}(2x)u\|^{\frac{1}{2}},$$

ce qui entraine par récurrence sur $n$ que

$$\|P_{\mathtt{C}}(x)u\| \leq \|u\|^{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}}\|P_{\mathtt{C}}(2nx)u\|^{\frac{1}{2n}}.$$

Comme $\|P_{\mathtt{C}}(x)u\| \leq (\int_Q |F|^2\mathrm{d}\mu$, on obtient $\|P_{\mathtt{C}}(x)u\| \leq \|u\|$ en faisant $n \to +\infty$.

Il existe donc un unique opérateur autoadjoint, appelé le *hamiltonien physique* sur $\mathcal{H}$ tel que

$$P_{\mathtt{C}}(x) =: \mathrm{e}^{-xH}.$$

Finalement notons par $\mathcal{A}$ l'algèbre abélienne $L^\infty(Q, \Sigma_{\{0\},\mathtt{C}})$, où $\Sigma_{\{0\},\mathtt{C}}$ est la $\sigma-$algèbre engendrée par les fonctions $\phi(h, 0)$, $h \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(S_\beta)$.

Comme $R_{\mathtt{c}}$ préserve $\Sigma_{\{0\},\mathtt{C}}$, on voit facilement que l'opérateur de multiplication par $A$ dans $L^2(Q, \Sigma_{[0,+\infty[}, \mathrm{d}\mu)$ préserve $\mathcal{N}_{\mathtt{C}}$ et on peut donc définir

$$\pi(A)\nu(F) := \nu(AF),\ F \in F \in L^2(Q, \Sigma_{[0,+\infty[}, \mathrm{d}\mu),$$

qui définit une représentation de $L^\infty(Q, \Sigma_{\{0\},\mathtt{C}})$ sur $\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$.

### 4.2 Le champ libre à température nulle sur $S_\beta$

Nous avons introduit dans la section 3.2 la mesure gaussienne $\mathrm{d}\phi_C$ associée à la covariance $C = (-\Delta + m^2)^{-1}$. La théorie physique associée à cette mesure selon le procédé décrit ci dessus est la *théorie des champs libres* de masse $m$ à température 0 sur le cercle $S_\beta$. Dans ce cas l'opérateur $E_{[0,+\infty[}RE_{[0,+\infty[}$ est égal à l'espérance conditionnelle $E_{\{0\}}$ par rapport à la $\sigma-$algèbre $\Sigma_{\{0\},\mathtt{C}}$ et l'espace physique s'identifie naturellement à $L^2(Q, \Sigma_{\{0\},\mathtt{C}}, \mathrm{d}\phi_C)$.

On peut aussi identifier $L^2(Q, \Sigma_{\{0\},\mathtt{C}}, \mathrm{d}\phi_C)$ avec l'espace $L^2(\mathcal{S}'_{\mathbb{R}}(S_\beta), \mathrm{d}\phi_{C_\beta})$ pour la mesure gaussienne $\mathrm{d}\phi_{C_\beta}$ de covariance

$$C_\beta(g_1, g_2) = \frac{1}{2}(g_1, (-\partial_t^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}}g_2)_{L^2(S_\beta)}.$$

Une version plus concrète de l'espace physique est l'espace de Fock

$$\Gamma(H^{-\frac{1}{2}}(S_\beta)),$$

construit sur l'espace de Sobolev (complexe) $H^{-\frac{1}{2}}(S_\beta)$ muni de la norme

$$\|h\| := C_\beta(h, h).$$

Le vide physique $\Omega$ est alors le *vide de Fock* $\Omega_{\mathrm{F}}$ sur $\Gamma(H^{-\frac{1}{2}}(S_\beta))$. Le hamiltonien est

$$H_0 := \mathrm{d}\Gamma(b),$$

où on rappelle que $b = (-\partial_t^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$. La représentation de $L^\infty(Q, \Sigma_{\{0\},\mathtt{C}})$ associe simplement à la fonction $\Sigma_{\{0\},\mathtt{C}}$ mesurable sur $Q$ $\phi(g, 0)$ pour $g \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(S_\beta)$ l'opérateur de champ $\phi_{\mathrm{F}}(g)$ dans la représentation de Fock.

### 4.3 Le cas de la température positive

La construction d'une théorie des champs à température $\beta^{-1}$ se fait de manière similaire au cas à température nulle, en *échangeant* les roles des variables $t$ et $x$.

Soit maintenant $r : Q \to Q$ la réflection autour de $t = 0$ i.e. $r\phi(t,x) = \phi(-t,x)$ et $\tau_t$, $t \in S_\beta$ le groupe des translations en $t$ sur $Q$, qui est $\beta-$périodique, à cause de la périodicité en $t$ des éléments de $\mathcal{S}'_{\mathrm{I\!R}}(S_\beta \times \mathrm{I\!R})$. Nous supposons à nouveau que la mesure $\mathrm{d}\mu$ est invariante par ces deux transformations ponctuelles. On obtient donc comme auparavant une involution autoadjointe $R$ et un groupe unitaire fortement continu $U(t)$, $t \in S_\beta$, $\beta-$périodique, sur $L^2(Q, \Sigma, \mathrm{d}\mu)$.

Pour obtenir un espace physique, il faut à nouveau supposer la positivité d'Ostervalder-Schrader mais cette fois par rapport à la variable $t$: nous noterons par $\Sigma_{[0,\beta/2[}$ la $\sigma-$algèbre engendrée par les fonctions $\phi(t,h)$ pour $h \in \mathcal{S}_{\mathrm{I\!R}}(\mathrm{I\!R})$ et $t \in [0, \beta/2[$.

Comme plus haut nous notons par $\Sigma_{\{0\}}$ la $\sigma-$algèbre engendrée par les fonctions $\phi(0,h)$ pour $h \in \mathcal{S}_{\mathrm{I\!R}}(\mathrm{I\!R})$.

Nous supposons donc que la forme sesquilinéaire

$$(F,G) := \int_Q R\overline{F}G\mathrm{d}\mu$$

est positive sur $L^2(Q, \Sigma_{[0,\beta/2[}, \mathrm{d}\mu)$, où en d'autres termes que l'opérateur $E_{[0,\beta/2[}RE_{[0,\beta/2[}$ est positif, si $E_{[0,\beta/2[}$ désigne l'espérance conditionnelle par rapport à $\Sigma_{[0,\beta/2[}$.

Par le même procédé que plus haut, on obtient à partir de l'espace $L^2(Q, \Sigma_{[0,\beta/2[}, \mathrm{d}\mu)$ un espace physique $\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$, un vecteur distingué $\Omega$ et une représentation $\pi$ de l'algèbre abélienne $L^\infty(Q, \Sigma_{\{0\}}, \mathrm{d}\mu)$. On notera par $\mathcal{A}$ l'algèbre de von Neumann abélienne image de $L^\infty(Q, \Sigma_{\{0\}}, \mathrm{d}\mu)$ dans $B(\mathcal{H}_{\mathrm{phys}})$.

La construction du hamiltonien est plus délicate, ce qui reflète le fait que pour des systèmes KMS le Liouvillien qui décrit l'évolution temporelle n'est pas borné inférieurement.

Dans l'approche euclidienne ce problème se manifeste par le fait que les translations en temps $U(t)$ pour $t > 0$ ne *préservent pas* l'espace $L^2(Q, \Sigma_{[0,\beta/2[}, \mathrm{d}\mu)$: les distributions supportées dans $[0, \beta/2[\times\mathrm{I\!R}$ 'rentrent dans le passé' $[-\beta/2, 0[\times\mathrm{I\!R}$ par des translations en temps.

Klein et Landau ont montré comment contourner ce problème à l'aide de la jolie théorie des *semigroupes symétriques locaux*:

notons par $\Sigma_I$, pour $I$ un intervalle de $[-\beta/2, \beta/2[$ la $\sigma-$algèbre engendrée par les fonctions $\phi(s,h)$ pour $s \in I$ et $h \in \mathcal{S}_{\mathrm{I\!R}}(\mathrm{I\!R})$, et par $\mathcal{M}_t$ pour $0 \le t < \beta/2$ l'espace $L^2(Q, \Sigma_{[0,\beta/2-t[}, \mathrm{d}\mu)$. On voit que $U(s)$ envoie $\mathcal{M}_t$ dans $L^2(Q, \Sigma_{[0,\beta/2[}, \mathrm{d}\mu)$ si $0 \le s \le t$.

Si on pose alors

$$\mathcal{D}_t := \nu(\mathcal{M}_t),$$

on peut définir l'opérateur symétrique

$$P(t) : \mathcal{D}_t \ni \nu(F) \mapsto \nu(U(t)F) \in \mathcal{H}_{\mathrm{phys}}.$$

On vérifie que $P(t)$, défini sur le domaine $\mathcal{D}_t$ est symétrique, et vérifie la propriété de semigroupe $P(t)P(s) = P(t+s)$ sur $\mathcal{D}_{t+s}$. Aucun des domaines $\mathcal{D}_t$ pour $t > 0$ n'est dense dans $\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$, mais la réunion $\bigcup_{0<t<\beta/2} \mathcal{D}_t$ est dense dans $\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$.

Une telle structure est appelée un *semigroupe symétrique local*, et on sait par les travaux de Klein-Landau et Froehlich [KL2], [Fr1], qu'il existe un unique opérateur autoadjoint $L$ *non borné inférieurement*, appelé le *Liouvillien* tel que

$$P(t) = \mathrm{e}^{-tL} \text{ sur } \mathcal{D}_t.$$

On note que le vecteur distingué $\Omega$ est dans le domaine de $L$ et vérifie $L\Omega = 0$, car la fonction 1 sur $Q$ est invariante par les translations en temps.

On obtient finalement un système KMS à température $\beta^{-1}$, défini de la manière suivante:

*i)* l'algèbre $\mathcal{C}$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tL}\pi(A)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tL}$, pour $t \in \mathbb{R}$, $A \in L^\infty(Q, \Sigma_{\{0\}}, \mathrm{d}\mu)$,

*ii)* la dynamique est engendrée par le Liouvillien $L$:

$$\tau_t(B) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}tL} B \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tL},\ B \in \mathcal{C},$$

*iii)* l'état KMS est engendré par le vecteur distingué $\Omega$:

$$\omega(B) := (\Omega, B\Omega)_{\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}},\ B \in \mathcal{C}.$$

La vérification du fait que $\omega$ est un état $(\tau, \beta)-$KMS est un calcul assez long que nous ne donnerons pas ici (voir [KL1]) et qui repose sur le fait que le groupe $U(t)$ est $\beta-$périodique.

**Remark 4.1** *Notons encore une observation qui sera importante dans la suite: la représentation $\pi$ associe à tout élément $A$ de $L^\infty(Q, \Sigma_{\{0\}})$ un opérateur borné $\pi(A)$ sur $\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$. En raisonnant par limites fortes, on peut aussi associer à toute fonction $\Sigma_{\{0\}}-$mesurable réelle $V$ un opérateur autoadjoint sur $\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$, que l'on notera encore $V$. Un tel opérateur est dit* affilié *à l'algèbre abélienne $\mathcal{A}$, c'est à dire que les résolvantes $(V - z)^{-1}$ appartiennent à $\mathcal{A}$ pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.*

## 4.4 Le champ libre à température $\beta^{-1}$ sur $\mathbb{R}$

Comme dans la sous-section 4.2, nous décrivons maintenant la théorie libre à température $\beta^{-1}$ associée à la mesure gaussienne $\mathrm{d}\phi_C$. Elle décrit un *champ de bosons libres* de masse $m$ sur $\mathbb{R}$ à température $\beta^{-1}$.

L'opérateur $E_{[0,\beta/2[}RE_{[0,\beta/2[}$ est maintenant égal à la projection $E_{\{0,\beta/2\}}$ et l'espace physique s'identifie canoniquement à $L^2(Q, \Sigma_{\{0,\beta/2\}}, \mathrm{d}\phi_C)$. La version concrète de l'espace physique est maintenant l'*espace d'Araki-Woods*, que nous allons rapidement décrire:

soit $\mathfrak{h} := H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ l'espace de Sobolev (complexe) d'ordre $-\frac{1}{2}$ muni de la norme

$$\|h\|^2 = \frac{1}{2}(h, (D_x^2 + m^2)^{-\frac{1}{2}} h)_{L^2(\mathbb{R})}.$$

L'espace physique $\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$ s'identifie à $\Gamma(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h})$.

Le vecteur distingué noté $\Omega_0$ s'identifie au vecteur $\Omega_{\mathrm{F}}$ de $\Gamma(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h})$.

Le Liouvillien noté $L_0$ devient :

$$L_0 = \mathrm{d}\Gamma(\epsilon \oplus -\epsilon),$$

où $\epsilon = (D_x^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$.

La représentation de $L^\infty(Q, \Sigma_{\{0\}})$ associe à la fonction $\Sigma_{\{0\}}$ mesurable $\phi(0, h)$ pour $h \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ l'opérateur:

$$\phi_{\mathrm{AW}}(h) := \phi_{\mathrm{F}}((1 + \rho)^{\frac{1}{2}} h) \oplus \rho^{\frac{1}{2}} h),$$

où $\rho = (\mathrm{e}^{\beta\epsilon} + 1)^{-1}$. Cette représentation s'appelle la *représentation d'Araki-Woods*.

Finalement l'algèbre de von Neumann $\mathcal{C}$ engendrée par $\mathcal{A}$ et la dynamique $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tL}$ peut se décrire explicitement:

on peut étendre la représentation d'Araki-Woods à des $h \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ en posant:

$$\phi_{\mathrm{AW}}(h) := \phi_{\mathrm{F}}((1+\rho)^{\frac{1}{2}}h) \oplus \rho^{\frac{1}{2}}\overline{h}),$$

En utilisant le fait que

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tL}\phi_{\mathrm{AW}}(h)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tL} = \phi_{\mathrm{AW}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\epsilon}h),$$

on obtient facilement que $\mathcal{C}$ est l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs

$$W_{\mathrm{AW}}(h) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{AW}}(h)},\ h \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}).$$

# 5 Perturbations de théories libres

Nous avons vu dans les sections 4.2 et 4.4 comment décrire des théories libres à l'aide d'une mesure gaussienne sur $\mathcal{S}'_{\mathbb{R}}(S_\beta \times \mathbb{R})$. Les théories en interaction s'obtiennent formellement en perturbant la mesure libre $\mathrm{d}\phi_C$ par un prefacteur, c'est à dire en modifiant $\mathrm{d}\phi_C$ en

$$\mathrm{d}\mu = (\int_Q F\mathrm{d}\phi_C)^{-1}F\mathrm{d}\phi_C.$$

Pour une théorie décrivant une interaction polynomiale, le préfacteur $F$ est formellement donné par

$$F = \mathrm{e}^{-\int_{S_\beta\times\mathbb{R}} P(\phi(t,x))\mathrm{d}t\mathrm{d}x}, \tag{5.1}$$

$P$ étant un polynome réel borné inférieurement. Dans (5.1) l'expression $\phi(t,x)$ est considérée comme la 'fonction' sur $Q : \phi \mapsto \phi(t,x)$. Pour donner un sens rigoureux à cette expression, on rencontre deux problèmes: le *problème ultraviolet*, qui vient du fait que $\phi(t,x)$ n'a pas de sens, et le *problème de volume infini*, qui vient du fait que dans (5.1) figure l'intégrale sur $\mathbb{R}$ en $x$, qui n'a pas de sens non plus.

Pour les théories en une dimension d'espace, le problème ultraviolet se traite assez simplement en utilisant *l'ordre de Wick*, que nous allons maintenant expliquer.

## 5.1 Ordre de Wick

Soit $V$ un espace vectoriel réel, et $(Q,\Sigma)$ un espace mesurable. Soit $V \ni f \mapsto \phi(f)$ une application linéaire de $V$ dans les fonctions mesurables *réelles* sur $(Q,\Sigma)$. Si $C$ est une forme quadratique positive sur $V$, on définit l'ordre de Wick de $\phi(f)^n$, noté $:\phi(f)^n:_C$ par rapport à la *covariance* $C$ à l'aide d'une série génératrice:

$$:\mathrm{e}^{\alpha\phi(f)}:_C := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}:\phi(f)^n:_C = \mathrm{e}^{\alpha\phi(f)}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}C(f,f)}. \tag{5.2}$$

On a donc

$$:\phi(f)^n:_C = \sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{n!}{m!(n-2m!)}\phi(f)^{n-2m}\Big(-\frac{1}{2}C(f,f)\Big)^m, \tag{5.3}$$

où [.] désigne la partie entière.

Notons comme dans la section 3.1 par $\delta_k,\ k \in \mathbb{N}$ des approximations $C^\infty$ de la masse de Dirac on 0 sur $S_\beta$ ou sur $\mathbb{R}$.

**Proposition 5.1** *Soit $P$ $g \in L^1(S_\beta) \cap L^2(S_\beta)$, $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Les limites suivantes existent dans $\bigcap_{1\leq p<\infty} L^p(Q, \Sigma, \mathrm{d}\phi_C)$:*

$$i) \lim_{(k,k')\to\infty} \int_{S_\beta\times\mathbb{R}} f(t,x) :\phi(\delta_k(.-t) \otimes \delta_{k'}(.-x))^n:_C \mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

*Cette fonction sera notée $\int_{S_\beta\times\mathbb{R}} f(t,x) :\phi(t,x)^n:_C \mathrm{d}t\mathrm{d}x$.*

$$ii) \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x) :\phi(0, \delta_k(.-x))^n:_{C_0} \mathrm{d}x.$$

*Cette fonction sera notée $\int_{\mathbb{R}} h(x) :\phi(0,x)^n:_{C_0} \mathrm{d}x$.*

$$iii) \lim_{k'\to\infty} \int_{S_\beta} g(t) :\phi(\delta_k(.-t), 0)^n:_{C_\beta} \mathrm{d}t.$$

*Cette fonction sera notée par $\int_{S_\beta} g(t) :\phi(t,0)^n:_{C_\beta} \mathrm{d}t$.*

les covariances $C$, $C_0$, $C_\beta$ sont définies dans la section 3.2.

Posons maintenant:

$$(5.4) \qquad \begin{aligned} V_0(h) &:= \textstyle\int_{\mathbb{R}} h(x) :\phi(0,x)^n:_{C_0} \mathrm{d}x, \\ V_\beta(g) &:= \textstyle\int_{S_\beta} g(t) :\phi(t,0)^n:_{C_\beta} \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

considérées comme des fonctions dans $\bigcap_{1\leq p<\infty} L^p(Q, \Sigma, \mathrm{d}\phi_C)$. Les groupes $U_{\mathsf{C}}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ et $U(t)$, $t \in S_\beta$ sont des isométries fortement continues dans $L^p(Q, \Sigma, \mathrm{d}\phi_C)$, et on peut donc définir:

$$\int_{S_\beta} g(t)U(t)V_0(h)\mathrm{d}t \text{ et } \int_{\mathbb{R}} h(x)U_{\mathsf{C}}(x)V_\beta(g)\mathrm{d}x,$$

qui sont des fonctions dans $\bigcap_{1\leq p<\infty} L^p(Q, \Sigma, \mathrm{d}\phi_C)$. On peut montrer l'identité formellement évidente suivante:

$$(5.5) \qquad \int_{S_\beta} g(t)U(t)V_0(h)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} h(x)U_{\mathsf{C}}(x)V_\beta(g)\mathrm{d}x = \int_{S_\beta\times\mathbb{R}} f(t,x) :\phi(t,x)^n:_C \mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

## 5.2 Le modèle $P(\phi)_2$ à température nulle sur $S_\beta$

Soit $P$ un polynome réel borné inférieurement. On peut définir la fonction:

$$(5.6) \qquad V_{\mathsf{C}} = \int_{S_\beta} :P(\phi(t,0)):_{C_\beta} \mathrm{d}t,$$

obtenue comme dans la Prop. 5.1 pour $g = 1$. On sait que $V_{\mathsf{C}} \in \bigcap_{1\leq p<\infty} L^p(Q, \Sigma, \mathrm{d}\phi_C)$ et par des arguments classiques on montre que $\mathrm{e}^{-sV_{\mathsf{C}}} \in L^1(Q, \Sigma, \mathrm{d}\phi_C)$ pour tout $s > 0$. On remarque que $V_{\mathsf{C}}$ est réelle et $\Sigma_{\{0\},\mathsf{C}}$ mesurable. On peut donc lui associer un oprérateur autoadjoint sur l'espace physique $\Gamma(H^{-\frac{1}{2}}(S_\beta))$, que l'on notera encore

$$V_{\mathsf{C}} = \int_{S_\beta} :P(\phi(t,0)):_{C_\beta} \mathrm{d}t.$$

En utilisant l'inégalité de Jensen on obtient ensuite que:

$$\mathrm{e}^{-\int_0^x U_{\mathsf{C}}(y)V_l\mathrm{d}y} \in L^1(Q,\Sigma,\mathrm{d}\phi_C),$$

pour tous $x \geq 0$. Posons

$$\tilde{U}_{\mathsf{C}}(x) := \mathrm{e}^{-\int_0^x U_{\mathsf{C}}(y)V_l\mathrm{d}y} U_{\mathsf{C}}(x),\ x \in \mathbb{R}^+.$$

On voit que $\tilde{U}_{\mathsf{C}}(x)$ préserve $L^2(Q,\Sigma_{[0,+\infty[},\mathrm{d}\phi_C)$ pour $x \geq 0$ ainsi que l'espace $\mathcal{N}_{\mathsf{C}}$. On peut donc définir un semigroupe $\tilde{P}_{\mathsf{C}}(x)$, agissant sur $\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$ par:

$$\tilde{P}_{\mathsf{C}}(x)\nu_{\mathsf{C}}(F) := \nu_{\mathsf{C}}(\tilde{U}_{\mathsf{C}}(x)F),\ F \in L^2(Q,\Sigma_{[0,+\infty[},\mathrm{d}\phi_C).$$

On montre que c'est un *semigroupe symétrique d'opérateurs bornés*, et il existe donc un opérateur autoadjoint $H_{\mathsf{C}}$, borné inférieurement, agissant sur l'espace physique $\Gamma(H^{-\frac{1}{2}}(S_\beta))$ tel que

$$\tilde{P}_{\mathsf{C}}(x) = \mathrm{e}^{-xH_{\mathsf{C}}},\ x \geq 0.$$

On peut aussi montrer que $\mathrm{d}\Gamma(b) + V_{\mathsf{C}}$ est essentiellement autoadjoint, et que

$$H_{\mathsf{C}} = \overline{\mathrm{d}\Gamma(b) + V_{\mathsf{C}}},$$

$H_{\mathsf{C}}$ est donc le hamiltonien du modèle $P(\phi)_2$ sur le cercle $S_\beta$. On peut aussi montrer par un argument de Perron-Frobenius que $H_{\mathsf{C}}$ admet un *unique état fondamental*.

## 5.3 Le modèle $P(\phi)_2$ à température positive tronqué en espace

Soit $P$ un polynome réel borné inférieurement. Pour $l > 0$, on peut définir la fonction

$$V_l := \int_{-l}^{l} :P(\phi(0,x)):_{C_0} \mathrm{d}x, \tag{5.7}$$

obtenue comme dans la Prop. 5.1 pour $h = \mathbb{1}_{[-l,l]}$. Comme auparavant, on montre que $\mathrm{e}^{-sV_l} \in L^1(Q,\Sigma,\mathrm{d}\phi_C)$, pour tout $s > 0$. A nouveau à l'aide de l'inégalité de Jensen on obtient que:

$$\mathrm{e}^{-s\int_a^b U(t)V_l\mathrm{d}t} \in L^1(Q,\Sigma,\mathrm{d}\phi_C),\ s \geq 0$$

pour tous $a, b \in S_\beta$. On peut donc définir la mesure

$$\mathrm{d}\mu_l := (Z_l)^{-1}\mathrm{e}^{-\int_{S_\beta\times[-l,l]} :\phi(t,x)^n:_C \mathrm{d}t\mathrm{d}x}\mathrm{d}\phi_C,$$

où

$$Z_l = \int_Q \mathrm{e}^{-\int_{S_\beta\times[-l,l]} :\phi(t,x)^n:_C \mathrm{d}t\mathrm{d}x}\mathrm{d}\phi_C$$

est un facteur de normalisation et on a utilisé l'identité (5.5) qui entraine que

$$\int_{S_\beta\times[-l,l]} :\phi(t,x)^n:_C \mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} U(t)V_l\mathrm{d}t.$$

Cette mesure est absolument continue par rapport à la mesure gaussienne $\mathrm{d}\phi_C$. Il est facile de voir que $\mathrm{d}\mu_l$ est invariante par les translations en $t$ et vérifie la condition de positivité d'Osterwalder-Schrader.

On peut donc lui associer un système $\beta-$KMS qui décrit un champ quantique de masse $m$ à température $\beta^{-1}$ avec une interaction polynomiale tronquée dans $[-l, l]$. La description concrète de ce système est la suivante (cf [GeJ1], [KL1]):

*i)* l'espace de Hilbert physique est encore égal à $\Gamma(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h})$;

*ii)* l 'algèbre $\mathcal{C}$ est la même que l'algèbre libre engendrée par les $W_{\mathrm{AW}}(h)$, $h \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

*iii)* le Liouvillien perturbé noté $L_l$ est égal à:

$$L_l = L_0 + V_l - JV_lJ, \tag{5.8}$$

où $L_0 = \mathrm{d}\Gamma(\epsilon \oplus -\epsilon)$, $V_l$ est l'opérateur autoadjoint affilié à $\mathcal{A}$ qui est associé à la fonction $\Sigma_{\{0\}}-$mesurable $V_l$ définie en (5.7), et $J$ est la *conjugaison modulaire* définie par:

$$J := \Gamma(j),$$

où:

$$j : \begin{array}{l} \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} \to \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} \\ h_1 \oplus h_2 \mapsto \overline{h_2} \oplus \overline{h_1}, \end{array}$$

est une involution antiunitaire. Le sens de l'équation (5.8) n'est pas évident et doit en fait être précisé, car le membre de droite est la somme de trois opérateurs autoadjoints non bornés inférieurement. On montre tout d'abord en utilisant des arguments de [KL1] que

$$L_0 + V_l \text{ est essentiellement autoadjoint sur } \mathcal{D}(L_0) \cap \mathcal{D}(V_l),$$

et on pose donc:

$$H_l := \overline{L_0 + V_l}.$$

On montre ensuite (voir [GeJ1]) que $H_l - JV_lJ$ est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{D}(H_l) \cap \mathcal{D}(JV_lJ)$, et le sens de (5.8) est donc

$$L_l = \overline{\overline{L_0 + V_l} - JV_lJ}.$$

On notera par $\tau_t^l$ la dynamique sur $\mathcal{C}$ engendrée par $L_l$. Il suit aussi de [KL1] que la dynamique $\tau_t$ sur $\mathcal{C}$ est aussi engendrée par $H_l$, c'est à dire:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tL_l} A \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tL_l} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_l} A \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_l}, \; t \in \mathbb{R}, \; A \in \mathcal{C}. \tag{5.9}$$

*iv)* le vecteur distingué $\Omega_l$ est égal à:

$$\Omega_l := \|\mathrm{e}^{-\beta/2V_l}\Omega_F\|^{-1}\mathrm{e}^{-\beta/2V_l}\Omega_F.$$

# 6 Le modèle $P(\phi)_2$ invariant par translation à température positive

## 6.1 La limite thermodynamique

Soit pour $l > 0$ $\tau^l, \omega_l$ la dynamique et l'état KMS pour le modèle $P(\phi)_2$ avec interaction tronquée dans $[-l, l]$. le modèle $P(\phi)_2$ invariant par translation se construit par le procédé habituel de *limite thermodynamique*, en montrant l'existence, sur une algèbre convenable d'observables, des limites de $\tau_l$ et $\omega_l$ quand $l \to +\infty$.

Le choix correct de l'algèbre des observables sur laquelle la limite thermodynamique existe est une *algèbre locale* (c'est aussi le cas pour la construction par Glimm et Jaffe [GJ1] du modèle $P(\phi)_2$ à température nulle). Elle est définie de la manière suivante: soit $U$ l'application $\mathbb{R}$ linéaire:

$$\begin{array}{llll} U\colon & H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}) & \to & H_{\mathbb{R}}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}) \oplus H_{\mathbb{R}}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}). \\ & h & \mapsto & (\mathrm{Re}h, \epsilon^{-1}\mathrm{Im}h) = (\varphi, \pi). \end{array}$$

On vérifie facilement que

$$U\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\epsilon} = T(t)U, \text{ où } T(t)(\varphi,\pi) = (\varphi_t, \partial_t\varphi_t), \tag{6.10}$$

et $\varphi_t$ est la solution de l'équation de Klein-Gordon

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2)\varphi_t = 0, \\ \varphi_{t=0} = \varphi, \quad \partial_t\varphi_{t=0} = -\epsilon^2\pi. \end{array} \right. \tag{6.11}$$

On note par $\mathfrak{h}_I$ pour $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert borné l'espace vectoriel réel des $h \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ tels que $\mathrm{supp}\, Uh \subset I$, et on appelle $\mathcal{B}_I$ l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $W_{\mathrm{AW}}(h)$, pour $h \in \mathfrak{h}_I$. Clairement $\mathcal{B}_I$ est inclus dans $\mathcal{C}$.

Rappelons que si $A = W_{\mathrm{AW}}(h)$, on a

$$\tau_t^0(A) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}tL_0} A \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tL_0} = W_{\mathrm{AW}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\epsilon}h),\ t \in \mathbb{R}.$$

En utilisant le principe de Huyghens pour l'équation de Klein-Gordon, on obtient que

$$\tau_t^0(\mathcal{B}_I) \subset \mathcal{B}_{I+[-t,t]},\ t \geq 0. \tag{6.12}$$

De même on montre que

$$\mathcal{B}_I \subset \mathcal{B}'_J \text{ si } I \cap J = \emptyset, \tag{6.13}$$

ou en d'autres termes les algèbres locales pour des régions disjointes de $\mathbb{R}$ commutent.

On pose alors:

$$\mathcal{B} := \overline{\bigcup_{I \subset \mathbb{R}} \mathcal{B}_I}^{(*)},$$

qui est la fermeture *en norme* de $\bigcup_{I\subset\mathbb{R}} \mathcal{B}_I$. Notons que cette algèbre est incluse dans les opérateurs bornés sur $\Gamma(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h})$, et donc les dynamiques $\tau_t^l$ et les états $\omega_l$ sont définis sur $\mathcal{B}$ (bien que $\mathcal{B}$ ne soit pas préservé par $\tau_t^l$). Par contre le groupe des *translations en espace* $\alpha_x$, défini par

$$\alpha_x(W_{\mathrm{AW}}(h)) := W_{\mathrm{AW}}(a_x h),\ x \in \mathbb{R}$$

est bien défini sur $\mathcal{B}$, où $a_x$ est le groupe des translations en espace sur $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

On obtient alors les théorèmes suivants, qui sont le résultat principal de [GeJ2]:

**Theorem 6.1 (existence de la dynamique limite)** *Pour tout $B \in \mathcal{B}$ la limite en norme*

$$\tau_t(B) := \lim_{l \to +\infty} \tau_t^l(B)$$

*existe et définit un groupe $\{\tau_t\}$ de $*-$automorphismes de $\mathcal{B}$.*

**Theorem 6.2 (existence de l'état limite)** *Pour tout $B \in \mathcal{B}$ la limite*

$$\omega_\beta(B) := \lim_{l\to\infty} \omega_l(B)$$

*existe. L'état $\omega_\beta$ a les propriétés suivantes:*

*i) $\omega_\beta$ est un état $(\tau,\beta)-$KMS sur $\mathcal{B}$,*

*ii)$\omega_\beta$ est invariant par les translations en espace:*

$$\omega_\beta(\alpha_x(B)) = \omega_\beta(B),\ \forall B \in \mathcal{B},\ x \in \mathbb{R}.$$

Mentionnons rapidement une autre propriété importante de $\omega_\beta$: l'état $\omega_\beta$ est *localement normal* par rapport à la représentation d'Araki-Woods: ceci signifie que si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert borné, il existe un opérateur à trace positif $\rho_I$ agissant sur $\Gamma(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h})$ tel que

$$\omega_\beta(B) = \mathrm{Tr}(\rho_I)^{-1}\mathrm{Tr}(\rho_I B),\ \forall B \in \mathcal{B}_I.$$

Ceci s'interprète physiquement en disant que l'état $\omega_\beta$ contient un nombre *fini* de particules dans tout volume fini.

# 7 Existence de la dynamique limite

La preuve de l'existence de la dynamique limite est assez facile et repose sur le *principe de Huygens*. Fixons en effet $I \subset \mathbb{R}$ et $T > 0$. On montre d'abord que

$$\tau_t^l(A) = \tau_t^{l'}(A),\ \forall\, |t| \le T,\ A \in \mathcal{B}_I,\ l, l' > |I| + T. \tag{7.1}$$

En effet il suit tout d'abord de (5.9) que:

$$\tau_t^l(A) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_l} A \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_l},\ t \in \mathbb{R},\ A \in \mathcal{C}.$$

De plus on sait que $H_l = \overline{L_0 + V_l}$, et donc par la formule de Trotter on a:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_l} = \text{s-}\lim_{n\to\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tL_0/n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tV_l/n})^n.$$

Si on note par $\tau_t^0$ la dynamique engendrée par $L_0$, et par $\gamma_t^l$ la dynamique engendrée par $V_l$, on a donc:

$$\tau_t^l(A) = \text{s-}\lim_{n\to\infty} (\tau_{t/n}^0 \circ \gamma_{t/n}^l)^n(A),\ t \in \mathbb{R}. \tag{7.2}$$

Pour $|t| \le T$, $A \in \mathcal{B}_I$, il suit de (6.12) que $\tau_t^0(A) \in \mathcal{B}_{I+[-T,T]}$. De plus $V_l$ est affilié à $\mathcal{B}_{[-l,l]}$. Fixons donc $l > |I| + T$. On en déduit alors facilement de (6.12) et (6.13) que dans (7.2), on peut remplacer $V_l$ par $V_{|I|+T}$, ce qui montre (7.1).

Il suit immédiatement de (7.1) que:

$$\lim_{l\to+\infty} \tau_t^l(A) \text{ existe pour } A \in \mathcal{B}_I,$$

et cette limite est une limite *en norme*. Cette propriété passe évidemment à la fermeture en norme $\mathcal{B}$ des algèbres locales $\mathcal{B}_I$.

# 8 Existence de l'état limite

La preuve de l'existence de l'état limite est plus délicate, et repose sur la construction d'une mesure euclidienne $\mathrm{d}\mu$ comme limite faible des mesures $\mathrm{d}\mu_l$ quand $l \to \infty$. Commencons par fixer quelques notations. Nous avons construit dans la section 5.2 le hamiltonien $H_{\mathtt{C}}$ du modèle $P(\phi)_2$ à température nulle sur le cercle $S_\beta$. Soit $E_{\mathtt{C}} := \inf \sigma(H_{\mathtt{C}})$, et

$$H_{\mathtt{C}}^{\mathrm{ren}} = H_{\mathtt{C}} - E_{\mathtt{C}},$$

de telle sorte que $H_{\mathtt{C}}^{\mathrm{ren}} \geq 0$.

Soit $f \in \mathcal{S}_{\mathrm{I\!R}}(S_\beta \times \mathrm{I\!R})$. Pour $x \in \mathrm{I\!R}$ la fonction $f_x$ définie par $f_x(t) = f(t,x)$ appartient évidemment à $\mathcal{S}_{\mathrm{I\!R}}(S_\beta)$. On peut donc définir l'opérateur $\phi_{\mathrm{F}}(f_x)$, qui est un opérateur autoadjoint agissant sur $\Gamma(H^{-\frac{1}{2}}(S_\beta))$.

C'est alors un exercice sur les équations de la chaleur abstraites de montrer l'existence d'une unique solution $U(b,a)$ de l'équation:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} U(b,a) = (-H_{\mathtt{C}}^{\mathrm{ren}} + \mathrm{i}\phi_{\mathrm{F}}(f_b))U(b,a), \; b \geq a, \; U(a,a) = 1\!\!1. \tag{8.3}$$

On montre aussi facilement que les limites fortes de $U(b,a)$ quand $a \to -\infty$ ou quand $b \to +\infty$ existent et on peut donc étendre $U(b,a)$ à $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$. On pose alors:

$$W_{[a,b]}(f) := U(b,a)^*.$$

Le résultat clé pour construire la mesure limite est le théorème suivant:

**Theorem 8.1** (i) *soit* $f \in C^\infty_{0\,\mathrm{I\!R}}(S_\beta \times \mathrm{I\!R})$. *Alors*

$$\lim_{l \to +\infty} \int_Q \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(f)} \mathrm{d}\mu_l = (\Omega_{\mathtt{C}}, W_{[-\infty,\infty]}(f)\Omega_{\mathtt{C}}),$$

*où* $\Omega_{\mathtt{C}}$ *est l'unique état fondamental de* $H_{\mathtt{C}}$.

(ii) *l'application*

$$\mathcal{S}_{\mathrm{I\!R}}(S_\beta \times \mathrm{I\!R}) \ni f \mapsto (\Omega_{\mathtt{C}}, W_{[-\infty,\infty]}(f)\Omega_{\mathtt{C}})$$

*est la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité* $\mathrm{d}\mu$ *sur* $(Q, \Sigma)$.

(iii) *la mesure* $\mathrm{d}\mu$ *est invariante par les translations en espace-temps* $\{a_x\}_{x \in \mathrm{I\!R}}$, $\{\tau_t\}_{t \in S_\beta}$, *par la réflection en temps* $r$ *et vérifie la positivité d'Osterwalder-Schrader.*

(iv) *les fonctions* $\phi(f)$ *appartiennent à* $\bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(Q, \Sigma, \mathrm{d}\mu)$ *pour* $f \in \mathcal{S}_{\mathrm{I\!R}}(S_\beta \times \mathrm{I\!R})$.

Par le théorème de reconstruction décrit dans la section 4.3, on obtient un espace de Hilbert physique $\mathcal{H}_{\mathrm{phys}}$, une algèbre $\mathcal{C} \subset B(\mathcal{H}_{\mathrm{phys}})$, une dynamique $\tau_t$ et un état $\omega$ sur $\mathcal{C}$ tel que $\omega$ est un état $(\tau, \beta)-$KMS.

**Démonstration.**

La preuve repose tout d'abord sur le fait que, en temps que fonctions sur $Q$, on a:

$$\phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(f_x, x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} U_{\mathtt{C}}(x)\phi(f_x, 0)\mathrm{d}x.$$

On approche d'abord l'intégrale ci-dessus par une somme de Riemann:

$$\prod_{i=1}^{n} U_{\mathtt{C}}(x_i)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x_{i+1}-x_i)\phi(f_{x_i},0)}.$$

On considère ensuite le préfacteur dans la mesure $\mathrm{d}\mu_l$

$$\mathrm{e}^{-\int_{S_\beta \times [-l,l]} :\phi(t,x)^n:_C \mathrm{d}t\mathrm{d}x}$$

dont on a vu qu'on pouvait l'écrire comme:

$$\mathrm{e}^{-\int_{-l}^{l} U_{\mathrm{C}}(x) V_{\mathrm{C}} \mathrm{d}x}.$$

On peut à nouveau remplacer l'intégrale par une somme de Riemann:

$$\prod_{i=1}^{n} U_{\mathrm{C}}(x_i) \mathrm{e}^{-(x_{i+1}-x_i)V_{\mathrm{C}}}.$$

En utilisant la construction du Hamiltonien $H_{\mathrm{C}}$ expliquée dans la section 5.2 et une formule de Trotter pour le propagateur $U(b,a)$ défini dans (8.3), on voit qu'on peut réinterpréter l'expression

$$Z_l^{-1} \int_Q \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(f)} \mathrm{e}^{-\int_{-l}^{l} U_{\mathrm{C}}(x) V_{\mathrm{C}} \mathrm{d}x} \mathrm{d}\phi_C$$

en fonction du propagateur $U(b,a)$. Ceci permet de justifier le point *i)* du théorème 8.1. Le point *ii)* se montre en utilisant le théorème de Minlos, le seul point non trivial étant la continuité de la transformée de Fourier, qui suit d'estimations abstraites sur la dépendance de $U(b,a)$ par rapport à $f$, de même que le point *iv)*. Le point *iii)* est facile, en particulier la positivité d'Osterwalder-Schrader est préservée par limites faibles (tant que la mesure limite reste une mesure borélienne).

Indiquons maintenant rapidement comment terminer la preuve du Théorème 6.2: la première étape est de montrer que les fonctions $\phi(t,h)$ pour $t \in S_\beta$ sont dans $\bigcap_{1 \le p < \infty} L^p(Q.\Sigma, \mathrm{d}\mu)$ (*existence des champs à temps fixé*). On peut alors montrer que pour $f_1, \cdots f_n \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ et $-\beta/2 \le s_1 \le \cdots \le s_n \le \beta/2$ on a

$$\lim_{l \to \infty} \int_Q \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(s_j,h_j)} \mathrm{d}\mu_l = \int_Q \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(s_j,h_j)} \mathrm{d}\mu.$$

Ceci s'interprète comme une convergence faible des états $\omega_l$ vers l'état limite $\omega$, mais en considérant uniquement des *temps imaginaires*. Le passage à la convergence pour des temps réels se justifie à l'aide du théorème de Vitali. Nous renvoyons à [GeJ2] pour plus de détails.

# References

[BR] O. Bratteli and D.W. Robinson: Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics Vol. I,II, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin(1981)

[Ar] H. Araki: Positive cone, Radon-Nikodym theorems, relative Hamiltonian and the Gibbs condition in statistical mechanics. An application of Tomita-Takesaki theory, in *$C^*$-algebras and their applications to Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, D. Kastler Ed., North Holland (1976).

[Fr1] J. Fröhlich: Unbounded, symmetric semigroups on a separable Hilbert space are essentially selfadjoint. Adv. in Appl. Math. 1 (1980) 237–256.

[Fr2] J. Fröhlich: The reconstruction of quantum fields from Euclidean Green's functions at arbitrary temperatures, Helv. Phys. Acta 48 (1975) 355–363.

[GeJ1] C. Gérard, C. Jäkel: Thermal quantum fields with spatially cut-off interactions in 1+1 space-time dimensions, à paraitre dans Journal of Funct. Anal. 2004.

[GeJ2] C. Gérard, C. Jäkel: Thermal Quantum Fields without Cut-offs in 1+1 Space-time Dimensions, preprint 2003.

[GV] I.M. Gelfand, N.J. Vilenkin: *Generalized functions. Vol. 4: Applications of harmonic analysis*, Academic Press (1964).

[GJ1] J. Glimm, A. Jaffe: *Quantum Physics, A functional integral point of view*, Springer (1987).

[GJ2] J. Glimm, A. Jaffe: The $\lambda\varphi_2^4$ quantum field theory without cutoffs. II. The field operators and the approximate vacuum, Ann. of Math. 91 (1970) 362–401.

[HK] R. Høegh-Krohn: Relativistic quantum statistical mechanics in two-dimensional space-time, Comm. Math. Phys. 38 (1974) 195–224.

[K] A. Klein: The semigroup characterization of Osterwalder-Schrader path spaces and the construction of Euclidean fields, J. Funct. Anal. 27 (1978) 277–291.

[KL1] A. Klein, L. Landau: Stochastic processes associated with KMS states, J. Funct. Anal. 42 (1981) 368–428.

[KL2] A. Klein, L. Landau: Construction of a unique selfadjoint generator for a symmetric local semigroup,

[L] M. Le Bellac: *Thermal Field Theory*, Cambridge Univ Press (2000).

[Si] B. Simon: *The $P(\varphi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton University Press (1974).

[TW] M. Takesaki, M. Winnink: Local normality in quantum statistical mechanics, Comm. Math. Phys. 30 (1973) 129–152.

[U] H. Umezawa: *Advanced Field Theory: Micro, Macro, And Thermal Physics* Springer (1993).