Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2004-2005

Jean-Marc Delort

Presque orthogonalité de produits de fonctions propres et existence en temps grand pour les équations de Klein-Gordon semi-linéaires sur les variétés de Zoll

Séminaire É. D. P. (2004-2005), Exposé n° XIII, 13 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2004-2005____A13_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Presque orthogonalité de produits de fonctions propres et existence en temps grand pour les équations de Klein-Gordon semi-linéaires sur les variétés de Zoll

J.-M. DELORT

d'après J.-M. DELORT et J. SZEFTEL

I Introduction et principaux résultats

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord de dimension d, Δ_g le laplacien sur M, ∇_g le gradient. Soit $V : M \to [0, +\infty[$ un potentiel C^∞. Nous allons faire une hypothèse spectrale forte sur M : Notons $P = \sqrt{-\Delta_g + V}$. Nous supposerons que le spectre $\sigma(P)$ de P vérifie :

$$\sigma(P) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n \tag{1}$$

où $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'intervalles compacts disjoints avec pour $n \geq 2$

$$I_n = \left[\frac{2\pi}{\tau} n + \alpha - \frac{c_0}{n^\delta}, \frac{2\pi}{\tau} n + \alpha + \frac{c_0}{n^\delta}\right] \tag{2}$$

où $\tau \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}, \delta \in]0, +\infty[, c_0 > 0$ (avec c_0 assez petite pour que les intervalles soient bien disjoints). L'intervalle I_1, à gauche de I_2, contient les premières valeurs propres de P. On remarquera que la formule de Weyl entraine que

$$\sharp\sigma(P) \cap I_n \leq C n^{d-1}, n \to +\infty \tag{3}$$

pour une constante $C > 0$. L'hypothèse (1) sur le spectre impose des conditions très fortes sur la variété. En effet, d'après Duistermaat et Guillemin [8], (1) et (2) entrainent que M est une variété de Zoll i.e. que son flot géodésique est périodique. Réciproquement, si M est une variété de Zoll, on sait d'après

Colin de Verdière [5] et Weinstein [10] que (1) est vérifiée avec des intervalles I_n de longueur $0(1/n)$. En d'autres termes, nous pourrions prendre δ dans (2) essentiellement égal à 1 sans restreindre la généralité. Nous écrivons toutefois l'hypothèse sous la forme (2) car c'est sous cette seule forme qu'elle nous sera utile.

On se propose d'étudier le temps d'existence de solutions de l'équation de Klein-Gordon non-linéaire

$$\begin{aligned}(\partial_t^2 - \Delta_g + V + m^2)u &= f(x, u, \partial_t u, \nabla_g u)\\ u_{|t=0} &= \varepsilon u_0 \\ \partial_t u_{|t=0} &= \varepsilon u_1\end{aligned} \tag{4}$$

où u_0, u_1 sont des fonctions données sur M, à valeurs réelles et suffisamment régulières, $m \in]0, +\infty[$, $\varepsilon > 0$ est petit, et où f est un polynôme en $(u, \partial_t u, \nabla_g u)$ nul à l'ordre $p \geq 2$ en 0, à coefficients C^∞ en x. On note r l'entier défini par :

(5) r est le plus grand entier vérifiant $p \leq r \leq 2p - 1$ tel que pour tout entier impair k tel que $p \leq k < r$, la partie homogène de degré k de f ne dépende que de u.

Le théorème principal s'énonce :

Théorème 1 *Il existe $\mathcal{N} \subset]0, +\infty[$, de mesure nulle, et $\forall m \in]0, +\infty[-\mathcal{N}$, $\exists \varepsilon_0 > 0, \exists s_0 \in \mathbb{N}$, $\exists c > 0$ et $\forall s \geq s_0$, $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[, \forall (u_0, u_1) \in H^{s+1}(M) \times H^s(M), u_0, u_1$ étant à valeurs réelles et vérifiant $\|u_0\|^2_{H^{s+1}} + \|u_1\|^2_{H^s} \leq 1$, le système (4) admet une unique solution u, continue bornée sur un intervalle $]-T_\varepsilon, T_\varepsilon[$ à valeurs dans $H^{s+1}(M)$, C^1 à dérivée bornée sur le même intervalle à valeurs dans $H^s(M)$, avec $T_\varepsilon \geq c\varepsilon^{-r+1}$.*

Remarques :

- Dans le cas p pair et f polynôme quelconque nul à l'ordre p en 0, la condition (5) est satisfaite avec $r = p + 1$, et le théorème fournit une solution à (4) définie sur un intervalle de longueur $c\varepsilon^{-p}$, alors que les résultats d'existence locale donnent seulement une solution sur un intervalle de temps de longueur $c\varepsilon^{-p+1}$.

- Dans le cas de l'équation (4), posée soit sur $M = [0, 1]$ avec conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann, soit sur $M = \mathbb{S}^1$, et pour une nonlinéarité f hamiltonienne (i.e. ne dépendant que de u), comme il y a conservation d'une intégrale première contrôlant la norme H^1 des petites solutions, l'existence globale de solutions à données H^1 petites est immédiate. On ne contrôle toutefois a priori que la norme H^1 de la solution et se pose alors la question de l'existence d'estimations uniformes de $\|u(t,\cdot)\|_{H^{s+1}}$ si $u_0 \in H^{s+1}, u_1 \in H^s, s \gg 1$. Ce problème a été abordé par Bourgain [3], et résolu par Bambusi [1], Bambusi et Grébert [2]. Sous des hypothèses supplémentaires convenables sur f, ils ont obtenu un contrôle uniforme de $\|u(t,\cdot)\|_{H^{s+1}}$ sur des intervalles $]-c_N\varepsilon^{-N}, c_N\varepsilon^{-N}[$ pour s assez grand et pour tout N. Le théorème ci-dessus est une version affaiblie de ce résultat valable en dimension quelconque et pour des nonlinéarités non nécessairement hamiltoniennes.

• Dans le cas $M = \mathbb{S}^d, V \equiv 0$, nous avons donné dans [6] une preuve du théorème 1 reposant sur la connaissance explicite des valeurs propres et des fonctions propres du laplacien sur la sphère. En particulier, nous utilisons de manière essentielle la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ notons H_n une harmonique sphérique de degré n (i.e. la restriction à $\mathbb{S}^d$ d'un polynôme harmonique homogène de degré n). Alors si $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_{p+1}$ sont des entiers, on a

$$\int_{\mathbb{S}^d} H_{n_1}(x) \cdots H_{n_{p+1}}(x)dx = 0 \tag{6}$$

dès que $n_1 - n_2 > n_3 + \cdots + n_{p+1}$, dx désignant la mesure riemannienne sur $\mathbb{S}^d$. Pour prouver le théorème 1, nous aurons besoin d'un substitut à (6) valable sur la variété M.

Désignons désormais par (M, g) une variété riemannienne compacte sans bord *quelconque* de dimension $d \geq 2$. Soit toujours V un potentiel C^∞ positif ou nul et $P = \sqrt{-\Delta_g + V}$. Soit $(\pi_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille de fonctions L^∞_{loc} sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, vérifiant pour tous $\lambda > 0$, $\lambda' \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$

$$|\pi_\lambda(\lambda')| \leq C_N(1 + |\lambda - \lambda'|)^{-N} \ . \tag{7}$$

(En pratique $\pi_\lambda(\lambda')$ sera la fonction caractéristique d'un intervalle de centre λ, de longueur fixée). Désignons par Π_λ l'opérateur $\pi_\lambda(P)$.

Théorème 2 *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Il existe $\nu = \nu(p) > 0$ et $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists C_N > 0$ tels que pour tous $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{p+1} > 0$, tous $u_1, \ldots, u_{p+1}$ dans $L^2(M)$ on ait*

$$\left| \int_M (\Pi_{\lambda_1} u_1) \cdots (\Pi_{\lambda_{p+1}} u_{p+1}) dx \right| \leq C_N \frac{(1+\lambda_3)^{\nu+N}}{(1+\lambda_3+(\lambda_1-\lambda_2))^N} \prod_1^{p+1} \|u_j\|_{L^2} \ , \tag{8}$$

dx désignant le volume riemannien (ou plus généralement une mesure positive à densité C^∞ par rapport au volume riemannien).

Remarques :

• Insistons sur le fait que le théorème 2 est valable pour toute variété riemannienne sans bord. Les hypothèses du type (1), (2) ne sont utilisées que dans la démonstration du théorème 1.

• Le cas particulier du théorème 2 correspondant à λ_1 très grand devant λ_2 (auquel cas le nombre de droite de (8) est à décroissance rapide en λ_1) a été prouvé par Burq, Gérard et Tzvetkov dans [4].

• Dans le cas où l'on prend $M = \mathbb{S}^d, V \equiv 0$, λ_j la n_j^{ieme} valeur propre de $\sqrt{-\Delta_{\mathbb{S}^d}}$, u_j une harmonique sphérique H_{n_j} de degré n_j, le membre de gauche de (8) coincide avec (6), donc est nul si $n_1 - n_2 \gg n_3$.

Dans ce régime (8) affirme que pour toute variété M, l'intégrale du membre de gauche est à décroissance rapide par rapport à $\lambda_1 - \lambda_2 \sim n_1 - n_2$.

II Démonstration du théorème 2

Le point de départ de la preuve consiste, comme dans Burq, Gérard et Tzvetkov [4], à exprimer π_λ à partir d'un opérateur intégral, au moyen d'une réduction due à Sogge [9]. Modulo des termes de reste qui se traitent aisément, on peut dans le membre de gauche de (8) remplacer $\Pi_{\lambda_j} u$ par $T_{\lambda_j} u$ $j = 1, 2$, où T_λ est un opérateur intégral de la forme

(9) $$T_\lambda u(x) = \lambda^{\frac{d-1}{2}} \int_M e^{i\lambda\psi(x,y)} a_\lambda(x,y) u(y) dy$$

dans lequel :

• $\psi(x,y) = -d(x,y)$, d désignant la distance géodésique sur M,

• $a_\lambda(x,y)$ est une fonction C^∞ en x, y vérifiant des estimations uniformes $|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta a_\lambda(x,y)| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \forall (x,y) \in M \times M \;, \forall \lambda \geq 1$.

• $\mathrm{Supp}(a_\lambda) \subset \{(x,y) \in M \times M \,;\, C^{-1}\varepsilon_0 \leq d(x,y) \leq C\varepsilon_0\}$ où $C > 0$ est une constante universelle et $\varepsilon_0 > 0$ peut être choisie aussi petite que souhaitée.

On peut en outre, modulo toujours des contributions plus faciles à traiter, se limiter au cas où par exemple $\frac{1}{2} \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \leq 2$ et $\lambda_1 - \lambda_2 \gg \lambda_3$. La contribution principale à l'intégrale (8) s'écrit alors

(10) $$J = \int_M (T_{\lambda_1} u_1)(x)(T_{\lambda_2} u_2(x)) v(x) dx$$

où

$$v(x) = \prod_{j=3}^{p+1} (\Pi_{\lambda_j} u_j) \tag{11}$$

vérifie, grâce aux injections de Sobolev, pour un certain $\nu > 0$ ne dépendant que de la dimension, des estimations de la forme

$$\|\partial_x^\alpha v\|_{L^\infty} \leq C_\alpha (1+\lambda_3)^{\nu+|\alpha|} \ . \tag{12}$$

Utilisant (9) dans (10) on peut réécrire
(13)

$$J = (\lambda_1\lambda_2)^{\frac{d-1}{2}} \int_{M\times M\times M} e^{i[\lambda_1\psi(x,y_1)+\lambda_2\psi(x,y_2)]} a(x,y,\lambda) u_1(y_1) u_2(y_2) dy_1 dy_2 dx$$

avec $a(x,y,\lambda) = a_1(x,y_1,\lambda_1)a_2(x,y_2,\lambda_2)v(x)$. En particulier

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta a(x,y,\lambda)| \leq C_{\alpha\beta}(1+\lambda_3)^{\nu+|\alpha|+|\beta|} \tag{14}$$

et a est supporté pour $C^{-1}\varepsilon_0 \leq d(x,y_j) \leq C\varepsilon_0 \quad j=1,2$. En introduisant dans J une partition de l'unité en x, on peut supposer que l'intégration en x se fait sur un petit domaine de carte de la variété. Si $\varepsilon_0 > 0$ est pris assez petit, on peut donc se réduire au cas où x, y_1, y_2 restent dans un même domaine de carte géodésiquement convexe. Réécrivons (13) sous la forme

$$\begin{aligned} J &= (\lambda_1\lambda_2)^{\frac{d-1}{2}} \textstyle\iint I(y_1,y_2,\lambda_1,\lambda_2) u_1(y_1) u_2(y_2) dy_1 dy_2 \\ I(y,\lambda) &= \textstyle\int e^{i\Psi(x,y,\lambda)} a(x,y,\lambda) dx \end{aligned} \tag{15}$$

où Ψ est la phase

$$\Psi(x,y,\lambda) = \lambda_1\psi(x,y_1) + \lambda_2\psi(x,y_2). \tag{16}$$

Lemme 3 *On peut écrire*

$$I(y,\lambda) = e^{-i\lambda_2 d(y_1,y_2)} c(y,\lambda) + r(y,\lambda) \tag{17}$$

où c est un symbole vérifiant pour tout $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d, N \in \mathbb{N}$
(18)

$$|\partial_{y_1}^{\alpha_1}\partial_{y_2}^{\alpha_2} c(y_1,y_2,\lambda_1,\lambda_2)| \leq C_N \left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{\frac{d-1}{2}} \frac{(1+\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)^N}^{\nu+N+|\alpha|} \prod_{j=1}^{p+1} \|u_j\|_{L^2}$$

et où r est à décroissance rapide en $\frac{1+\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}$, ainsi que ses dérivées.

Montrons que le lemme 3 entraine le théorème 2. Nous ignorons la contribution du terme de reste et décrivons seulement celle du premier terme du membre de droite de (17). D'après (15), J est essentiellement égale à

$$(\lambda_1\lambda_2)^{\frac{d-1}{2}} \int (Ku_2)(y_1,\lambda)u_1(y_1)dy_1 \tag{19}$$

avec

$$Ku_2(y_1,\lambda) = \int e^{-i\lambda_2 d(y_1,y_2)}c(y,\lambda)u_2(y_2)dy_2 \ . \tag{20}$$

Or la phase de cet opérateur vérifie en tout point une condition de Carleson-Sjölin par rapport à $d-1$ variables (i.e. $\frac{\partial^2 d(y_1,y_2)}{\partial y_1 \partial y_2}$ est de rang $d-1$). Il en résulte alors de manière classique que K est un opérateur borné sur L^2, de norme d'opérateur majorée par

$$C\lambda_2^{-\frac{d-1}{2}} \times (\text{semi-norme de } c).$$

Grâce à (18), on voit que cette estimation permet de compenser le terme en $(\lambda_1\lambda_2)^{\frac{d-1}{2}}$ de (19) et de majorer J par le membre de droite de (8) (dans le cas considéré ici $\lambda_1 - \lambda_2 \gg \lambda_3$).

Démonstration du lemme 3 : Indiquons simplement comment on obtient la majoration (18) lorsque $\alpha = 0$. Puisque x, y_1, y_2 restent dans un même domaine de carte géodésiquement convexe U, il existe une unique géodésique Γ joignant y_1 à y_2 dans ce domaine

Les propriétés de support vérifiées par a entrainent que x reste hors d'un voisinage de y_1 et hors d'un voisinage de y_2. Comme $\psi(x,y) = -d(x,y)$, le vecteur tangent unitaire en x à l'arc de géodésique joignant x à y_j dans

U est $\nabla_x\psi(x,y_j)$. Ces deux vecteurs ne peuvent être opposés si $x \notin \Gamma$. En effet, en cas contraire, la géodésique joignant y_1 à x se recollerait avec la géodésique joignant x à y_2, fournissant ainsi une seconde géodésique allant de y_1 à y_2, différente de Γ, contenue dans U : cela contredirait le fait que U est géodésiquement convexe. Par conséquent, si x reste hors d'un voisinage arbitraire V de Γ, on aura

$$(21) \qquad |\nabla_x\Psi(x,y,\lambda)| = |\lambda_1\nabla_x\psi(x,y_1) + \lambda_2\nabla_x\psi(x,y_2)| \geq c(\lambda_1+\lambda_2)$$

pour une constante $c > 0$. Par intégration par parties en x et en utilisant (14), on obtient que la contribution à I provenant de l'intégration hors de V fournit une partie du reste dans (17).

Il reste à étudier la contribution à I obtenue lorsque dans la seconde formule (15) l'intégration porte sur un petit voisinage V de Γ. On montre alors que si V est assez petit, on peut choisir des coordonnées locales (w_1, w'') où w_1 est la longueur d'arc sur Γ, $w'' \in \mathbb{R}^{d-1}, |w''| \leq \rho \ll 1$ telles que dans ces coordonnées la phase Ψ s'écrive

(22)
$$\widetilde{\Psi}(w,y,\lambda) = -\left[\lambda_2 d(y_1,y_2) + (\lambda_1-\lambda_2)w_1 + \lambda_1 G_1(w)w''^2 + \lambda_2 G_2(w)w''^2\right] \ ,$$

G_1 et G_2 désignant deux formes quadratiques définies positives sur $\mathbb{R}^{d-1}$ à coefficients C^∞ en w. L'expression (22) coïncide trivialement sur $w'' = 0$ (i.e. sur Γ) avec (16) puisque $\psi(x,y_j) = -d(x,y_j)$. Les deux termes en w''^2 reflètent le fait que $x \to d(x,y_j)$ est transversalement non dégénérée le long de Γ. Effectuant le changement de variables $x \to w$ dans l'intégrale donnant I (tronquée en $x \in V$), on est ramené à une expression de la forme

$$(23) \qquad \int e^{i\tilde{\Psi}(w,y,\lambda)}\tilde{a}(w,y,\lambda)dw$$

avec $\tilde{a}$ supportée dans $|w''| \leq \rho \ll 1$ et $|\partial_w^\alpha \tilde{a}| \leq C_\alpha(1+\lambda_3)^{\nu+|\alpha|}$. D'après (22)

$$(24) \qquad \left|\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial w_1}\right| \sim (\lambda_1-\lambda_2) + O((\lambda_1+\lambda_2)|w''|^2) \ .$$

Par conséquent, si on introduit sous l'intégrant de (23) une troncature supplémentaire pour $|w''| \leq \delta(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{1/2}$, il résulte de (24) que $|\frac{\partial\Psi}{\partial w_1}| \sim (\lambda_1-\lambda_2)$ sur ce domaine si δ est assez petit. Par intégration par parties on en déduit une contribution à c vérifiant l'estimation (18), le facteur en $(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{\frac{d-1}{2}}$ du membre de droite provenant de l'intégration en w''. Pour traiter la contribution à I de l'intégration sur le domaine $|w''| > \delta(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{1/2}$, on remarque

que

$$\left|\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial w''}\right| \sim (\lambda_1+\lambda_2)|w''|$$

si de plus $|w''| \leq \rho$ assez petit. Effectuant des intégrations par parties en w'' et utilisant que $|\partial^\alpha_{w''}\tilde{\Psi}| \leq C(\lambda_1+\lambda_2)$ pour $|\alpha| \geq 2$, on obtient encore une estimation de la forme (18). Cela conclut la preuve du théorème 3 et celle du lemme 2.

Remarque : Le referee de l'article [7] nous a récemment suggéré une preuve plus simple du théorème 2. On trouvera celle-ci dans la référence [7].

III Démonstration du théorème 1

Nous allons indiquer l'idée de la preuve du théorème 1 dans un cas modèle. Notons $\Lambda_m = \sqrt{-\Delta_g + V + m^2}$, de telle manière que $P = \Lambda_0$. Nous faisons ici l'hypothèse (1), (2) et nous désignons par Π_n le projecteur spectral sur l'intervalle I_n. Pour simplifier les notations, nous prenons dans (2) $\tau = 2\pi$, ce qui permet d'écrire Π_n sous la forme $\pi_n(P)$ pour une famille de fonctions $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant la condition (7). Nous pouvons donc appliquer le théorème 2 aux projecteurs Π_n. Nous considérons, avec la notation $D_t = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$, le problème modèle

(25)
$$\begin{aligned}(D_t - \Lambda_m)u &= u^\ell \bar{u}^{p-\ell}\\ u_{|t=0} &= \varepsilon u_0\end{aligned}$$

avec u_0 donnée dans $H^s(M)$ à valeurs complexes, $0 \leq \ell \leq p$, p pair, $p \geq 2$. Les théorèmes d'existence locale donnent une solution sur un intervalle de longueur $c\varepsilon^{-p}$ et nous allons montrer que la solution existe et reste bornée dans H^s au moins sur un intervalle de longueur $c\varepsilon^{-2p+2}$ si $s \gg 1$. Nous introduisons un pseudo-hamiltonien

(26)
$$E_s(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{2s}\left[\frac{1}{2}\int_M |\Pi_n u|^2 dx + Re\int_M (\Pi_n B(u,\cdots,u,\bar{u},\cdots,\bar{u}))\Pi_n\bar{u}dx\right]$$

où dx est la mesure riemannienne sur M et B un opérateur ℓ-linéaire en u, $p-\ell$ linéaire en $\bar{u}$ à déterminer. Le premier terme dans la définition de $E_s(u)$ est équivalent à $\|u\|^2_{H^s}$. Si B est construit de manière à être continu de $H^s \times \cdots \times H^s$ dans H^s, le second terme est en module majoré par $C\|u\|^{p+1}_{H^s}$, donc au voisinage de 0 dans H^s, $E_s(u)$ est équivalente à $\|u\|^2_{H^s}$. Notre but est de montrer que si B est convenablement choisi et s assez grand,

(27)
$$\frac{d}{dt}E_s(u(t,.)) = O(\|u(t,.)\|^{2p}_{H^s})$$

d'où l'on déduit par intégration que si ε est assez petit, $E_s(u(t,.))$, donc $\|u(t,.)\|^2_{H^s}$, est contrôlé par $C\varepsilon^2$ sur un intervalle de temps de longueur au moins égale à $c\varepsilon^{-2p+2}$. Cela donne la conclusion du théorème 1.

Calculons la dérivée en temps du premier terme du membre de droite de (26) :

(28)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{n_{p+1}=1}^{+\infty} n_{p+1}^{2s}\int_M |\Pi_{n_{p+1}}u|^2 dx\right)\\
&= Re\left(i\sum_{n_{p+1}} n_{p+1}^{2s}\int_M \overline{\Pi_{n_{p+1}}u}(D_t-\Lambda_m)\Pi_{n_{p+1}}u dx\right)\\
&= Re\left(i\sum_{n_1}\cdots\sum_{n_{p+1}} n_{p+1}^{2s}\int_M (\Pi_{n_1}u)\cdots(\Pi_{n_\ell}u)(\overline{\Pi_{n_{\ell+1}}u})\cdots(\overline{\Pi_{n_{p+1}}u})dx\right)
\end{aligned}$$

où, dans la deuxième expression, nous avons fait apparaître $(D_t-\Lambda_m)u$, que nous avons ensuite remplacé par le membre de droite de (25), décomposé grâce aux projecteurs spectraux. D'autre part, si nous dérivons par rapport au temps la seconde contribution au membre de droite de (26) en distribuant $\frac{d}{dt}$ sur les divers arguments de B, et que nous utilisons l'équation pour écrire $D_t u = \Lambda_m u + u^\ell \bar{u}^{p-\ell}$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}\sum_{n_{p+1}=1}^{+\infty}\int_M n_{p+1}^{2s}\Pi_{n_{p+1}}B(u,\cdots,\bar{u})\Pi_{n_{p+1}}\bar{u}dx = \\
&\sum_{n_{p+1}=1}^{+\infty} i\int_M n_{p+1}^{2s}\Pi_{n_{p+1}}L(B)(u,\cdots,\bar{u})\Pi_{n_{p+1}}\bar{u}dx + O(\|u\|^{2p}_{H^s})\ .
\end{aligned} \tag{29}$$

Le reste provient de la substitution de $u^\ell\bar{u}^{p-\ell}$ dans les arguments de B – et du fait que nous allons construire B de telle manière qu'il soit continu sur $H^s(M)$. La partie principale s'exprime à partir d'un nouvel opérateur $L(B)$ défini à partir de B par

(30)

$$\begin{aligned}
L(B)(v_1,\cdots,v_p) &= \sum_{j=1}^{\ell} B(v_1,\cdots,\Lambda_m v_j,\cdots,v_p)\\
&- \sum_{j=\ell+1}^{p} B(v_1,\cdots,\Lambda_m v_j,\cdots,v_p) - \Lambda_m B(v_1,\cdots,v_p)\ .
\end{aligned}$$

Le problème consiste à choisir B de telle manière que dans $\frac{d}{dt}E_s(u(t,.))$ le premier terme du membre de droite de (29) compense le membre de droite de (28) soit

$$\Pi_{n_{p+1}} L(B)(\Pi_{n_1} v_1, \cdots, \Pi_{n_p} v_p) = -\Pi_{n_{p+1}}((\Pi_{n_1} v_1) \cdots (\Pi_{n_p} v_p)) \tag{31}$$

pour tous $n_1, \cdots, n_{p+1}, v_1, \cdots, v_p$.

Indiquons d'abord comment construire $L(B)$ dans le cas particulier où pour tout n (assez grand), $\sigma(P) \cap I_n$ est réduit à un point. Cela correspond au cas de la sphère avec potentiel nul, mais nous n'allons pas utiliser ce renseignement et nous reposer seulement sur les propriétés des projecteurs spectraux fournies par le théorème 2. Notons λ_n l'unique valeur propre (multiple en général) contenue dans l'intervalle I_n. L'opérateur Λ_m est alors scalaire sur l'image de chaque Π_n et le membre de gauche de (31) s'écrit, compte-tenu de (30),

$$F(\lambda_{n_1}, \cdots, \lambda_{n_{p+1}}) \Pi_{n_{p+1}} B(\Pi_{n_1} v_1, \cdots, \Pi_{n_p} v_p) \tag{32}$$

avec

$$F(\xi_1, \cdots, \xi_{p+1}) = \sum_{j=1}^{\ell} \sqrt{m^2 + \xi_j^2} - \sum_{j=\ell+1}^{p+1} \sqrt{m^2 + \xi_j^2}\ . \tag{33}$$

D'après (31) on souhaiterait donc définir B par

$$\Pi_{n_{p+1}} B(\Pi_{n_1} v_1, \cdots, \Pi_{n_p} v_p) = F(\lambda_{n_1}, \cdots, \lambda_{n_{p+1}})^{-1} \Pi_{n_{p+1}}(\Pi_{n_1} v_1 \cdots \Pi_{n_p} v_p). \tag{34}$$

On a prouvé dans [6], [7] que pour presque tout m, il existe $c > 0$, $N_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tous $n_1, \cdots, n_{p+1}$ dans $\mathbb{N}$

$$|F(\lambda_{n_1}, \cdots, \lambda_{n_{p+1}})| \geq c\mu(n_1, \cdots, n_{p+1})^{-N_0} \tag{35}$$

où $\mu(n_1, \cdots, n_{p+1})$ est le maximum de l'ensemble $\{n_1, \cdots, n_{p+1}\}$ privé de ses deux plus grands éléments. La preuve de cette inégalité repose sur les propriétés de séparation des valeurs propres provenant de (1), (2). La définition (34) de B a donc un sens lorsque m est hors d'un ensemble exceptionnel de mesure nulle $\mathcal{N}$. Il reste à vérifier que B envoie $H^s \times \cdots \times H^s$ dans H^s pour s assez grand. On a :

$$\|B(v_1, \cdots, v_p)\|_{H^s}^2 \simeq \sum_{n_{p+1}} n_{p+1}^{2s} \| \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_p} \Pi_{n_{p+1}} B(\Pi_{n_1} v_1, \cdots, \Pi_{n_p} v_p)\|_{L^2}^2\ . \tag{36}$$

Estimons uniquement la contribution à cette somme provenant des indices vérifiant $n_{p+1} \geq n_p \geq \cdots \geq n_1$. D'après (34), (35) et le fait que $\mu(n_1, \cdots, n_{p+1}) \sim 1 + n_{p-1}$ pour les indices considérés, on majore (36) par

$$(37) \qquad C \sum_{n_{p+1}} n_{p+1}^{2s} \left(\sum_{n_1} \cdots \sum_{n_p} n_{p-1}^{N_0} \|\Pi_{n_{p+1}}(\Pi_{n_1} v_1 \cdots \Pi_{n_p} v_p)\|_{L^2} \right)^2 .$$

D'après le théorème 2 dans lequel $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots$ jouent le rôle respectivement de $n_{p+1} \geq n_p \geq n_{p-1} \geq \cdots$, le terme général de la somme se majore par

$$(38) \qquad C_N \frac{(1 + n_{p-1})^{\nu+N}}{(1 + (n_{p+1} - n_p) + n_{p-1})^N} n_{p-1}^{N_0} \prod_{j=1}^{p} \|\Pi_{n_j} v_j\|_{L^2}$$

avec N à choisir assez grand. Chaque $\|\Pi_{n_j} v_j\|_{L^2}$ fait apparaître un facteur n_j^{-s} puisque $v_j \in H^s$. Les indices $j \leq p-1$ permettent donc, si s est assez grand, de compenser les pertes en $(1 + n_{p-1})^{\nu+N_0}$ dans (38) et d'assurer la sommabilité en $n_1, \ldots, n_{p-1}$. La norme L^2 de $\Pi_{n_p} v_p$ fait apparaître un n_p^{-s} qui peut être utilisé pour compenser la puissance de n_{p+1} apparaissant dans (37) grâce au dénominateur dans (38). De plus ce même dénominateur montre que la sommation en n_p se fait essentiellement sur un intervalle de centre n_{p+1}, de longueur $O(n_{p-1})$, donc ne fait apparaître de perte supplémentaire que relativement à la petite fréquence n_{p-1}. Il en résulte que la contribution étudiée à (36) est bien finie. Nous renvoyons à [7] pour les détails de la preuve.

Nous avons donc trouvé un opérateur B, continu sur $H^s \times \cdots \times H^s$, à valeurs dans H^s, tel que (27) soit vraie. Comme indiqué précédemment, cela conclut la preuve du théorème 1 dans le cas particulier que nous envisageons.

Il nous reste à expliquer comment la preuve doit être modifiée lorsque chaque I_n ne contient pas seulement une valeur propre multiple mais plusieurs valeurs propres. Nous ne pouvons plus alors exprimer le membre de gauche de (31) à l'aide de (32) puisque $\Lambda_m \Pi_n$ n'est plus scalaire. Toutefois, si on choisit une valeur propre particulière λ_n dans $\sigma(P) \cap I_n$, et si on définit $\widetilde{\Lambda}_m$ par $\widetilde{\Lambda}_m \Pi_n = \sqrt{\lambda_n^2 + m^2}\,\Pi_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la définition (2) des intervalles I_n entraîne

$$(39) \qquad \|(\Lambda_m - \widetilde{\Lambda}_m)\Pi_n\|_{\mathcal{L}(L^2)} = O(\frac{1}{n^\delta})$$

i.e. sur l'image de Π_n avec n grand, Λ_m est proche de l'opérateur scalaire $\widetilde{\Lambda}_m$. Pour construire alors $L(B)$ vérifiant (31), on décompose, dans le régime

$n_1, n_{p+1} \gg n_2, \cdots, n_p$ (par exemple) $L(B) = L_0(B) + L_1(B)$ où
(40)

$$\begin{aligned} L_0(B)(v_1, \cdots, v_p) &= B(\widetilde{\Lambda}_m v_1, \cdots, v_p) + \sum_{j=2}^{\ell} B(v_1, \cdots, \Lambda_m v_j, \cdots, v_p) \\ &- \sum_{j=\ell+1}^{p} B(v_1, \cdots, \Lambda_m v_j, \cdots, v_p) - \widetilde{\Lambda}_m B(v_1, \cdots, v_p) \\ L_1(B)(v_1, \cdots, v_p) &= B((\Lambda_m - \widetilde{\Lambda}_m) v_1, \cdots, v_p) - (\Lambda_m - \widetilde{\Lambda_m}) B(v_1, \cdots, v_p) \end{aligned}$$

La résolution de (31) revient à montrer que $B \to L_0(B) + L_1(B)$ est inversible sur des espaces d'opérateurs multilinéaires convenables. On construit cet inverse par

$$(L_0 + L_1)^{-1} = (Id + L_0^{-1} L_1)^{-1} L_0^{-1}$$

où L_0^{-1} se construit comme dans le cas particulier que nous avons précédemment évoqué, en exploitant ici que relativement aux “grandes fréquences” Λ_m a été remplacé par un opérateur scalaire sur l'image des projecteurs spectraux. D'autre part l'inégalité (38) permet de montrer que dans le régime considéré, la norme d'opérateur de $L_0^{-1} L_1$ est petite, d'où la possibilité d'inverser $Id + L_0^{-1} L_1$ par une série de Neumann. Nous renvoyons à [7] pour les détails de la preuve.

Remarque finale : Nous avons indiqué la preuve du théorème 1 dans le cas particulier de (25) avec p pair. Si p est impair une difficulté nouvelle apparait : dans le cas $\ell = \frac{p+1}{2}$ la fonction (34) s'annule pour toute valeur de m sur les $(\xi_1, \cdots, \xi_{p+1})$ tels qu'il existe une bijection σ de $\{1, \cdots, \ell\}$ sur $\{\ell + 1, \cdots, p + 1\}$ avec $\xi_j^2 = \xi_{\sigma(j)}^2 \quad \forall j = 1, \cdots, \ell$. En d'autres termes nous ne pouvons pas utiliser (35) pour tous les $(n_1, \cdots, n_{p+1})$ avec $n_j = n_{\sigma(j)}$ $j = 1, \cdots, \ell$. Remarquons toutefois que dans le membre de droite de (28) ces $(p + 1)$-uplets fournissent une contribution nulle puisque l'intégrale qui y figure est alors réelle. Cela permet donc de démontrer le théorème 1 pour l'exemple (25) également dans le cas p impair. Pour l'équation (4) en général, c'est l'hypothèse (5) qui permet d'assurer que les composantes homogènes de degré impair $k < r$ de f ne contribuent pas aux termes du membre de droite de (28) associés aux $(p + 1)$-uplets vérifiant la condition ci-dessus.

Références

[1] D. Bambusi : Birkhoff normal form for some nonlinear PDEs, Comm. Math. Phys. 234 (2003), n°2, 253-285.

[2] D. Bambusi et B. Grébert : Birkhoff normal form for PDEs with tame modules, prépublication, (2004).

[3] J. Bourgain : Construction of approximations and almost periodic solutions of perturbed linear Schrödinger and wave equations, Geom. Funct. Anal. 6 (1996), n°2, 201-230.

[4] N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov : Bilinear eigenfunction estimates and the nonlinear Schrödinger equation on surfaces, Inventiones Mathematicae, 159, (2005), n°1, 187-223.

[5] Y. Colin de Verdière : Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques, Comment. Math. Helv. 54 (1979), n°3, 508-522.

[6] J.-M. Delort et J. Szeftel : Long time existence for small data nonlinear Klein-Gordon equations on tori and spheres, Int. Math. Res. Not. (2004), n°37, 1897-1966.

[7] J.-M. Delort et J. Szeftel : Long-time existence for semi-linear Klein-Gordon equations with small Cauchy data on Zoll manifolds, prépublication, (2004).

[8] J. Duistermaat et V. Guillemin : The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics, Invent. Math., 29 (1975), n°1, 39-79.

[9] C. Sogge : Fourier integrals in classical analysis, Cambridge tracts in Mathematics, 105, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, x+237pp

[10] A. Weinstein : Asymptotics of eigenvalue clusters for the Laplacian plus a potential, Duke Math. J. 44 (1977), n°4, 883-892