SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2004-2005

Isabelle Gallagher

**Résultats d'unicité pour le système de Navier-Stokes bidimensionnel**

*Séminaire É. D. P.* (2004-2005), Exposé n$^{o}$ XIV, 13 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2004-2005____A14_0>

# Résultats d'unicité pour le système de Navier-Stokes bidimensionnel

I. Gallagher *

## 1 Introduction

Considérons le système de Navier-Stokes en deux dimensions d'espace :

$$(NS) \qquad \begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta u &= -\nabla p \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \\ \operatorname{div} u &= 0 \\ u_{|t=0} &= u_0. \end{cases}$$

Dans ce système le champ $u$ représente la vitesse du fluide (supposé incompressible), et le scalaire $p$ est la pression.

Il est bien connu depuis les travaux de J. Leray [16] que ce système est globalement bien posé dès que la donnée initiale est dans l'espace d'énergie $L^2(\mathbb{R}^2)$. Dans cet exposé nous nous intéressons à des solutions d'énergie infinie pour ce système. Ce type de solution est naturel à plusieurs égards. Par exemple, en deux dimensions d'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$ est invariant par le changement d'échelle de l'équation, que l'on rappelle :

$$u(t,x) \mapsto \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad p(t,x) \mapsto \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \lambda > 0.$$

Il existe bien sûr des espaces fonctionnels invariants par le changement d'échelle $u_0 \mapsto \lambda u_0(\lambda \cdot)$ dans lesquels $L^2(\mathbb{R}^2)$ s'injecte strictement, par exemple les espaces de Besov $\dot{B}^{-1+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)$ pour $p \geq 2$. Dans ce type d'espace fonctionnel la théorie de Kato [14] permet de démontrer l'existence globale et l'unicité de solutions à données petites (dans le cas des espaces de Besov ce sont des résultats de M. Cannone et F. Planchon [6], et l'on doit à H. Koch et D. Tataru [15] le meilleur résultat de ce type, où la donnée initiale est prise dans $BMO^{-1}$). Si la donnée initiale n'est pas petite l'on doit restreindre la classe de données initiales à l'adhérence des fonctions régulières pour la norme $\dot{B}^{-1+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)$ ou encore $BMO^{-1}$, et la solution obtenue n'existe (et n'est unique) que sur un temps fini dépendant de la donnée initiale. La restriction à l'adhérence des fonctions régulières empêche ainsi par exemple de considérer des données initiales homogènes de degré $-1$ ; celles-ci conduisent à des solutions autosimilaires, dont l'existence n'est donc connue qu'à données petites.

*Université de Paris 7, Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 7012, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05 France

Discutons un instant de la démonstration de ce type de résultat : elle repose sur une méthode de point fixe sur la formulation intégrale de l'équation

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-t')\Delta}\mathbb{P}\mathrm{div}(u \otimes u)(t')\,dt' = e^{t\Delta}u_0 + B(u,u)(t),$$

où $\mathbb{P}$ est le projecteur de Leray sur les champs de vecteurs de divergence nulle. Il s'agit alors d'exhiber un espace de Banach $X$ sur lequel le terme non linéaire $B$ est bicontinu, et sur lequel la norme de $e^{t\Delta}u_0$ est petite. Les espaces de Kato définis par la norme

$$\|u\|_{X_{p,T}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{0\leq t\leq T} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{2}{p})}\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad p \in [1,\infty] \setminus \{2\},$$

vérifient d'une part que

$$\forall\, 0 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1, \quad \frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2} + \frac{1}{r}, \quad \|B(u,v)\|_{X_{r,T}} \leq C\|u\|_{X_{p,T}}\|v\|_{X_{q,T}}$$

et d'autre part

$$\|e^{t\Delta}u_0\|_{X_{p,T}} \leq C\|u_0\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{p}}_{p,\infty}} .$$

Si $u_0$ est assez petit dans $\dot{B}^{-1+\frac{2}{p}}_{p,\infty}$ on obtient donc une solution unique et globale. Sinon en choisissant $u_0$ dans l'adhérence des fonctions régulières pour la norme $\dot{B}^{-1+\frac{2}{p}}_{p,\infty}$, on peut rendre $\|e^{t\Delta}u_0\|_{X_{p,T}}$ arbitrairement petit pourvu que $T$ soit suffisamment petit.

Dans ce texte nous nous intéresserons à la formulation tourbillon du système de Navier-Stokes bidimensionnel : en deux dimensions d'espace, le tourbillon $\omega = \mathrm{rot}\, u$ vérifie l'équation de transport-diffusion suivante

$$\partial_t\omega + u \cdot \nabla\omega - \Delta\omega = 0, \tag{1.1}$$

où l'on retrouve $u$ à partir de $\omega$ par la loi de Biot et Savart

$$u = \nabla^\perp(E * \omega)$$

où $E(x) = \dfrac{1}{2\pi}\log|x|$. L'invariance d'échelle du système de Navier-Stokes devient pour le tourbillon

$$\omega(t,x) \mapsto \lambda^2\omega(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \lambda > 0.$$

Ainsi un espace naturel de résolution de l'équation du tourbillon est l'espace $L^1(\mathbb{R}^2)$. Notons qu'à un tourbillon dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ ne correspond pas forcément un champ de vitesses dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, mais seulement a priori dans l'espace de Lorentz $L^{2,\infty}(\mathbb{R}^2)$. On peut remarquer par exemple que si le champ de vitesse associé à $\omega \in L^1(\mathbb{R}^2)$ est dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, alors $\omega$ doit être de moyenne nulle. La moyenne du tourbillon étant une quantité conservée par l'équation, il suffit de choisir $\omega_{|t=0}$ de moyenne non nulle pour que le champ de vitesses associé à la solution $\omega$ ne soit dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ à aucun instant. Ce cadre correspond donc à des solutions d'énergie infinie.

La théorie de Kato permet de démontrer l'existence locale de solutions à l'équation du tourbillon (1.1) dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ (voir [5] par exemple). L'espace de point fixe est $K_{p,T}$ défini par la norme

$$\|\omega\|_{K_{p,T}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{0\le t\le T} t^{1-\frac{1}{p}}\|\omega(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad \frac{4}{3} \le p \le +\infty.$$

La norme $L^1$ étant une quantité conservée par l'équation du tourbillon, on peut alors étendre cette solution globalement en temps.

Dans cet exposé on s'intéresse au problème de Cauchy pour l'équation du tourbillon dans l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, l'espace des mesures réelles finies de $\mathbb{R}^2$. Si $\mu$ est un élément de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, alors sa variation totale est définie par

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^2} \phi\, d\mu \;/\; \phi \in C_0(\mathbb{R}^2) \text{ et } \|\phi\|_{L^\infty} \le 1\right\},$$

où $C_0(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}^2$, nulles à l'infini. L'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ muni de cette norme est un espace de Banach, et sa norme est invariante par le changement d'échelle de l'équation du tourbillon. Notons en outre qu'une autre topologie utile sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ est la convergence faible-$*$ définie ainsi : une suite $\{\mu_n\}$ de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ converge faiblement vers $\mu$ si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \phi\, d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^2} \phi\, d\mu$ quand $n \to \infty$ pour tout $\phi \in C_0(\mathbb{R}^2)$. On note $\mu_n \rightharpoonup \mu$.

G.-H. Cottet [8] et Y. Giga, T. Miyakawa et H. Osada [13] ont obtenu l'existence globale pour des données $\omega_0$ dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$. Pour obtenir l'unicité des solutions, la méthode de point fixe rappellée ci-dessus ne fonctionne que pour une mesure initiale petite ([8]), ou encore si la partie atomique de la mesure initiale est petite ([13]). Ce dernier résultat est dû à l'estimation clef suivante (voir [13]) :

$$\limsup_{t\to 0} \|e^{t\Delta}\mu\|_{K_{p,t}} \le C_p\|\mu_{\mathrm{pp}}\|, \quad 1 < p \le +\infty,$$

où $\|\mu_{\mathrm{pp}}\|$ dénote la variation totale de la partie atomique $\mu_{\mathrm{pp}}$ de $\mu$. Plus récemment, Th. Gallay et C. E. Wayne [12] sont parvenus à démontrer l'unicité de la solution dans le cas où la donnée initiale est une (grande) masse de Dirac. La démarche suivie est complètement différente (elle repose sur des estimations d'entropie), et nous la présentons dans la Section 2 suivante. Notons que ce même résultat a été retrouvé dans [10] en utilisant des réarrangements symétriques, et cette autre preuve est également présentée dans la Section 2. Le résultat d'unicité de [12] est le suivant : il n'y a qu'une seule solution de (1.1) telle que $\omega(t,\cdot) \rightharpoonup \alpha\delta_0$ quand $t \to 0^+$, où $\delta_0$ est la masse de Dirac en zéro. Cette solution est donnée par

$$\omega(t,x) = \frac{\alpha}{t}G\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big), \quad u(t,x) = \frac{\alpha}{\sqrt{t}}v^G\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big) \tag{1.2}$$

avec

$$G(\xi) = \frac{1}{4\pi}e^{-|\xi|^2/4} \quad \text{et} \quad v^G(\xi) = \frac{1}{2\pi}\frac{\xi^\perp}{|\xi|^2}\Big(1 - e^{-|\xi|^2/4}\Big). \tag{1.3}$$

Cette solution est appellée le vortex d'Oseen de circulation totale $\alpha$. C'est en fait la solution de l'équation de la chaleur $\partial_t\omega = \Delta\omega$ avec donnée $\alpha\delta_0$ (le terme non linéaire disparaît du

fait de la symétrie radiale). Notons que les vortex d'Oseen ont pour propriété supplémentaire (voir [12]) d'attirer toutes les solutions de (1.1) en grand temps, quelle que soit la mesure initiale.
Dans [9] nous avons cherché à étendre le théorème d'existence et d'unicité pour une masse de Dirac au cas d'une mesure quelconque. Le théorème obtenu est le suivant.

**Théorème 1 ([9])** *Pour toute mesure initiale $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$, l'équation du tourbillon (1.1) possède une solution globale unique*

$$\omega \in C(]0,\infty[\,, L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$$

*telle que $\omega(t) \rightharpoonup \mu$ lorsque $t \to 0^+$. Cette solution dépend continûment de la mesure initiale $\mu$ pour la topologie forte, uniformément en temps sur les compacts. En outre,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega(t,x)\,dx = \alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \mu(\mathbb{R}^2) \quad \textit{pour tout } t > 0,$$

*et*

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-\frac{1}{p}} \Big\| \omega(t,x) - \frac{\alpha}{t}\, G\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big) \Big\|_{L^p_x} = 0, \quad \textit{pour tout } p \in [1,\infty]\,.$$

**Remarques.**
1). L'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ autorise des données initiales qui soient des distributions homogènes (les masses de Dirac en zéro), donc ce théorème présente une situation où le système de Navier-Stokes est globalement bien posé pour une grande donnée initiale dans un espace fonctionnel autorisant des solutions autosimilaires (les vortex d'Oseen).

2). En utilisant un argument de compacité de type Ascoli on peut démontrer la stabilité par convergence faible : si $\mu_n \rightharpoonup \mu$ alors $\omega_n(t) \rightharpoonup \omega(t)$ pour tout $t > 0$, où $\omega_n$ (resp. $\omega$) est la solution associée à $\mu_n$ (resp. $\mu$). En outre si $\mu_n$ est uniformément localisée, au sens où

$$\lim_{R\to\infty} \left( \sup_{n\in\mathbb{N}} |\mu_n| \left( \left\{ x \in \mathbb{R}^2,\ / \ |x| \geq R \right\} \right) \right) = 0,$$

alors la convergence de $\omega_n$ vers $\omega$ est forte dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ localement uniformément en temps.

Dans la suite de ce texte nous allons esquisser la preuve de ce théorème (en renvoyant à [9] pour les détails). La Section 2 suivante présente les deux preuves différentes mentionnées ci-dessus pour le cas particulier d'une donnée initiale masse de Dirac. Dans la Section 3 on trouvera le schéma de la preuve du Théorème 1.

## 2 Le cas d'une masse de Dirac

Nous présentons dans cette section deux démonstrations de l'unicité des solutions de l'équation du tourbillon pour une donnée initiale masse de Dirac. La première démonstration (paragraphe 2.2 ci-dessous) est extraite de l'article [12] de Th. Gallay et C. E. Wayne, alors que la seconde (paragraphe 2.3 ci-dessous) est due à [10] (la première preuve figure d'ailleurs aussi dans [10]). Avant de les présenter, nous allons rappeller dans le paragraphe suivant quelques résultats sur les équations de transport-diffusion qui nous seront utiles également dans la dernière partie, pour la démonstration du Théorème 1.

## 2.1 Représentation et estimations a priori

Soit $\omega \in C^0(]0,T[\,, L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ une solution de l'équation du tourbillon satisfaisant aux hypothèses du Théorème 1. On sait qu'alors $\omega$ est régulière dès que le temps est strictement positif, et que l'on peut supposer que $T = +\infty$. En outre on a $\|\omega(t)\|_{L^1} \le K$ pour tout $t > 0$, et donc le champ de vitesses associé vérifie $\|u\|_{X_{\infty,t}} \le CK$ pour tout $t > 0$. La solution $\omega$ de l'équation du tourbillon a une représentation intégrale de la forme suivante :

$$\omega(t,x) \;=\; \int \Gamma_u(t,x;s,y)\omega(s,y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > s > 0, \tag{2.1}$$

où $\Gamma_u$ est la solution fondamentale de l'équation de transport-diffusion $\partial_t\omega + u\cdot\nabla\omega = \Delta\omega$. Les propriétés suivantes sont dues à Osada [18] et à Carlen et Loss [7].

• Pour tout $\beta \in\, ]0,1[$ il existe $K_1 > 0$ (dépendant seulement de $K$ et de $\beta$) telle que

$$0 \;<\; \Gamma_u(t,x;s,y) \;\le\; \frac{K_1}{t-s}\,\exp\Big(-\beta\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\Big), \tag{2.2}$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ et tout $t > s > 0$.

• Il existe $\gamma \in\, ]0,1[$ (ne dépendant que de $K$) et, pour tout $\delta > 0$, il existe $K_2 > 0$ (dépendant seulement de $K$ et $\delta$) telle que

$$|\Gamma_u(t,x;s,y) - \Gamma_u(t',x';s',y')| \le K_2\Big(|x-x'|^\gamma + |t-t'|^{\gamma/2} + |y-y'|^\gamma + |s-s'|^{\gamma/2}\Big),$$

dès que $t - s \ge \delta$ et $t' - s' \ge \delta$.

• Pour $t > s > 0$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$,

$$\int \Gamma_u(t,x;s,y)\,dx \;=\; 1 \quad \text{et} \quad \int \Gamma_u(t,x;s,y)\,dy \;=\; 1. \tag{2.3}$$

On déduit de ces propriétés en particulier que $s \mapsto \Gamma_u(x,t;y,s)$ peut être prolongée continûment en $s = 0$ et que ce prolongement vérifie les mêmes propriétés. Par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et tout $t > 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \omega(t,x) \;&=\; \int \Gamma_u(t,x;0,y)\omega(s,y)\,dy \\ &\quad+ \int \Big(\Gamma_u(t,x;s,y) - \Gamma_u(t,x;0,y)\Big)\omega(s,y)\,dy\,, \quad 0 < s < t, \end{aligned}$$

et la seconde intégrale tend vers zéro avec $s$ ; en prenant la limite $s \to 0$ dans la première on trouve pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et tout $t > 0$

$$\omega(t,x) \;=\; \alpha\Gamma_u(t,x;0,0), \qquad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0. \tag{2.4}$$

En particulier on a $\omega \equiv 0$ si $\alpha = 0$, et dans la suite on supposera $\alpha > 0$. On notera aussi

$$\Omega(t,x) \;=\; \frac{\alpha}{4\pi t}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0.$$

D'après (2.2) et (2.4) on a

$$0 \; < \; \omega(t,x) \; \leq \; \frac{K_1 \alpha}{t}\, e^{-\beta \frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \tag{2.5}$$

et par (2.3),

$$\int \omega(t,x)dx \; = \; \alpha \; = \; \int \Omega(t,x)dx, \quad t > 0. \tag{2.6}$$

Enfin il est facile de voir que

$$\int |x|^2 \omega(t,x)dx \; = \; 4\alpha t \; = \; \int |x|^2 \Omega(t,x)dx, \quad t > 0. \tag{2.7}$$

## 2.2 Estimations d'entropie

Dans cette section nous allons obtenir le théorème d'unicité pour une donnée initiale masse de Dirac en utilisant des estimations d'entropie (voir [12] et [10]). Soit ainsi $f : \mathbb{R}^2 \to ]0, +\infty[$ une fonction $C^1$ d'intégrale 1. On définit

$$H(f) \; = \; \int f(\xi) \log\Big(\frac{f(\xi)}{G(\xi)}\Big) d\xi \quad \text{et} \quad I(f) \; = \; \int f(\xi) \Big| \nabla \log\Big(\frac{f(\xi)}{G(\xi)}\Big)\Big|^2 d\xi,$$

où $G$ est définie par (1.3). L'entropie $H(f)$ vérifie (voir par exemple [3])

$$\frac{1}{2} \|f - G\|_{L^1}^2 \; \leq \; H(f) \; \leq \; I(f).$$

En particulier on a $H(f) \geq 0$, et $H(f) = 0$ si et seulement si $f = G$.

Si $\omega$ est une solution de l'équation du tourbillon satisfaisant aux hypothèses du théorème définissons le tourbillon remis à l'échelle (parabolique) et le champ de vitesses associé

$$w(\tau, \xi) \; = \; e^{\tau} \omega(e^{\tau}, \xi\, e^{\frac{\tau}{2}}), \quad v(\tau, \xi) \; = \; e^{\frac{\tau}{2}} u(e^{\tau}, \xi\, e^{\frac{\tau}{2}}), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

avec les notations

$$\tau = \log t \quad \text{et} \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}. \tag{2.8}$$

On a alors

$$\partial_\tau w + (v \cdot \nabla_\xi) w \; = \; \Delta_\xi w + \frac{1}{2} (\xi \cdot \nabla_\xi) w + w,$$

où $v$ s'obtient de $w$ par la loi de Biot et Savart.
Considérons à présent $h(\tau) = H(w(\tau, \cdot)/\alpha)$. Alors par (2.5) il existe une constante $K_3 > 0$ telle que $0 \leq h(\tau) \leq K_3$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$. D'autre part on peut montrer (voir [12]) que

$$\frac{d}{d\tau} H\Big(\frac{w(\tau, \cdot)}{\alpha}\Big) \; = \; -I\Big(\frac{w(\tau, \cdot)}{\alpha}\Big), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

d'où l'on tire que $h'(\tau) \leq -h(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$. Finalement

$$h(\tau) \; \leq \; e^{-(\tau - \tau_0)} h(\tau_0) \; \leq \; K_3\, e^{-(\tau - \tau_0)} \quad \text{dès que } \tau \geq \tau_0,$$

et le résultat s'obtient en faisant tendre $\tau_0$ vers $-\infty$.

## 2.3 Réarrangements symétriques

Nous allons proposer ici une autre démonstration de l'unicité dans le cas d'un tourbillon initial masse de Dirac, qui repose sur des réarrangements symétriques décroissants (voir [10]). Nous rappellons les définitions et les propriétés principales de ces objets, et renvoyons à [2], [4], [17] par exemple pour des détails et des preuves.

Soit donc $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, nulle à l'infini. On lui associe sa fonction de distribution $\mu_f : [0, +\infty[ \to [0, +\infty]$ définie par

$$\mu_f(t) \;=\; \mathrm{mes}\left(\{x \in \mathbb{R}^d \,/\, |f(x)| > t\}\right), \quad t \geq 0,$$

et le réarrangement décroissant $f^* : [0, +\infty[ \to [0, +\infty]$ par

$$f^*(s) \;=\; \sup\{t \geq 0 \,/\, \mu_f(t) > s\}, \quad s \geq 0.$$

Enfin le réarrangement symétrique décroissant $f^\# : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ est défini par

$$f^\#(x) \;=\; f^*(c_d |x|^d), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

où $c_d = \pi^{d/2}/\Gamma(\frac{d}{2}+1)$. La fonction $f^\#$ est à symétrie radiale, décroissante le long des rayons. On a en outre $\|f^\#\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$ pour tout $p \in [1, \infty]$.
On peut introduire un ordre partiel sur les fonctions sommables de la manière suivante.

**Définition 1** *Soient $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ deux fonctions sommables. On dit que $f$ est dominée par $g$, et l'on note $f \preceq g$, si*

$$\int_{B_R} f^\#(x)dx \;\leq\; \int_{B_R} g^\#(x)dx \qquad \textit{pour tout } R > 0,$$

*où $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d \,,\, |x| < R\}$.*

Nous omettons la démonstration de la proposition classique suivante, qui est à la base de la démonstration de l'unicité (voir par exemple [10] pour une démonstration).

**Proposition 2** *Soient $f, g : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty[$ continues et sommables, telles que :*

*a) $f \preceq g$ ;*
*b) $g = g^\#$ ;*
*c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx$ ;*
*d) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |x|^d f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^d g(x)dx < \infty$.*

*Alors $f = g$.*

Supposons maintenant que $f : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation de transport-diffusion

$$\partial_t f + U \cdot \nabla f \;=\; \Delta f, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0,$$

où $U : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est un champ de vecteurs de divergence nulle, régulier, borné ainsi que toutes ses dérivées. On suppose en outre que la donnée initiale $f_0 = f(0, \cdot)$ est continue et à décroissance rapide. On peut montrer la proposition suivante, basée sur des résultats de [1], joints à une formule de Trotter.

**Proposition 3** *On a* $f(t) \preceq e^{t\Delta} f_0^{\#}$, *pour tout* $t \geq 0$.

Venons-en maintenant à l'unicité : il suffit en fait de mettre bout-à-bout les deux propositions précédentes. En effet si $\omega^{\#}(t,x)$ est le réarrangement symétrique décroissant (en $x$) de $\omega(t,x)$ alors par (2.5) et comme les réarrangements respectent l'ordre, on a

$$0 \,<\, \omega^{\#}(t,x) \,\leq\, K_1 \Omega(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0.$$

En outre on a $\omega^{\#}(t) \rightharpoonup \alpha\delta_0$ quand $t \to 0^+$.
Soit maintenant $t > s > 0$. La Proposition 3 appliquée à $d = 2$, $f(t',x) = \omega(t'+s,x)$, et $U(t',x) = u(t'+s,x)$ conduit à

$$\omega(t) \,\preceq\, e^{(t-s)\Delta}\omega^{\#}(s).$$

En prenant la limite $s \to 0^+$, on obtient

$$\omega(t) \,\preceq\, \Omega(t), \quad \text{pour tout } t > 0. \tag{2.9}$$

On fixe alors $t > 0$ et l'on applique la Proposition 2 avec $d = 2$, $f = \omega(t)$ et $g = \Omega(t)$. Par (2.6), (2.7) et (2.9) on en déduit que $\omega(t) = \Omega(t)$ pour tout $t > 0$ et le résultat est démontré.

# 3 Le cas général

Dans cette dernière partie nous allons présenter les grandes lignes de la démonstration du Théorème 1, et nous renvoyons à [9] pour les détails.

Dans ce théorème la seule affirmation nouvelle est l'unicité, et l'idée de la démonstration est la suivante : l'unicité dans le cas d'une donnée initiale de partie atomique petite est résolue depuis [13], par des techniques de type Gronwall, alors que le cas d'une grande masse de Dirac est résolu dans [12]. Il est naturel d'essayer de rassembler ces deux résultats, en découpant la mesure initiale $\mu$ en une somme finie de masses de Dirac, à un reste près dont la partie atomique est petite : étant donné $\varepsilon > 0$, il existe ainsi un entier $N \in \mathbf{N}$ et des points $z_1, .., z_N$ deux à deux distincts tels que la mesure initiale $\mu$ admette la décomposition

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \delta_{z_i} + \mu_0,$$

où $\alpha_i = \mu(\{z_i\}) \neq 0$ et $\|\mu_{0,\mathrm{pp}}\| \leq \varepsilon$. Evidemment on a en général $N \to \infty$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Dans la suite, $\varepsilon > 0$ est fixé, suffisamment petit.

Soit $\omega$ une solution de l'équation du tourbillon satisfaisant aux hypothèses du Théorème 1, on peut la décomposer de manière similaire :

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} \omega_i + \tilde{\omega}_0$$

où $\tilde{\omega}_0 \in C^0(]0,T[\,, L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2))$ est une solution de

$$\partial_t \tilde{\omega}_0 + u \cdot \nabla \tilde{\omega}_0 - \Delta \tilde{\omega}_0 = 0, \tag{3.1}$$

avec $\tilde\omega_0(t,\cdot) \rightharpoonup \mu_0$ lorsque $t \to 0^+$, et où

$$\partial_t \omega_i + u\cdot\nabla\omega_i - \Delta\omega_i = 0, \tag{3.2}$$

avec $\omega_i(t,\cdot) \rightharpoonup \alpha_i\delta_{z_i}$ lorsque $t \to 0^+$.

Comme $\|\mu_{0,\mathrm{pp}}\| \le \varepsilon$, on peut montrer comme dans [13] que, pour tout $p \in\, ]1,+\infty]$,

$$\limsup_{t\to 0^+} \|\tilde\omega_0\|_{K_{p,t}} \le C\varepsilon.$$

En outre l'argument de [13] peut être adapté pour montrer que ce tourbillon n'interagit pas, au moins en temps petit, avec des fonctions localisées en les $z_i$. Ainsi soit $\chi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, décroissante, vérifiant $\chi(0) = 1$ et $\chi(r) \to 0$ quand $r \to \infty$. Alors pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$, on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \|\tilde\omega_0(t,x)\chi(\tfrac{|x-z_i|^2}{t})\|_{K_{p,t}} = 0, \quad 1 \le p \le +\infty,\\
&\lim_{t\to 0} \|\tilde u_0(t,x)\chi(\tfrac{|x-z_i|^2}{t})\|_{X_{q,t}} = 0, \quad 2 < q \le +\infty.
\end{aligned}$$

D'autre part en adaptant la démarche de Th. Gallay et C. E. Wayne dans [12] on peut démontrer que $\omega_i$ est proche d'un tourbillon d'Oseen lorsque $t$ est suffisamment petit. En effet lorsque l'on soustrait de $\omega_i$ le tourbillon d'Oseen centré en $z_i$ en écrivant

$$\omega_i(t,x) = \frac{\alpha_i}{t} G\left(\frac{x-z_i}{\sqrt t}\right) + \alpha_i\tilde\omega_i(t,x),$$

on élimine totalement la contribution de la masse de Dirac $\alpha_i\delta_{z_i}$, car le reste $\tilde\omega_i$ se comporte comme une solution de l'équation du tourbillon dont la mesure initiale ne chargerait pas le point $z_i$ — encore faut-il vérifier que les termes de reste supplémentaires (dus au fait que le champ de vitesses de (3.2) est $u$ et non pas le champ de vitesse $u_i$ associé à $\omega_i$ par Biot-Savart) sont petits. Ainsi si l'on utilise à nouveau le changement de variables parabolique (2.8) et que l'on pose

$$w_i = \alpha_i G + \alpha_i \tilde w_i, \quad \text{avec} \quad \tilde\omega_i(t,x) = \frac{1}{t}\tilde w_i\Big(\log(t), \frac{x-z_i}{\sqrt t}\Big),$$

alors les méthodes de [12] permettent de montrer le résultat suivant : pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$ et tout $m > 1$, $\tilde w_i(\tau) \to 0$ dans l'espace $L^2(m)$ quand $\tau \to -\infty$, où

$$L^q(m) = \Big\{ w \in L^q(\mathbb{R}^2) \;/\; \|w\|_{L^q(m)} < \infty \Big\}, \quad \text{avec} \quad \|w\|_{L^q(m)} = \|(1+|\xi|^2)^{\frac m2} w\|_{L^q}.$$

Finalement on peut donc décomposer toute solution de l'équation du tourbillon de la manière suivante :

$$\omega(t,x) = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{t} G\Big(\frac{x-z_i}{\sqrt t}\Big) + \tilde\omega(t,x), \quad u(t,x) = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{\sqrt t} v^G\Big(\frac{x-z_i}{\sqrt t}\Big) + \tilde u(t,x),$$

où

$$\tilde\omega(t,x) = \tilde\omega_0(t,x) + \sum_{i=1}^N \alpha_i\tilde\omega_i(t,x), \quad \text{et} \quad \tilde u(t,x) = \tilde u_0(t,x) + \sum_{i=1}^N \alpha_i \tilde u_i(t,x),$$

et où, pour $i \in \{0, \ldots, N\}$, le champ $\tilde{u}_i$ est le champ de vitesses associé à $\tilde{\omega}_i$ via la loi de Biot et Savart. Remarquons que tout l'intérêt de cette décomposition est que si l'on décompose deux solutions de cette manière, les termes "grands" (qui traditionnellement seraient un obstacle à l'unicité par une méthode de type Gronwall) sont les mêmes pour les deux solutions. Seuls les restes diffèrent, et ceux-ci sont petits pour un temps petit — l'unicité étant une affaire de temps court, cela suffira pour démontrer le théorème.

La fin de la démonstration consiste donc à écrire les équations vérifiées par les restes $\tilde{\omega}_i$, pour $i = 0, .., N$, puis par les différences entre deux restes associés à deux solutions différentes, et à leur appliquer un argument de Gronwall. Nous n'écrirons pas tous les détails ici, car il reste quelques obstacles techniques. En effet les difficultés restantes sont de deux types : d'abord l'équation pour le reste $\tilde{\omega}$ contient des termes de transport et de réaction dus aux tourbillons d'Oseen (termes linéaires mais grands), qu'il faut savoir contrôler. D'autre part, les estimations de tous les termes intervenant dans l'équation doivent être indépendantes de $N$, puisqu'en général $N$ tend vers l'infini quand $\varepsilon$ tend vers zéro. Cela est rendu possible par les estimations d'Osada et Carlen-Loss rappellées dans le paragraphe 2.1 : les constantes intervenant dans les inégalités ne dépendent que de la norme des mesures initiales, elles-mêmes contrôlées par la norme de $\mu$ (indépendante de $N$ bien sûr). Nous allons simplement écrire les équations intégrales satisfaites par le reste $\tilde{\omega}$ d'une solution $\omega$ (celles sur la différence de deux solutions sont du même type), en distingant la partie "diffuse" $\tilde{\omega}_0$ du reste $\tilde{\omega}_i$ pour $i \in \{1, \cdots, N\}$, et énoncer quelques résultats répondant aux difficultés évoquées ici.
Les équations sont les suivantes : pour la partie "diffuse", l'équation (3.1) devient

$$\tilde{\omega}_0(t) \;=\; S_N(t,0)\mu_0 - \int_0^t S_N(t,s)\nabla\cdot(\tilde{u}(s)\tilde{\omega}_0(s))\,ds, \tag{3.3}$$

où $S_N$ est l'opérateur d'évolution associé à l'équation de transport-diffusion par le champ

$$U(t,x) = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{\sqrt{t}}\, v^G\Big(\frac{x-z_i}{\sqrt{t}}\Big).$$

D'autre part pour $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $-\infty < \tau < \log(T)$, en écrivant l'équation (3.2) en variables paraboliques et en y retranchant l'équation (linéaire) satisfaite par $\alpha_i G$ il vient pour $\tilde{w}_i$ l'équation intégrale suivante :

$$\tilde{w}_i(\tau) \;=\; -\int_{-\infty}^{\tau} T_{\alpha_i}(\tau-\tau')\nabla\cdot\Big(\alpha_i\tilde{v}_i(\tau')\tilde{w}_i(\tau') + R_i(\tau')(G+\tilde{w}_i(\tau'))\Big)\,d\tau', \tag{3.4}$$

où $T_{\alpha_i}$ est le propagateur associé à l'équation

$$\frac{\partial\tilde{w}_i}{\partial\tau} + \alpha_i(v^G\cdot\nabla\tilde{w}_i + \tilde{v}_i\cdot\nabla G) \;=\; \Delta_\xi\tilde{w}_i + \frac{1}{2}\xi\cdot\nabla_\xi\tilde{w}_i + \tilde{w}_i.$$

Le trme $R_i$ quant à lui est défini par

$$R_i(\tau,\xi) \;=\; \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^N v_j(\tau,\xi-(z_j-z_i)e^{-\frac{\tau}{2}}) + e^{\frac{\tau}{2}}\tilde{u}_0(e^\tau,\xi e^{\frac{\tau}{2}}+z_i).$$

Les deux difficultés évoquées ci-dessus consistent donc d'abord à estimer les propagateurs $S_N$ et $T_{\alpha_i}$ uniformément en $N$ dans une norme de point fixe ($K_{p,T}$ pour $S_N$ et $L^2(m)$ pour $T_{\alpha_i}$), puis à estimer convenablement le terme $R_i$.

Concernant les estimations de propagateurs on peut montrer les bornes suivantes (voir [9]) : pour tout $p \in [1, \infty]$, il existe une constante $C$ ne dépendant pas de $N$ telle que pour toute mesure $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$,

$$\|S_N(t,s)\nu\|_{L^p} \leq \frac{C}{(t-s)^{1-\frac{1}{p}}}\|\nu\|_{\mathcal{M}}, \quad 0 \leq s < t.$$

En outre pour tout $\gamma \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, il existe une constante $C$ et il existe $t_0 > 0$, ne dépendant pas de $N$, tels que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\|S_N(t,s)\nabla f\|_{L^p} \leq \frac{C}{(t-s)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{p}}}\left(\frac{t}{s}\right)^{\gamma}\|f\|_{L^1}, \quad 0 < s < t < s + t_0.$$

Enfin on a aussi, si $w$ est de moyenne nulle,

$$\forall m > 2, \quad \|T_\alpha(\tau)w\|_{L^2(m)} \leq Ce^{-\frac{\tau}{2}}\|w\|_{L^2(m)}, \quad \tau \geq 0,$$

et si $q \in ]1, 2]$ et $m > 2$, alors

$$\|T_\alpha(\tau)\nabla w\|_{L^2(m)} \leq C\frac{e^{-\frac{\tau}{2}}}{a(\tau)^{\frac{1}{q}}}\|w\|_{L^q(m)}, \quad \tau > 0, \tag{3.5}$$

avec $a(\tau) = 1 - e^{-\tau}$. Là encore les constantes ne dépendent que des données du problème, et en particulier pas de $N$.

Une fois ces bornes obtenues, il ne reste plus qu'à estimer tous les termes sous l'intégrale, dans (3.3) et (3.4). On constate alors que dans ces termes interviennent d'une part des produits de deux termes de type reste (deux termes "tildés"), qui sont facilement contrôlables puisque comme nous l'avons vu ci-dessus, ces restes sont petits en temps petit. D'autre part on voit apparaître des termes d'interactions, par exemple entre des termes localisés en des points différents. Là encore on peut montrer que sur des temps assez petits ces interactions sont négligeables. Ainsi si $M$ dénote une norme de point fixe, du type $M(t) = \max\{M_0(t), M_1(t), \ldots, M_N(t)\}$, où

$$M_0(t) = \sup_{0<s\leq t} s^{\frac{1}{4}}\|\tilde{\omega}_0(s)\|_{L^{\frac{4}{3}}}, \quad M_i(t) = \sup_{-\infty<\tau'\leq\log(t)} \|\tilde{w}_i(\tau')\|_{L^2(m)}, \quad i \in \{1, \ldots, N\},$$

alors on montre finalement l'inégalité suivante :

$$M(t) \leq \delta(t) + \eta(t)M(t) + CM(t)^2, \quad 0 < t < t_0,$$

où $C$ ne dépend que des données du problème, et en particulier pas de $N$ ni de $\varepsilon$, où $\eta(t)$ tend vers zéro avec $t$, et où $\delta(t) \leq C\varepsilon$ si $t > 0$ est assez petit. Ces deux fonctions $\eta(t)$, $\delta(t)$ dépendent de la mesure initiale $\mu$. Ce type d'inégalité permet classiquement de conclure à l'unicité par un argument de type Gronwall.

Nous renvoyons à [9] pour les détails.

## Bibliographie


[1] A. Alvino, P.-L. Lions, et G. Trombetti. Comparison results for elliptic and parabolic equations via symmetrization : a new approach. *Differential Integral Equations* **4** (1991), 25–50.

[2] A. Alvino, P.-L. Lions, et G. Trombetti. On optimization problems with prescribed rearrangements. *Nonlinear Anal. T.M.A.* **13** (1989), 185–220.

[3] A. Arnold, P. Markowich, G. Toscani, et A. Unterreiter. On convex Sobolev inequalities and the rate of convergence to equilibrium for Fokker-Planck type equations. *Comm. Partial Differential Equations* **26** (2001), 43–100.

[4] C. Bandle. *Isoperimetric inequalities and applications*. Monographs and Studies in Mathematics **7**. Pitman, London, 1980.

[5] M. Ben-Artzi. Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations. *Arch. Rational Mech. Anal.* **128** (1994), 329–358.

[6] M. Cannone et F. Planchon. Self-similar solutions for Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$. *Comm. Partial Differ. Equations* **21** (1996), 179–193.

[7] E. A. Carlen et M. Loss. Optimal smoothing and decay estimates for viscously damped conservation laws, with applications to the 2-D Navier-Stokes equation. *Duke Math. J.* **81** (1995), 135–157 (1996).

[8] G.-H. Cottet. Equations de Navier-Stokes dans le plan avec tourbillon initial mesure. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **303** (1986), 105–108.

[9] I. Gallagher et Th. Gallay. Uniqueness for the two-dimensional Navier-Stokes equation with a measure as initial vorticity. *Math. Annalen* **332** (2005), 287–327.

[10] I. Gallagher, Th. Gallay et P.-L. Lions. On the uniqueness of the solution of the two-dimensional Navier-Stokes equation with a Dirac mass as initial vorticity. *à paraître dans Math. Nachr.* , disponible sur `http ://www.arXiv.org/math.AP/0410344`.

[11] Th. Gallay et C. E. Wayne. Invariant manifolds and the long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on $\mathbb{R}^2$. *Arch. Rational Mech. Anal.* **163** (2002), 209–258.

[12] Th. Gallay et C. E. Wayne. Global stability of vortex solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation. *Comm. Math. Phys.* **255** (2005), 97–129.

[13] Y. Giga, T. Miyakawa, et H. Osada. Two-dimensional Navier-Stokes flow with measures as initial vorticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* **104** (1988), 223–250.

[14] T. Kato. The Navier-Stokes equation for an incompressible fluid in $\mathbb{R}^2$ with a measure as the initial vorticity. *Differential Integral Equations* **7** (1994), 949–966.

[15] H. Koch et D. Tataru. Well-posedness for the Navier–Stokes equations. *Advances in Mathematics* **157** (2001), 22–35.

[16] J. Leray. Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. *J. Math. Pures. Appl.* **12** (1933), 1–82.

[17] E. Lieb et M. Loss. *Analysis*. Graduate Studies in Mathematics **14**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[18] H. Osada. Diffusion processes with generators of generalized divergence form. *J. Math. Kyoto Univ.* **27** (1987), 597–619.