SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2004-2005

Gilles Lebeau

Le Bismutien

Séminaire É. D. P. (2004-2005), Exposé n^o I, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2004-2005____A1_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

LE BISMUTIEN

GILLES LEBEAU

Résumé. Dans une série de travaux récents, Jean-Michel Bismut a construit un "laplacien hypoelliptique" agissant sur les formes différentielles sur le fibré cotangent $\Sigma = T^*X$ d'une variété riemannienne X. Dans cet exposé, nous présentons quelques propriétés analytiques de ce nouvel opérateur et explicitons le fait qu'il définit une déformation du laplacien de Hodge sur X.

Table des matières

Date: 7 juin 2005.

1. Introduction

Le but de cet exposé est de présenter la construction et quelques propriétés analytiques du laplacien hypoelliptique que J-M. Bismut a introduit dans [Bis04c], [Bis04b], [Bis04a], [Bis05]. Ce nouvel opérateur agit sur les formes différentielles sur le fibré cotangent $\Sigma = T^*X$ d'une variété riemannienne X et est une version cinétique du laplacien de Hodge sur X. D'un point de vue analytique, il est une généralisation au cas de métriques non plates des équations de Fokker-Planck de la théorie cinétique. Le laplacien hypoelliptique apparait donc comme une équation de Kolmogorov généralisée et est de ce fait structurellement hypoelliptique. Il existe de nombreux travaux récents consacrés aux équations de Fokker-Planck, à la fois du point de vue probabiliste et edpiste (voir par exemple [HN03], [HN04], [HSS04] [DV01] et leurs références). L'introduction d'une métrique non plate modifie toutefois sensiblement les aspects analytiques de l'étude des équations de Fokker-Planck. Dans la section 2, nous rappelons la construction de J-M. Bismut (voir [Bis04a]) ; pour éviter les surcharges de notations inutiles pour cet exposé, nous n'introduirons pas de fibré plat auxiliaire. Dans la section 3 nous présentons des estimations hypoelliptiques simples, ainsi qu'un résultat concernant l'asymptotique en temps petit du noyau de la chaleur associé au laplacien de Bismut. Enfin, dans la section 4 nous décrivons le théorème de convergence de la résolvante du laplacien hypoelliptique vers la résolvante du laplacien de Hodge. Ce dernier résultat est un des ingrédients de l'étude dans ce cadre des métriques de Ray-Singer qui paraîtra dans [BL05].

Nous terminons cette brève introduction par des rappels de notations de géométrie riemannienne. Soit (X, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, TX et T^*X les fibrés tangent et cotangent à X. Nous noterons (x, p) les points de T^*X, π la projection de T^*X sur X, g l'isomorphisme de TX sur T^*X défini par la métrique, $(.|.)$ le produit scalaire sur TX ou T^*X et $< ., . >$ la dualité entre T^*X et TX .
Si $(x_1, ..., x_n)$ est un système de coordonnées locales défini sur un ouvert U de X, on notera $(x_1, ..., x_n; p_1, ..., p_n)$ les coordonnées sur $T^*X|_U$ telles que $p_j =< p, \frac{\partial}{\partial x_j} >$.
Pour $u = \Sigma u^j \frac{\partial}{\partial x_j} \in T_xX$ on a

$$|u|^2 = (u|u) = \Sigma g_{i,j}(x)u^i u^j$$

et le carré de la longueur du covecteur $p = \Sigma p_j dx^j \in T^*_xX$ au point x est

$$|p|^2 = (p|p) = \Sigma g^{i,j}(x)p_i p_j$$

où $(g^{i,j}) = g^{-1}$. Nous utiliserons les conventions d'Einstein relatives aux sommes sur les indices répétés.
Soit $T\Sigma$ le fibré tangent à l'espace cotangent $\Sigma = T^*X$. On a une décomposition canonique de $T\Sigma$

$$T\Sigma = T^H\Sigma \oplus T^V\Sigma \tag{1.1}$$

où l'espace tangent vertical $T^V\Sigma$ est l'espace tangent à la fibration $T^*X \to X$, donc est engendré par les champs de vecteurs

$$\hat{e}^j = \frac{\partial}{\partial p_j}$$

et où l'espace horizontal $T^H\Sigma$ est engendré par les champs de vecteurs

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \Gamma^\alpha_{\beta,i} p_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\beta}$$

où les coefficients $\Gamma^\alpha_{\beta,i}$ sont les symboles de Christoffel

$$\Gamma^\alpha_{\beta,i} = \frac{1}{2} g^{\alpha,\mu} [\frac{\partial g_{\mu,\beta}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{i,\mu}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_{i,\beta}}{\partial x_\mu}]$$

de sorte que la connection de Levi-Civita ∇^{LC} sur TX est

$$\nabla^{LC}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (\frac{\partial}{\partial x_j}) = \Gamma^k_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Si $u(x) = \Sigma u^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$ est une section du fibré tangent TX, alors $< p, u >= \Sigma u^j p_j$ est une fonction sur Σ, et on a l'identité

$$e_i(< p, u >) =< p, \nabla^{LC}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} u >$$

Les champs de vecteurs e_i sont tangents aux sous-variétés $|p|^2 = Cte$, et le champ hamiltonien de la fonction $|p|^2/2$ sur la variété symplectique Σ est égal à

$$H_{|p|^2/2} = g^{i,j} p_j e_i \in T^H\Sigma \tag{1.2}$$

Soit $\Gamma = \Sigma \Gamma_j dx^j$. Le tenseur de courbure de Riemann R est la 2-forme à valeurs $End(TX)$ définie par

$$R = R_{j,k} dx^j \wedge dx^k$$

$$R_{j,k} = \frac{\partial \Gamma_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_j}{\partial x_k} + [\Gamma_j, \Gamma_k]$$

Pour $u(x) = u^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, v(x) = v^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$, on a

$$R(u, v) = R_{j,k} u^j v^k = \nabla^{LC}_u \nabla^{LC}_v - \nabla^{LC}_v \nabla^{LC}_u - \nabla^{LC}_{[u,v]} \in End(TX)$$

et le tenseur de Riemann R vérifient les symétries

$$\begin{aligned} &R(u, v) = -R(v, u) \\ &(R(u, v)w|z) = -(w|R(u, v)z) \end{aligned} \tag{1.3}$$

la seconde identité étant conséquence de $(uv - vu - [u, v])(w|z) = 0$ et de $u(w|z) = (\nabla^{LC}_u w|z) + (w|\nabla^{LC}_u z)$. Le commutateur $[e_j, e_k] = e_j e_k - e_k e_j$ des champs de vecteurs e_j, e_k est le champ de vecteurs tangent vertical sur Σ donné par la formule

$$[e_j, e_k] = R^\alpha_{j,k,\beta}\ p_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\beta} \in T^V\Sigma$$

où $p_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\beta} \in End(T^*X)$ agit par $p_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\beta}(\Sigma p_j \hat{e}^j) = p_\alpha \hat{e}^\beta$, de sorte qu'on a

$$[e_j, e_k] = {}^t R_{j,k} \tag{1.4}$$

On munira $T\Sigma$ de la métrique riemannienne telle que la décomposition 1.1 soit orthogonale, les métriques sur $T^H\Sigma, T^V\Sigma$ étant les métriques canoniques définies par les isomorphismes $T^H_{x,p}\Sigma \simeq T_xX$ et $T^V_{x,p}\Sigma \simeq T^*_xX$. On notera ∇ la connection associée.

2. La construction du Bismutien

Dans cette section, nous rappelons la construction du laplacien hypoelliptique. Cet opérateur dépend d'un paramètre de déformation auxiliaire, qu'on notera $s \in]0,\infty[$. Ce paramètre est une constante de couplage qui mesure l'aspect aléatoire de la construction d'un point de vue probabiliste. La limite $s = 0$ correspond à un régime déterministe de quantification du flot géodésique sur X, et la limite $s = \infty$ à un régime de modélisation du mouvement Brownien sur X. Nous notons $\Lambda^p(Y)$ le fibré des p-formes différentielles sur la variété Y et $\Lambda^\cdot(Y) = \oplus_p \Lambda^p(Y)$. La construction du laplacien hypoelliptique sur T^*X est analogue à celle du laplacien de Hodge standard sur X, qui utilise comme ingrédients de base la différentielle de De Rham sur l'algèbre extérieure de X, et la forme bilinéaire symétrique canoniquement définie par la métrique sur le fibré des 1-formes $\Lambda^1(X)$. Elle en diffère toutefois fondamentalement par le choix de la forme bilinéaire sur le fibré des 1-formes $\Lambda^1(\Sigma)$ qui ne sera pas, comme dans le cas du laplacien de Hodge, une forme symétrique.
Soit σ la forme symplectique canonique sur $\Lambda^1(\Sigma) = T^*\Sigma$ (antisymétrique et duale de la forme symplectique sur $T\Sigma$) et π la projection de $T^*_{x,p}\Sigma$ sur T_xX (la restriction à l'espace tangent vertical à Σ en (x,p) d'une 1-forme sur Σ est une forme linéaire sur T^*_xX donc définit un vecteur tangent à X au point x). On définit la forme bilinéaire b_s sur $\Lambda^1(\Sigma)$ par

$$b_s(\omega,\omega') = \sigma(\omega,\omega') + \sqrt{s}(\pi(\omega)|\pi(\omega')) \tag{2.1}$$

soit en coordonnées locales

$$b_s(\omega,\omega') = \beta'^i\alpha_i - \alpha'_i\beta^i + \sqrt{s}g_{i,j}\beta^i\beta'^j$$

$$\omega = \alpha_i dx^i + \beta^i dp_i,\ \omega' = \alpha'_i dx^i + \beta'^i dp_i$$

et on munit l'algèbre extérieure $\Lambda^\cdot(\Sigma)$ de la forme bilinéaire $b^\cdot{}_s$ dont la restriction aux p-formes est la puissance extérieure p ième de b_s. On remarquera que b_s est intrinsèque, i.e ne dépend que de la métrique g. On remarquera aussi que b_s est non dégénérée et n'est ni symétrique ni antisymétrique.

Si A est un opérateur différentiel sur $\Lambda^\cdot(\Sigma)$, son adjoint (à droite) pour $b^\cdot{}_s$ est donc l'opérateur A^*_b caractérisé par

$$\int b^\cdot{}_s(A\omega,\omega')dxdp = \int b^\cdot{}_s(\omega, A^*_b\omega')dxdp$$

Soit d la différentielle de De Rham sur $\Lambda^\cdot(\Sigma)$. On a en particulier

$$d^*_b(\omega_x dx + \omega_p dp) = \frac{\partial\omega_x}{\partial p} - \frac{\partial\omega_p}{\partial x} - \sqrt{s}g_{i,j}\frac{\partial\omega_{p,j}}{\partial p_i}$$

$$(\Omega\wedge)^*_b(\omega_x dx + \omega_p dp) = \omega_p\Omega_x - \omega_x\Omega_p + \sqrt{s}g(\Omega_p,\omega_p)$$

Soit h une fonction sur Σ, et δ_h l'opérateur conjugué

$$\delta_h = e^{-h}de^h = d + dh\wedge$$

On a $(\delta_h)^*_b = e^h d^*_b e^{-h}$, et on notera D_h l'opérateur

$$D_h = \delta_h + (\delta_h)^*_b$$

de sorte qu'on a

$$D_h^2 = \delta_h(\delta_h)_b^* + (\delta_h)_b^*\delta_h$$

Définition 2.1. Le Bismutien est l'opérateur différentiel agissant sur $\Lambda^{\cdot}(\Sigma)$ défini par

$$\frac{\sqrt{s}}{2}D_h^2 = B_s \tag{2.2}$$

avec le choix $h = |p|^2/2 = g^{i,j}(x)p_ip_j$.

Remarque 2.2. Dans la définition du Bismutien, le choix de l'adjoint à droite pour définir d_b^* est anodin, on aurait tout aussi bien pu prendre l'adjoint à gauche : on passe d'un opérateur à l'autre par la symétrie $p \to -p$. Par contre, l'introduction du twist de Witten par e^h est fondamental. Le choix $h = |p|^2/2$ correspond au fait que l'opérateur va quantifier le flot géodésique sur la variété X ; on peut aussi étudier les variantes avec potentiel $h = |p|^2/2 + V(x)$ si on souhaite quantifier une autre dynamique, ce que nous ne ferons pas ici.

Bien que la définition 2.1 du Bismutien soit d'une simplicité biblique, le calcul de l'opérateur en coordonnées locales est assez laborieux. Pour expliciter l'opérateur, on introduit les formes différentielles sur Σ

$$\hat{e}_j = dp_j - \Gamma_{j,k}^{\alpha}\ p_\alpha\ dx^k$$
$$e^i = dx^i$$

On note $\triangle_p$ le laplacien en variable p associé à la métrique à coéfficients constants en p , $g^{-1}(x)$

$$\triangle_p = \Sigma g_{i,j}(x)\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j}$$

On note N_V l'opérateur de nombre sur l'algèbre extérieure $\Lambda^{\cdot}(\Sigma)$ qui compte le degré vertical i.e le degré en dp, i_Y la multiplication intérieure d'une forme par le champ Y, $\mathcal{L}_Y$ la dérivée de Lie dans la direction du champ Y, et H_f le champ hamiltonien de la fonction $f(x,p)$. Le lemme suivant est la formule de Weitzenbock pour le Bismutien. Elle est démontrée dans [Bis05]

Lemma 2.3. *On a*

$$B_s = \frac{s}{2}[-\triangle_p + |p|^2 + (2N_V - d) - \frac{1}{2} < R(e_i,e_j)e_k, e_l > e^i e^j i_{\hat{e}^k} i_{\hat{e}^l}] - \sqrt{s}\mathcal{L}_{H_{|p|^2/2}} \tag{2.3}$$

Il résulte de 2.3 que B_s est un opérateur differentiel du second ordre, partiellement elliptique en p, ne contenant que des dérivées du premier ordre en x. Comme les dérivées verticales ∂_{p_j} et les commutateurs $[\partial_{p_k}, \{|p|^2/2, .\}]$ engendrent l'espace tangent à Σ , le théorème de Hörmander implique que B_s est hypoelliptique, et que l'équation de la chaleur associée $\partial_t + B_s$ l'est également.

Le changement de variable $q = \sqrt{s}\ p$ permet de réécrire B_s sous la forme (noter que dans la formule suivante, on a effectué le changement de base sur l'algèbre extérieure $\hat{e}^j(q) = \sqrt{s}\hat{e}^j(p)$ qui transforme l'opérateur $i_{\hat{e}^k}(p)$ en $\sqrt{s}i_{\hat{e}^k}(q)$)

(2.4)

$$B_s = \frac{1}{2}[-s^2\triangle_q + |q|^2 + s(2N_V - d) - \frac{s^2}{2} < R(e_i,e_j)e_k, e_l > e^i e^j i_{\hat{e}^k} i_{\hat{e}^l}] - \mathcal{L}_{H_{|q|^2/2}}$$

En particulier, on s'attend à avoir les asymptotiques :

$$(A_s-\lambda)^{-1}\sim_{s\to 0}(1/2(-s^2\triangle_q+|q|^2)-\mathcal{L}_{H_{|q|^2/2}}-\lambda)^{-1} \tag{2.5}$$

$$\lim_{s\to\infty}(A_s-\lambda)^{-1}=\Pi_0(\Box_X/2-\lambda)^{-1}\Pi_0 \tag{2.6}$$

où Π_0 désigne le projecteur orthogonal L^2 sur le noyau $e^{-\frac{|p|^2}{2}}$ de l'oscillateur harmonique $-\triangle_p+|p|^2+(2N_V-d)$ et où $\Box_X=(d_X+d_X^*)^2$ désigne le laplacien de Hodge sur X.
Dans 2.5, l'asymptotique est à interpréter au sens semi-classique, avec s comme constante de Planck. Dans 2.6, la limite est au sens des opérateurs. L'étude de l'asymptotique $s\to+\infty$ est effectué dans [BL05]. Par contre, le régime $s\to 0$ reste à étudier.

3. Hypoellipticité et noyau de la chaleur

Dans cette partie, on donne quelques résultats analytiques sur le Bismutien, le paramètre de déformation s restant dans un compact fixe de $]0,\infty[$. Pour alléger les notations, on se limite au cas $s=1$. Soit h une fonction sur Σ, et $Z=H_h$ le champ hamiltonien de h. L'action de la dérivée de Lie $\mathcal{L}_{H_h}$ sur les 1-formes est donnée par la formule

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{H_h}(\alpha_j dx^j+\beta^j dp_j)=\alpha'_j dx^j+\beta'^j dp_j\\
&\alpha'_j=\{h,\alpha_j\}+\frac{\partial^2 h}{\partial x_j\partial p_k}\alpha_k-\frac{\partial^2 h}{\partial x_j\partial x_k}\beta^k\\
&\beta'^j=\{h,\beta^j\}+\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial p_k}\alpha_k-\frac{\partial^2 h}{\partial p_j\partial x_k}\beta^k
\end{aligned} \tag{3.1}$$

La matrice

$$\mathcal{N}_h=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial p} & -\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial x}\\ \frac{\partial^2 h}{\partial p\partial p} & -\frac{\partial^2 h}{\partial p\partial x}\end{pmatrix}$$

est anti-adjointe pour la structure symplectique. Avec le choix $h=|p|^2/2$ et notre choix de bases $e^i=dx^i,\hat{e}_j=dp_j-\Gamma^{\alpha}_{j,k}\ p_\alpha\ dx^k$, pour lequel e^i est homogène de degré 0 en p, et $\hat{e}_j$ homogène de degré 1, on obtient que $\mathcal{N}=\mathcal{N}_{|p|^2/2}$ possède l'homogénéitée suivante relative à p

$$\begin{aligned}
&\mathcal{N}(e^i)=\mathcal{N}^{i,\alpha}_{1,l}(x)p_\alpha e^l+\mathcal{N}^{i,l}_{2}(x)\hat{e}_l\\
&\mathcal{N}(\hat{e}_i)=\mathcal{N}^{\alpha,\beta}_{3,i,l}(x)p_\alpha p_\beta e^l+\mathcal{N}^{l,\alpha}_{4,i}(x)p_\alpha\hat{e}_l
\end{aligned} \tag{3.2}$$

La formule 3.2 indique qu'il est judicieux de choisir des poids sur l'algèbre extérieure pour que $\mathcal{N}$ apparaisse comme un opérateur de degré 1 en p. Soit ω une section de $\Lambda^{\cdot}(\Sigma)$. On écrit en coordonnées locales

$$\omega=\Sigma\omega_I^J e^I\hat{e}_J$$

où $\omega_I^J(x,p)$ sont des fonctions sur Σ. L'opérateur de nombre vertical N_V est donc

$$N_V(\Sigma\omega_I^J e^I\hat{e}_J)=\Sigma\omega_I^J\ |J|\ e^I\hat{e}_J$$

On définit alors les structures L^2 suivantes sur l'espace des sections de $\Lambda^{\cdot}(\Sigma)$

Définition 3.1. Soit $dxdp$ la forme volume canonique sur Σ, et $< p >$ la fonction sur Σ, $< p >= (1+|p|^2)^{1/2}$. Pour $\omega(x,p) = \Sigma_{0\leq j\leq n}\omega_j(x,p), N_V(\omega_j) = j\omega_j$ on définit la norme à poids

$$|\omega(x,p)|_w^2 = \Sigma|\omega_j|^2(x,p) < p >^{2j}$$

On définit alors les espaces L^2 et L^2_w de sections de $\Lambda^{\cdot}(\Sigma)$ associés aux normes

$$||\omega||^2 = \int |\omega|^2(x,p)\ dxdp < \infty \tag{3.3}$$

$$||\omega||_w^2 = \Sigma \int |\omega_j|_w^2(x,p)\ dxdp < \infty \tag{3.4}$$

Soit $M(x,p)$ une section de $End(\Lambda^{\cdot}(\Sigma))$, et $d \in \mathbb{R}$. On dira que $M(x,p)$ est un symbole de degré d (resp un w-symbole de degré d) si pour tout α, β, il existe $C_{\alpha,\beta}$ tel que

$$|\nabla^\alpha_{e_i}\nabla^\beta_{\hat{e}^j} M| \leq C_{\alpha,\beta} < p >^{d-|\beta|} \tag{3.5}$$

et respectivement dans le cas à poids

$$|\nabla^\alpha_{e_i}\nabla^\beta_{\hat{e}^j} M|_w \leq C_{\alpha,\beta} < p >^{d-|\beta|} \tag{3.6}$$

où $|M|_w$ est la norme de M relative à $|.|_w$.

Remarquer que de 3.2, 3.4, on obtient que l'opérateur $\mathcal{L}_{H_{|p|^2/2}}$ est de la forme, avec $N(x,p) \in End(\Lambda^{\cdot}(\Sigma))$

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{H_{|p|^2/2}} = \nabla_{\{|p|^2/2,.\}} + N \\ &|| < p >^{-1} N(\omega)||_w \leq C||\omega||_w \end{aligned} \tag{3.7}$$

Rappelons que la dérivée verticale ∂_{p_j} est donnée par

$$\partial_{p_j}(\Sigma\omega_I^J e^I \hat{e}_J) = \Sigma\partial_{p_j}(\omega_I^J)\ e^I\hat{e}_J \tag{3.8}$$

On définit l'oscillateur harmonique vertical $\mathcal{O}$ par la formule

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}(\Sigma\omega_I^J e^I \hat{e}_J) = \Sigma\mathcal{O}(\omega_I^J)\ e^I\hat{e}_J \\ &\mathcal{O} = \frac{1}{2}[-\triangle_p + |p|^2 + (2N_V - n)] \end{aligned} \tag{3.9}$$

Soit ρ l'application linéaire définie par la formule, où $N_V(\omega_j) = j\omega_j$,

$$\rho(\Sigma_{0\leq j\leq n}\omega_j(x,p)) = \Sigma_{0\leq j\leq n}\omega_j(x,p) < p >^j$$

On a $||\rho(\omega)|| = ||\omega||_w$ et l'opérateur conjugué

$$\rho^{-1}B_1\rho = B$$

est d'après 2.3 et 3.7 de la forme

$$\begin{aligned} &B = \mathcal{O} + \nabla_{\{|p|^2/2,.\}} + \mathcal{M} \\ &\mathcal{M} = \Sigma\partial_{p_j}M_0^j + \Sigma p_j M_1^j + M \end{aligned} \tag{3.10}$$

où les matrices $M^j_{0,1}(x,p), M(x,p)$ sont des symboles de degré 0. Nous travaillerons dans la suite de cette section avec l'opérateur conjugué $B = \rho^{-1}B_1\rho$ et plus généralement avec tout opérateur B de la forme 3.10 de sorte que nous n'utiliserons que la structure L^2 standart sur $\Lambda^{\cdot}(\Sigma)$. On trouvera dans [Leb05] des résultats généraux sur les opérateurs de la forme 3.10 (équations de Fokker Planck

Géométriques) dont la géométrie sous-jacente est particulièrement riche.

Pour l'analyse d'un opérateur de la forme 3.10, nous utiliserons toujours les règles suivantes pour évaluer le degré d'un opérateur

$$\begin{aligned} &\partial_{x_j} \text{ est d'ordre } 1 \\ &p_j,\ \partial_{p_j} \text{ sont d'ordre } 1/2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Cette règle est imposée par le fait que les constructions doivent être invariantes par changement de coordonnées locales $y = \varphi(x)$ sur X. Le changement de coordonnées induit sur Σ est de la forme $(y, q) = (\varphi(x), A(x)p)$, et les dérivées partielles se transforment sous la forme $\partial_x = \varphi'(x)\partial_y + A'A^{-1}(x)q\partial_q,\ \partial_p = {}^tA(x)\partial_q$. Si on souhaite que p et ∂_p aient le même poids, ce qui est naturel au vue de la présence de l'oscillateur harmonique dans 3.10, on observe que la convention de degré des opérateurs est nécessaire, ∂_x et $p\partial_p$ devant être de même degré. Par ailleurs, les propriétés spectrales du laplacien hypoelliptique confirment la pertinence de ce choix. Avec ces conventions d'ordre, on a

$$\begin{aligned} &\mathcal{O} \text{ est autoadjoint sur } L^2 \text{ et d'ordre } 1 \\ &\nabla_{\{|p|^2/2,.\}} = \Sigma g^{i,j} p_j \nabla_{e_i} \text{ est d'ordre } 3/2 \\ &\text{et de partie principale anti-adjointe sur } L^2 \\ &\nabla_{\{|p|^2/2,.\}} + \nabla^*_{\{|p|^2/2,.\}} \text{ et } \mathcal{M} \text{ sont d'ordre au plus } 1/2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Evidemment, dans le régime des p bornés, les estimations hypoelliptiques usuelles font de l'oscillateur $\mathcal{O}$ la partie principale de B. Il apparait toutefois que pour l'analyse globale sur Σ, mieux vaut considérer que la partie principale de B est la somme $\mathcal{O} + \nabla_{\{|p|^2/2,.\}}$, avec composante autoadjointe $\mathcal{O}$ de degré 1 et composante antiadjointe $\nabla_{\{|p|^2/2,.\}}$ de degré 3/2.

Soit $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ un paramètre spectral. On définit une chaîne d'espaces de Sobolev $\mathcal{H}^\sigma_\lambda$ de sections de $\Lambda^\cdot(\Sigma)$ par dualité et interpolation en posant $\mathcal{H}^0_\lambda = L^2$ et en choisissant comme collection d'opérateurs de degré 1

$$< p >^2 + |\alpha| + \frac{|\beta|}{< p >},\ \nabla_{e_i},\ < p > \nabla_{p_i} \tag{3.13}$$

On remarquera que 3.13 attribue à $Re(\lambda) = \alpha$ le degré 1 et à $Im(\lambda) = \beta$ le degré 3/2, ce qui est naturel d'après 3.12. On note $\mathcal{S}'$ l'espace des sections distributions tempérées de $\Lambda^\cdot(\Sigma)$. En suivant la preuve de Kohn du théorème de Hörmander, on obtient alors

Théorème 3.2. *Il existe $c_0 > 0$ tel que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, tout $\lambda \in \mathbb{C}, Re(\lambda) \leq -c_0$, et tout $u \in \mathcal{S}'$, $(B - \lambda)u \in \mathcal{H}^\sigma_\lambda$ implique $u \in \mathcal{H}^{\sigma+1/4}_\lambda$, et il existe une constante C_σ indépendante de λ telle que*

$$||u||_{\lambda,\sigma+1/4} \leq C_\sigma ||(B - \lambda)(u)||_{\lambda,\sigma} \tag{3.14}$$

Remarque 3.3. Dans l'estimation précédente, le gain de 1/4 de dérivées provient de la méthode de Kohn. Le gain réel, qui sera utilisé dans la preuve de la convergence vers la résolvante du laplacien de Hodge, est 2/3. L'estimation simple 3.14 est toutefois fort utile pour commencer l'étude des opérateurs de type Fokker Planck Géométrique. Par ailleurs, la chaîne d'espaces de Sobolev précédente n'est pas optimale : on peut en fait ajouter le terme $\triangle_p$ dans la collection 3.13 dès qu'on a vérifié que notre opérateur est maximalement hypoelliptique. Je remercie N. Lerner pour m'avoir indiqué dans ce cadre une stratégie de preuve de l'hypoellipticité maximale par estimation d'énergie. On obtient aussi ce résultat comme conséquence de l'asymptotique du noyau de la chaleur, i.e comme sous-produit de la singularité de la résolvante sur la diagonale.

Nous noterons $P(t, z, z')$, $z = (x, p)$, le noyau de la chaleur associé à B, i.e la fonction de Green de

$$(\partial_t + B)u = 0 \text{ dans } t > 0 \qquad u|_{t=0} = v \in L^2 \tag{3.15}$$

Une conséquence du théorème 3.2 est que $P(t, z, z')$ est C^∞ dans $t > 0$, et que toutes ses dérivées en t appartiennent à l'espace de Schwartz en z, z'. Les résultats qui suivent sont démontrés dans [Leb05]. Soit $H(z, \zeta)$ le hamiltonien sur $T^*\Sigma$

$$H(z, \zeta) = \frac{1}{2}(|\zeta^V|^2 - |p|^2) + (p|\zeta^H) \tag{3.16}$$

où ζ^V, ζ^H sont les composantes verticales et horizontales de ζ. Soit $\mathcal{L}$ l'action sur la trajectoire $s \in [0, t] \to x(s) \in X$

$$\mathcal{L} = \int_0^t \left(\frac{|a(s)|^2}{2} + \frac{|v(s)|^2}{2}\right) ds \tag{3.17}$$

où $a(s), v(s)$ désignent l'accélération et la vitesse. Soit $z_0 = (x_0, p_0) \in \Sigma$.

Définition 3.4. On définit la fonction de large déviation sur $\mathbb{R}_+^* \times \Sigma \times \Sigma$ par

$$\mathcal{D}(t, z, z_0) = min \int_0^t \mathcal{L}(x(s))\, ds \tag{3.18}$$

où le minimum est pris sur toutes les trajectoires $s \in [0, t] \to x(s)$ telles que

$$(x(0), g(v(0))) = z_0, \ (x(t), g(v(t))) = z$$

Théorème 3.5. *i) Pour tout $t > 0, z_0, z$, il existe une solution $s \in [0, t] \to z_{opt}(s)$ de l'équation différentielle*

$$-\frac{D}{Dt}\frac{Db}{Dt} + < b|R(v, .)v > + b = 0 \qquad v = \frac{dx}{dt}, \quad b = \frac{Dp}{Dt}, \quad p = g(v) \tag{3.19}$$

connectant z_0 à z telle que

$$\mathcal{D}(t, z, z_0) = \int_0^t \mathcal{L}(x_{opt}(s))\, ds \tag{3.20}$$

La fonction $t \to \mathcal{D}(t, z, z_0)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
ii)Soit t_0 petit. Il existe $0 < \delta_0 = \delta_1 \leq \delta_2$ tels que $\mathcal{D}(t, z, z_0)$ soit C^∞ et vérifie l'équation de Hamilton Jacobi

$$\partial_t \mathcal{D} + \frac{1}{2}((\partial_p \mathcal{D})^2 - |p|^2) + \{|p|^2/2, \mathcal{D}\} = 0 \tag{3.21}$$

dans le domaine

$$U_{t_0,\delta} = \{(t, z, z_0), t \in]0, t_0], dist(x, x_0) < \delta_0, |tp| < \delta_2, |tp_0| < \delta_1\} \tag{3.22}$$

avec $z=(x,p)$, et $z_0=(x_0,p_0)$. De plus , dans le domaine $U_{t_0,\delta}$, $z\to\mathcal{D}(t,z,z_0)$ a un unique minimum $\gamma(t,z_0)$ non dégénéré en $z=Z_*(t,z_0)$. On a

$$\gamma(t,z_0)=min\int_0^t \mathcal{L}(x(s))\ ds = \tag{3.23}$$
$$\frac{t}{2}|p_0|^2-\frac{t^3}{6}|p_0|^2+\mathcal{O}(t^3|p_0|^4+t^5|p_0|^2)$$

où le minimum est pris sur toutes les solutions $s\in[0,t]\to x(s)$ de 3.19 telles que $(x(0),g(v(0)))=z_0$ et avec données $(b_0,b_1=\frac{Db}{Dt})$ telles que $t^2|b_0|+t^3|b_1|\leq\delta_2$. En coordonnées géodesiques centrées en x_0, on a

$$Z_*(t,z_0)=exp(tH_{|p|^2/2})(z_0)+ \tag{3.24}$$
$$(-p_0t^3/6+\mathcal{O}(t^5|p_0|),-p_0t^2/2+\mathcal{O}(t^4|p_0|))$$

iii) Dans le système de coordonnées géodésiques centré en x_0, on a pour $(t,z,z_0)\in U_{t_0,\delta}$, avec $z=Z_*(t,z_0)+(tX,P)$, et $|(X,P)|$ petit
(3.25)
$$\mathcal{D}(t,z,z_0)=\gamma(t,z_0)+\frac{2}{t}(3X^2-3PX+P^2)+\mathcal{O}(t(1+|p_0|^2+(X,P)^2)(X,P)^2)$$

Remarque 3.6. Il est utile de développer l'analogie entre équations de Fokker Planck géométrique sur $\Sigma=T^*X$ et équations de Laplace, par exemple $-\frac{\triangle_X}{2}$, sur X. Pour l'équation de Laplace, l'action est

$$\int_0^t\frac{|v|^2}{2}\ ds$$

et la fonction de grande déviation $\mathcal{D}_X=\frac{d_X^2(x,x_0)}{2t}$, qui vérifie l'équation de Hamilton Jacobi

$$\partial_t\mathcal{D}_X+\frac{|\partial_x\mathcal{D}_X|^2}{2}=0,$$

est C^∞ au voisinage de x_0 avec minimum nul et non dégénéré en $x=x_0$. L'équation différentielle 3.19 est donc la généralisation de l'équation des géodésiques sur X, et $\mathcal{D}$ jouit de propriétés locales près de z_0 analogues à $\mathcal{D}_X$, à ceci près que son minimum est décalé quelque peu par l'effet du champ hamiltonien de la fonction $|p|^2/2$.

Pour décrire l'asymptotique du noyau de la chaleur $P(t,z,z_0)$ pour z près de z_0 et $t\to 0$, on travaille dans le système de coordonnées géodésiques centrées en x_0. Soit $Z_*(t,z_0)=(x_{z_0}(t),p_{z_0}(t))$. Introduisons les coordonnées renormalisées (y,q) centrées en z_0

$$z=(x,p)=(x_{z_0}(t)+ty,p_{z_0}(t)+q) \tag{3.26}$$

D'après 3.25, la fonction de large déviation $\mathcal{D}$ vérifie pour une constante $C>0$, pour (y,q) près de $(0,0)$ et pour $t>0$ petit

$$\mathcal{D}\geq\gamma(t,z_0)+\frac{C}{t}(y^2+q^2) \tag{3.27}$$

Dans ces coordonnées, notons $\mathcal{C}^d(\Lambda^\cdot(\Sigma))$ l'espace des fonctions C^∞ $f(t,y,q,z_0)$ à valeurs $f(t,y,q,z_0)\in End(\Lambda^\cdot(\Sigma))$, définies pour $(t,z_0)\in V_{t_0,\delta_1}$, $|(y,q)|\leq\delta$, avec

$t_0 > 0, \delta_1 > 0, \delta > 0$ petits et fixés, et $V_{t_0,\delta_1} = \{t \in [-t_0, t_0],\ |tp_0| \leq \delta_1\}$, et telles que pour tout l, α, β, γ, il existe C tel qu'on ait uniformément en (t, z_0, y, q)

$$|\partial_t^l \partial_{y,q}^\gamma \nabla_{e_i,z_0}^\alpha \nabla_{\hat{e}^j,z_0}^\beta f| \leq C < p_0 >^{d+l-|\beta|} \tag{3.28}$$

Par exemple, si $M(z_0)$ est un symbole de degré d alors

$$f(t, y, q, z_0) = M(x_{z_0}(t) + ty, p_{z_0}(t) + q)$$

appartient à $\mathcal{C}^d(\Lambda^\cdot(\Sigma))$, puisqu'on a

$$x_{z_0}(t) + ty \in \mathcal{C}^0, \quad p_{z_0}(t) + q \in \mathcal{C}^1 \tag{3.29}$$

Soit $\theta(y, q)$ une troncature à support dans $|(y, q)| \leq \delta$, égale à 1 près de $(0, 0)$. Soit $\phi(u)$, $u \in \mathbb{R}$, une troncature à support dans $|u| \leq \delta_1$, égale à 1 dans $|u| \leq \delta_1/2$. Le résultat suivant, démontré dans [Leb05], fournit le développement en temps petit du noyau de la chaleur. On remarquera que d'après 3.25, la diffusion hypoelliptique est anisotrope en variables x, p, ce qui est naturel pour une équation de type Kolmogorov.

Théorème 3.7. *Pour tout entier j, il existe*

$$c_j(t, y, q, z_0) \in \mathcal{C}^j(\Lambda^\cdot(\Sigma))$$

et pour tout N, un opérateur R_N de noyau $R_N(t, z, z_0)$ tels que

$$\begin{aligned} &P(t, z, z_0) = P_N(t, z, z_0) + R_N(t, z, z_0) \\ &P_N(t, z, z_0) = t^{-2n}\phi(t|p|)e^{-\mathcal{D}(t,z,z_0)}(\Sigma_{0\leq j\leq N} t^j c_j(t, y, q, z_0))\theta(y, q)\phi(t|p_0|) \end{aligned} \tag{3.30}$$

où la suite d'opérateurs R_N est telle que pour tout $\sigma > 0, M > 0$ il existe N et une constante C tels que pour $t \in]0, t_0]$ on ait

$$||R_N(u)||_\sigma \leq Ct^M\ ||u||_{-\sigma} \tag{3.31}$$

où $||u||_t$ est la norme dans l'espace de Sobolev $\mathcal{H}_0^t$.

4. Convergence vers le laplacien de Hodge

L'objet de cette section est de décrire la limite du laplacian hypoelliptique dans le régime $s \to \infty$. Les résultats qui suivent sont extraits de [BL05]. Après une transformation algébrique sur l'algèbre extérieure, on se ramène à travailler avec une famille d'opérateurs B_s de la forme

$$\begin{aligned} B_s &= s\mathcal{O} + \sqrt{s}\beta + M_2 \\ \mathcal{O} &= \frac{1}{2}[-\triangle_p + |p|^2 + (2N_V - n)] \\ \beta &= -\{|p|^2/2, .\} + \Sigma M_0^j \frac{\partial}{\partial p_j} \end{aligned} \tag{4.1}$$

où les M_k sont des polynômes en p of degré k. Pour satisfaire le lobby semiclassique, on introduit le petit paramètre h

$$h = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

de sorte qu'en notant Q_h l'opérateur

$$Q_h = \mathcal{O} + h\beta + h^2 M_2$$

on a

$$B_s = sQ_h$$

Soit Π_0 le projecteur orthogonal L^2 sur le noyau de l'oscillateur harmonique $\mathcal{O}$, et $\Pi_\perp = 1-\Pi_0$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ le paramètre spectral et $\nu = \lambda/s$. On travaille ici avec la chaîne d'espaces de Sobolev semiclassiques construits sur L^2 avec comme collection d'opérateurs de degré 1

$$< p >^2 + \frac{|\nu|}{< p >},\ h\nabla_{e_i},\ < p > \nabla_{p_i} \tag{4.2}$$

On note $||u||_{\nu,sc,\sigma}$ la norme correspondante, et $\mathcal{H}^\sigma$ l'espace de Hilbert associé (seule la norme dépend des paramètres ν, h). Pour tout σ, Π_0 envoie $\mathcal{H}^\sigma$ dans $\mathcal{H}^\sigma$, et il existe C_σ tel que

$$||\Pi_0(u)||_{\nu,sc,\sigma} \leq C_\sigma ||u||_{\nu,sc,\sigma} \tag{4.3}$$

Dans la decomposition de $L^2 = Ker(\mathcal{O}) \oplus Ker(\mathcal{O})^\perp$, on a

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{O} \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} M_{2,1} & M_{2,2} \\ M_{2,3} & M_{2,4} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

d'où

$$B_s = \begin{pmatrix} P_1 & \sqrt{s}P_2 \\ \sqrt{s}P_3 & sP_4 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

avec

$$\begin{aligned} P_1 &= M_{2,1} \\ P_2 &= \beta_2 + hM_{2,2} \\ P_3 &= \beta_3 + hM_{2,3} \\ P_4 &= \mathcal{O} + h\beta_4 + h^2 M_{2,4} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; On définit les opérateurs Θ, et T (pour Θ inversible) par

$$\begin{aligned} \Theta &= P_4 - \lambda/s \\ T &= P_1 - P_2\Theta^{-1}P_3 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Alors l'équation de résolvante

$$(\lambda - B_s)(u_0, u_\perp) = (v_0, v_\perp)$$

est formellement équivalente à

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda - T)^{-1} & -\frac{1}{\sqrt{s}}(\lambda - T)^{-1}P_2\Theta^{-1} \\ -\frac{1}{\sqrt{s}}\Theta^{-1}P_3(\lambda - T)^{-1} & -\frac{\Theta^{-1}}{s}[1 - P_3(\lambda - T)^{-1}P_2\Theta^{-1}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_\perp \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

et il ne reste qu'à analyser la formule précédente. Cette analyse se fait essentiellement en deux étapes : analyse de l'inverse de Θ, puis analyse de l'opérateur $(\lambda - T)^{-1}$.
L'analyse de Θ est trop technique pour être détaillée ici ; elle se fait par un calcul de paramétrix dans des espaces de symboles en x, ξ à valeurs opérateurs en p. La conséquence de cette analyse est que Θ^{-1} gagne $2/3$ de dérivées en x, et que de plus $\Pi_0\Theta^{-1}$ (resp $\Pi_0\Theta^{-1}\Pi_0$) gagne $5/6$ de dérivées en x (resp 1 dérivée en x), le gain supplémentaire de $1/6$ de dérivées en x (resp $1/3$) résultant d'un lemme de moyenne, comme de coutume en théorie cinétique. Par ailleurs, le travail sur la paramétrix permet d'obtenir une description précise de T, résumée dans le lemme suivant.

Soit $\delta = (\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, $\delta_0 \in \mathbb{R}, \delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, et $\mathcal{U}_\delta$ le domaine de $\mathbb{C}$

$$\mathcal{U}_\delta = \{\nu; Re(\nu) \leq \delta_0 + \delta_1 |Im(\nu)|^{\delta_2}\}$$

Un symbole $a(x, \xi, h, \nu)$ de degré d associé à un opérateur pseudodifférentiel dans la classe $\mathcal{E}^d_{\delta,h}$ est une fonction de (x, ξ), holomorphe en $\nu \in \mathcal{U}_\delta$, avec paramètre $h \in]0, h_0]$, à valeurs dans $End(\Lambda^\cdot(T^*X))$, telle que pour tout α, β, il existe $C_{\alpha,\beta}$ indépendant de h, ν et tel que

$$|\partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi a(x, \xi, h, \nu)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\nu| + |\xi|)^{d+1/3|\alpha|-2/3|\beta|} \tag{4.9}$$

En coordonnées locales et dans un choix de trivialisation des fibrés, on quantifie un symbole a en opérateur $A = Op(a)$ par la formule usuelle

$$A(x, hD_x, h, \nu)u(x) = (2\pi h)^{-n} \int e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} a(x, \xi, h, \nu)u(y)\ dyd\xi$$

On note $\mathcal{E}^d_{\delta,h,0}$ la classe d'opérateurs obtenue en remplacant les estimations 4.9 par

$$|\partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi a(x, \xi, h, \nu)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\nu| + |\xi|)^{d-|\beta|} \tag{4.10}$$

Lemma 4.1. *Il existe δ avec $\delta_0 > 0, \delta_2 = 1/6$, $A^0_{j,k}, C^0 \in \mathcal{E}^{-1}_{\delta,h,0}$ et $A^1_{j,k}, B^1_{k,.}, C^1 \in \mathcal{E}^{-1}_{\delta,h}$ tels que, avec $\nabla_j = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}$, on ait*

$$\begin{aligned} T &= T^0 + hT^1 \\ T^0 &= \Sigma_{j,k} \nabla^*_j A^0_{j,k} \nabla_k + M_{2,1}(x) + C^0 \\ T^1 &= \Sigma \nabla^*_j A^1_{j,k} \nabla_k + \Sigma(B^1_{k,\ell} \nabla_k + \nabla^*_k B^1_{k,r}) + C^1 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Les opérateurs $A^0_{j,k}$ ont un symbole principal scalaire $a_{j,k}(x, \xi, \nu)$, et on a

$$\Sigma a_{j,k}(x, \xi, \nu)\xi_j \xi_k - \nu = J^{-1}_0(|y|, \nu) \tag{4.12}$$

avec $y = \frac{\xi}{\sqrt{2}}$, $|y|^2 = g^{j,k}(x) y_j y_k$ et

$$J_0(y, \nu) = \int_0^1 (t_+)^{y^2-\nu-1}\ e^{(1-t)y^2}\ dt$$

Remarque 4.2. L'estimation $\delta_2 = 1/6$ n'est sûrement pas optimale, et provient d'une certaine paresse des auteurs dans la gestion des restes de la paramétrix de Θ. La fonction $J_0(y, \nu)$ est naturelle et correspond au calcul à métrique gelée en un point x_0. On remarquera que la formule 4.11 présente T comme un opérateur de type laplacien, mais où les coefficients de la métrique sont des opérateurs h-pseudodifférentiels de degré -1.

Le point clé est maitenant le résultat suivant, démontré par J.-M.Bismut

Théorème 4.3.

$$T^0|_{\xi=0,\nu=0} = \frac{1}{2}\square_X \tag{4.13}$$

Soit $Spec_X$ le spectre du demi-laplacien de Hodge $\frac{1}{2}\square_X$. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de convergence de la "résolvante" $(T - \lambda)^{-1}$ (attention au fait que T dépend de λ !) vers la résolvante $(\frac{1}{2}\square_X - \lambda)^{-1}$. Soit

$$\mathcal{V}_{\delta,s} = \{\lambda;\ Re(\lambda) \leq s\delta_0 + \delta_1\ s^{5/6}|Im(\lambda)|^{1/6}\}$$

$$
\begin{aligned}
&\Lambda = (1 + |\lambda| + \Box_X/2)^{1/2} \\
(4.14) \qquad &\Lambda_h = (1 + |\nu|^2 + h^2\Box_X/2)^{1/2} \\
&||u||_{(\sigma_1,\sigma_2)} = ||\Lambda^{\sigma_1}\Lambda_h^{\sigma_2} u||_{L^2}
\end{aligned}
$$

Pour $\lambda \in \mathcal{V}_{\delta,s}$, notons $\rho(\lambda)$ la fonction

$$
\begin{aligned}
&\rho(\lambda) = 1 + \frac{1}{|\lambda|} \quad si \quad Re(\lambda) < 0 \\
(4.15) \qquad &\rho(\lambda) = 1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1 + Re(\lambda)}{dist(\lambda, Spec_X)} \quad si \quad Re(\lambda) \geq 0
\end{aligned}
$$

La fonction $\rho(\lambda)$ est égale à $+\infty$ ssi $\lambda \in Spec_X$.

Théorème 4.4. *Soient δ_0, δ_1, h_0 petits.*
i) Il existe une constante C telle que pour tout $\lambda \in \mathcal{V}_{\delta,s} \backslash Spec_X$ et $h \in]0, h_0]$ vérifiant

$$
(4.16) \qquad h\rho(\lambda) \leq C
$$

la "résolvante" $(T - \lambda)^{-1}$ existe comme opérateur borné de $\mathcal{H}_X^{\sigma}$ dans $\mathcal{H}_X^{\sigma+1}$, pour tout σ. De plus pour tout (σ_1, σ_2), il existe $C_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ tel que pour tout $v \in \mathcal{H}_X^{\sigma_1+\sigma_2+1}$ et tout h, λ vérifiant 4.16 on ait

(4.17)

$$
||(T - \lambda)^{-1}(\frac{1}{2}\Box_X - \lambda)(v) - v||_{(\sigma_1,\sigma_2)} \leq C_{(\sigma_1,\sigma_2)} \frac{1}{\sqrt{s}} ||(\rho(\lambda) + (\Box_X)^{1/2})(v)||_{(\sigma_1,\sigma_2)}
$$

ii)Pour tout $r > 0$, il existe h_r, tel que la "résolvante" $(T - \lambda)^{-1}$ existe pour tout $h \in]0, h_r]$ et tout λ vérifiant

$$
(4.18) \qquad \lambda \in \mathcal{V}_{\delta,s}, \quad r(Re(\lambda) + 1) \leq |Im(\lambda)|
$$

De plus, il existe C_r et pour tout (σ_1, σ_2), il existe $C_{(\sigma_1,\sigma_2)}$ tel que pour tout $u \in \mathcal{H}_X^{\sigma_1+\sigma_2}$ et tout $h \in]0, h_r], \lambda$ vérifiant 4.18 on ait

$$
(4.19) \qquad ||(T - \lambda)^{-1}(u)||_{(\sigma_1+1,\sigma_2)} \leq C_{(\sigma_1,\sigma_2)}(s^{-1/2} + C_r(1 + |\lambda|)^{-1/2})||u||_{(\sigma_1,\sigma_2)}
$$

Le théorème précédent, les estimations sur Θ^{-1}, et l'identitée 4.11 permettent de conclure à la validité de la formule de convergence 2.6 pour $\lambda \notin Spec_X$.

Références

[Bis04a] J.-M. Bismut. Le Laplacien hypoelliptique. In *Séminaire : Équations aux Dérivées Partielles, 2003–2004*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, pages Exp. No. XXII, 15. École Polytech., Palaiseau, 2004.

[Bis04b] J.-M. Bismut. Le Laplacien hypoelliptique sur le fibré cotangent. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris Sér. I*, 338 :555–559, 2004.

[Bis04c] J.-M. Bismut. Une déformation de la théorie de Hodge sur le fibré cotangent. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I*, 338 :471–476, 2004.

[Bis05] J.-M. Bismut. The hypoelliptic Laplacian on the cotangent bundle. *To appear in J.A.M.S.*, 2005.

[BL05] J.-M. Bismut and G. Lebeau. The hypoelliptic Laplacian and Ray-Singer metrics. *to appear*, 2005.

[DV01] L. Desvillettes and C. Villani. On the trend to equilibrium in spatially inhomogeneous entropy dissipating systems : the linear Fokker Planck equation. *CPAM*, 54 :1–42, 2001.

[HN03] B. Helffer and F. Nier. Hypoellipticity and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians. *http ://name.math.univ-rennes1.fr/francis.nier*, 2003.

[HN04] F. Hérau and F. Nier. Isotropic hypoellipticity and trend to equilibrium for Fokker-Planck equations with high degree potential. *Arch. Ration. Mecha. Anal.*, 171(2) :151–218, 2004.

[HSS04] F. Hérau, J. Sjostrand, and C. Stolk. Semiclasical analysis for the Kramers-Fokker-Planck equation. *to appear*, 2004.

[Leb05] G. Lebeau. Geometric Fokker Planck equations. *Portugaliae Mathematica*, 62(4), 2005.

Département de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose 06108 Nice Cedex 02, France

E-mail address: `lebeau@math.unice.fr`