SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2003-2004

Didier Gamblin

Résonances de Rayleigh en dimension deux

Séminaire É. D. P. (2003-2004), Exposé n° VI, 10 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2003-2004____A6_0>

RÉSONANCES DE RAYLEIGH EN DIMENSION DEUX

Didier GAMBLIN
LAGA, Institut Galilée, Université Paris 13,
gamblin@math.univ-paris13.fr

1 Introduction

Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ un compact à bord $\mathcal{C}^\infty$ Γ. On note $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$ son complémentaire. Notons Δ_e l'opérateur d'élasticité

$$\Delta_e u = \mu_0 \Delta u + (\lambda_0 + \mu_0)\nabla(\nabla \cdot u), \qquad u = {}^t(u_1, \ldots, u_n),$$

où les constantes de Lamé λ_0 et μ_0 vérifient

$$\mu_0 > 0, \quad n\lambda_0 + 2\mu_0 > 0.$$

$-\Delta_e$ est un opérateur différentiel matriciel dont les valeurs propres du symbole matriciel sont $p_1 = c_1^2|\xi|^2$ et $p_2 c_2^2|\xi|^2$ où $c_1 = \sqrt{\mu_0}$ et $c_2 = \sqrt{\lambda_0 + 2\mu_0}$. Il y a donc deux vitesses de propagation des ondes élastiques dans Ω, c_1 et c_2.
Considérons Δ_e dans Ω avec des conditions de Neumann sur le bord Γ

$$(Bu)_i := \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(u)\nu_j = 0, \qquad i = 1, \ldots, n \quad \text{sur} \quad \Gamma$$

où $\sigma_{ij}(u) = \lambda_0 \nabla \cdot u \delta_{ij} + \mu_0(\partial_{x_j} u_i + \partial_{x_i} u_j)$ est le tenseur des contraintes et ν la normale extérieure à Ω sur Γ.
Depuis longtemps on a observé que pour le problème de Neumann, une troisième onde se propage sur le bord de l'obstacle, mais plus lentement. Elle a une importance particulière en sismologie.

Pour l'équation des ondes élastiques à l'extérieur d'un obstacle à bord $\mathcal{C}^\infty$ Γ avec condition de Neumann sur le bord, en dimension quelconque, M.Taylor [Tay79] a étudié mathématiquement la propagation des singularités. Trois types de rayons peuvent propager les singularités. D'une part les rayons classiques se réfléchissant au bord de l'obstacle suivant les lois de l'optique géométrique et propageant les singularités aux vitesses c_1 et c_2. D'autre part les rayons de Rayleigh propageant les singularités dans le bord de l'obstacle à la vitesse plus lente c_R. On rappelle que $c_R < c_1 < c_2$ et $c_R = c_1 s_0$ où s_0 est l'unique zéro dans $]0, 1[$ de la fonction de Rayleigh

$$\mathcal{R}(s) = (s^2 - 2)^2 - 4(1 - s^2)^{\frac{1}{2}}(1 - c_1^2 c_2^{-2} s^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ce qui fait que même un obstacle strictement convexe est captif pour le problème de Neumann du point de vue de la propagation des singularités. Ce qui n'est pas le cas pour le problème de Dirichlet.
M.Ikehata et G.Nakamura [IN89] dans le cas de la sphère de $\mathbb{R}^3$ puis M.Kawashita [K92] pour un obstacle à bord $\mathcal{C}^\infty$ quelconque en dimension impaire, ont montré que l'énergie locale de l'équation des ondes élastiques pour le problème de Neumann n'a pas la propriété de décroissance uniforme lorsque $t \to \infty$. Ces phénomènes correspondent à l'existence d'ondes de Rayleigh se propageant au bord de l'obstacle et on s'attendait à ce que cela crée des résonances convergeant rapidement vers l'axe réel.

Il est connu que l'opérateur $-\Delta_e$ agissant sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ et vérifiant la condition de Neumann, admet une réalisation auto-adjointe sur $L^2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ que l'on notera $-\Delta_e^N$. L'opérateur $-\Delta_e^N$ est positif et n'admet pas de spectre ponctuel. Soit χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact valant 1 près de Γ, la résolvante tronquée $R_\chi(\lambda) = \chi(-\Delta_e^N - \lambda^2)^{-1}\chi$, holomorphe pour $\Im\lambda < 0$, se prolonge méromorphiquement à un voisinage conique $\mathcal{V}$ de l'axe réel. Les pôles de ce prolongement méromorphe sont appelés résonances de l'opérateur $-\Delta_e^N$ dans $\mathcal{V}$. z_0 étant une résonance, on définit sa multiplicité par $\mathrm{mult}(z_0) = \mathrm{rang}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(z_0)} R_\chi(\lambda)d\lambda^2\right)$ où $\gamma(z_0)$ est un cercle de rayon assez petit (Voir [SjZw91]).

P.Stefanov et G.Vodev [StVo94] ont commencé par montrer que dans le cas de la boule de $\mathbb{R}^3$ il existe une suite de résonances (z_j) vérifiant $0 < \Im z_j < Ce^{-\gamma\Re z_j}$ où $C > 0, \gamma > 0$. Ils ont ensuite montré qu'il existait une suite de résonances (z_j) vérifiant $0 < \Im z_j < C_N(\Re z_j)^{-N}$ pour tout N, d'abord dans le cas d'un obstacle strictement convexe à bord $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^3$ [StVo95], puis pour un obstacle à bord $\mathcal{C}^\infty$ quelconque en dimension impaire d'espace [StVo96]. J.Sjöstrand et G.Vodev [SjVo97] ont donné l'asymptotique du nombre de résonances de Rayleigh dans un domaine proche de l'axe réel de la forme $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, |\Im\lambda| \le |\lambda|^{-\delta}, \Re\lambda \ge C_0\}$ (δ, $C_0 > 0$), pour une classe d'obstacles incluant le cas strictement convexe et en toute dimension d'espace autre que 4. Soit $\{\lambda_j\}$ les résonances de Δ_e^N dans Λ, ils obtiennent quand $r \longrightarrow \infty$

$$\sharp\{\lambda_j, |\lambda_j| \le r\} = (2\pi c_R)^{-n+1}\mathrm{Vol}\{x \in \mathbb{R}^{n-1}, |x| \le 1\}\mathrm{Vol}(\Gamma)r^{n-1} + O(r^{n-2}) \qquad (1)$$

P.Stefanov [St00] a donné aussi une très bonne minoration du nombre de résonances de Rayleigh pour un obstacle quelconque en dimension 3. G.Vodev [Vo97] a étendu le résultat énoncé dans le cas de la boule de $\mathbb{R}^3$ à toute dimension impaire d'espace dès que l'une des composantes connexes de l'obstacle est à bord analytique. Dans le cas d'un obstacle à bord $\mathcal{C}^\infty$ en dimension 3, M.Bellassoued [Be00] a montré l'existence d'un domaine de la forme $\{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, \Im\lambda \ge e^{-C\Re\lambda}, \Re\lambda \ge C_0\}$ (C_0, $C > 0$) sans résonance.

Notre objectif est de localiser les résonances dans des boules exponentiellement petites en fonction de la partie réelle des résonances et de préciser le taux de décroissance exponentielle de la partie imaginaire des résonances. L'intérêt de cette question réside dans le lien avec le problème d'évolution associé (pour des énoncés précis, voir les travaux de S.-H.Tang et M.Zworski [TaZw00] et P.Stefanov [St01]). Par exemple, on a des états à durée de vie d'autant plus grande que les résonances sont proches de l'axe réel.

L'argument de Stefanov et Vodev était basé sur une estimation à-priori du prolongement méromorphe de la résolvante tronquée et une application du principe de Phragmen-Lindelöf. L'existence de quasimodes contredit alors l'absence de résonance près du réel.

En reprenant l'idée de Stefanov et Vodev, mais en appliquant le principe du maximum dans des petits voisinages d'un quasimode, S.-H.Tang et M.Zworski [TaZw98] ont montré, pour des perturbations du Laplacien et en toutes dimensions d'espace, que près d'un quasimode réel, pourvu qu'il soit assez grand, existait au moins une résonance. Ensuite, Stefanov [St99] a étendu les résultats de Tang et Zworski au cas des quasimodes multiples et des clusters de quasimodes. Il montre que près de chaque groupe de quasimodes (pourvu qu'ils soient presque orthogonaux entre eux) existent au moins autant de résonances (comptées avec multiplicités) qu'il y a de quasimodes. Cela permet de localiser les résonances dans des boules et pas seulement près de l'axe réel. Nous allons donc construire des quasimodes pour le système de l'élasticité avec une précision exponentiellement petite.

(**H.1**) Nous supposons maintenant que la dimension est deux et que l'obstacle est strictement convexe à bord analytique.

Dans la section 2 nous construisons des quasimodes de Rayleigh supportés près du bord de l'obstacle avec des erreurs exponentiellement petites, ce qui nous permet de localiser les résonances dans des boules exponentiellement petites (voir [Ga2] pour plus de détails).
Dans la section 3 nous étendons la construction de ces quasimodes loin de l'obstacle et nous précisons leur décroissance exponentielle (voir [Ga1] pour plus de détails). Nous remarquons ensuite que dans le cas du cercle (voir [Ga3]), ces quasimodes décrivent bien le comportement des fonctions résonantes.

2 Construction de quasimodes au voisinage de l'obstacle

Introduisons l'opérateur de Dirichlet-Neumann $\mathcal{N}(\lambda)$ défini par :

$$\mathcal{N}(\lambda) : H^s(\Gamma) \ni f \mapsto Bv\,|_\Gamma \in H^{s-1}(\Gamma)\,,$$

où $H^s(\Gamma)$ désigne les espaces de Sobolev usuels sur Γ et v est solution du problème

$$\begin{cases} (\Delta_e + \lambda^2) & v & = & 0 & & \text{dans} & \Omega \\ & v & = & f & & \text{sur} & \Gamma \\ & v & - & \lambda & -\text{sortante} & & \end{cases}$$

Rappelons que la fonction v est dite λ-sortante si pour $r_0 \gg 1$ nous avons

$$v_{|_{|x|\geq r_0}} = R_0(\lambda) g_{|_{|x|\geq r_0}}$$

où g appartient à $L^2_{comp}(\Omega)$, est à support indépendant de λ, et $R_0(\lambda)$ est la résolvante libre sortante de $-\Delta_e$ dans $\mathbb{R}^2$; c'est-à-dire que $R_0(\lambda)$ appartient à $\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ pour $\Im\lambda < 0$.
On sait (voir [StVo95] et [Vo97]) que dans la zone elliptique $\mathcal{E} = \{\zeta \in T^*\Gamma \,/\, c_1 \cdot \|\zeta\| > 1\}$, $\mathcal{N}(\lambda)$ est un opérateur pseudodifférentiel analytique à grand paramètre λ ayant pour variété caractéristique $\Sigma = \{\zeta \in T^*\Gamma \,/\, c_R \cdot \|\zeta\| = 1\}$, où c_R est la vitesse de

Rayleigh. C'est l'existence de cette variété caractéristique qui génère les résonances convergeant rapidement vers l'axe réel. Dans le cas de la dimension 2, Σ est simplement la réunion de deux courbes fermées Σ^+ et Σ^-, ce qui explique la simplicité du problème en dimension 2 par rapport aux dimensions supérieures. On va construire des quasimodes localisés près de Σ^+ et de Σ^-.

$\mathcal{O}$ étant strictement convexe, nous définissons des coordonnées d'Euler-Gauss adaptées au problème dans Ω, c'est-à-dire que l'une des variables, que l'on note θ, est l'angle polaire de la normale au bord Γ, et l'autre, que l'on note r, représente la distance à Γ.
Γ étant analytique dans une bande B autour du réel, nous étendons ensuite ces coordonnées dans un voisinage complexe de Γ. Dans la suite, les variétés sont vues comme des sous-variétés du revêtement universel (via les coordonnées d'Euler-Gauss) des complexifiés de Γ ou Ω ou des fibrés cotangents de ces revêtements. On a

$$\Sigma^{\pm} = \left\{(\theta,\eta)/\theta \in B, \eta = \pm c_R^{-1} R(\theta)\right\}$$

où $R(\theta)$ est le rayon de courbure au point de Γ de paramètre θ.
On construit quatre lagrangiennes complexes $\Lambda_j^{\pm}$ de dimensions deux incluses respectivement dans $p_j^{-1}(1)$ et dont la projection sur $T^*\Gamma$ est $\Sigma^{\pm}$. $\Lambda_j^{\pm}$ est formée de courbes du champ hamiltonien complexe H_{p_j} passant par $\Sigma^{\pm}$. Au voisinage de Γ ces lagrangiennes se projettent régulièrement dans l'espace des configurations et la trace de leur projection sur le réel contient un voisinage réel de Γ.

Nous construisons deux solutions BKW $u^{\pm}$ du système

$$\left\{\begin{array}{rcccc} (-h^2\Delta_e - 1)u & = & 0 & \text{près de} & \Gamma \\ B\,u & = & 0 & \text{sur} & \Gamma \end{array}\right. \tag{2}$$

qui décroissent exponentiellement près du bord de l'obstacle. (Ici Γ est en fait remplaçé par son revêtement universel). La solution BKW $u^{\pm}$ que l'on obtient vit à la fois sur les deux lagrangiennes $\Lambda_1^{\pm}$ et $\Lambda_2^{\pm}$. Elle est de la forme

$$u^{\pm}(r,\theta;h) = u^{1,\pm}(r,\theta;h)\exp\left(i\phi_1^{\pm}(r,\theta)/h\right) + u^{2,\pm}(r,\theta;h)\exp\left(i\phi_2^{\pm}(r,\theta)/h\right) \tag{3}$$

où $\phi_j^{\pm}$ est une fonction holomorphe associée à la $\mathbb{C}$-lagrangienne $\Lambda_j^{\pm}$ et

$$u^{j,\pm}(r,\theta;h) = \sum_{k\geq 0} u_k^{j,\pm} h^k$$

est un symbole analytique, ce qui permettra après ressommation d'obtenir des erreurs exponentiellement petites par rapport à h.
Pour obtenir cela on pourrait chercher u solution de (2) directement sous la forme (3) mais cela conduit à d'énormes difficultés techniques pour contrôler $u_k^{j,\pm}$ en fonction de k et montrer ainsi que l'on a des symboles analytiques. Pour éviter cela on s'y prend de la façon suivante :
Nous faisons une construction BKW en deux temps en se ramenant à un problème de Dirichlet à l'aide de l'opérateur de Dirichlet-Neumann. Près de la variété caractéristique $\Sigma^{\pm}$, l'opérateur $N(h) := h\mathcal{N}(h^{-1})$ est un opérateur pseudo-différentiel analytique. Nous montrons que les valeurs propres de son symbole principal ne se croisent pas au voisinage du complexifié de $\Sigma^{\pm}$. Cela nous permet de diagonaliser $N(h)$ près du complexifié de $\Sigma^{\pm}$ (ce sont des idées d'Helffer-Sjöstrand [HeSj90]) et de

construire une solution BKW $V^\pm$ de l'équation $N(h)\,V=0$, qui vit dans le complexifié de $\Sigma^\pm$. On obtient

$$V^\pm(\theta;h)=v^\pm(\theta;h)\exp\left(\pm i\frac{c_R^{-1}}{h}\int_0^\theta R(s)\,ds\right)$$

où $v^\pm(\theta;h)$ est un symbole analytique.
On construit ensuite une solution BKW du problème de Dirichlet suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccc}(-h^2\Delta_e-1)u & = & 0 & \text{près de} & \Gamma\\ u & = & V^\pm & \text{sur} & \Gamma\end{array}\right.$$

On diagonalise pour cela le système dans Ω et la condition de Dirichlet au bord devient une perturbation $O(h)$ d'une condition de Dirichlet découplée mais n'est pas découplée. (C'est lié au fait que la solution $u^\pm$ que l'on construit vit à la fois sur les deux lagrangiennes). On adapte ensuite à notre cas la démonstration du théorème 9.3 dans [Sj82].

On obtient une condition de quantification comme condition de recollement de la solution $u^\pm$:

$$d(h)+c_R^{-1}\ell(\Gamma)/h=k2\pi\quad,\quad k\in\mathbb{Z}\tag{4}$$

où $d(h)$ est un symbole analytique réel.
En démontrant des résultats sur la composition des symboles analytiques ne dépendant que de h on montre que la condition de quantification (4) est vérifiée pour un symbole analytique réel de la variable $\dfrac{1}{k}$ ($k\in\mathbb{N}^*$)

$$h_k=\frac{\ell(\Gamma)}{2\pi c_R}k^{-1}+\sum_{j\geq 2}e_jk^{-j}\tag{5}$$

Après ressommation des symboles analytiques on obtient donc des fonctions $u^\pm(h)$ vérifiant pour $h\in\{h_k\}$

$$\left\{\begin{array}{ccccc}(-h^2\Delta_e-1)u^\pm & = & O\left(e^{-C/h}\right) & \text{près de} & \Gamma\\ Bu^\pm & = & O\left(e^{-C/h}\right) & \text{sur} & \Gamma\\ u^\pm(r,\theta+2\pi;h)-u^\pm(r,\theta;h) & = & O\left(e^{-C/h}\right) & & \end{array}\right.\tag{6}$$

où $C>0$. En tronquant ces fonctions près du bord, en leur rajoutant un terme exponentiellement petit à support compact et en les normant on obtient des fonctions $W^\pm(h)$, 2π-périodiques pour $h\in\{h_k\}$, à support compact dans Ω et vérifiant

$$\left\{\begin{array}{ccc}(W^+,W-)_{L^2(\Omega)} & = & O\left(e^{-C/h}\right)\\ BW^\pm_{|\Gamma} & = & O\\ \left\|\left(-\Delta_e-\frac{1}{h_k^2}\right)W^\pm\right\|_{L^2(\Omega)} & = & O\left(e^{-C/h}\right)\end{array}\right.\tag{7}$$

Les résultats de Stefanov [St99] nous donnent alors l'existence de deux résonances $z_{k,+}$ et $z_{k,-}$ (comptées avec multiplicités) exponentiellement proches (en la variable k) de chaque nombre $\dfrac{1}{h_k}$. Dans le cas de la dimension deux l'asymptotique (1) donne

$$\sharp\{\lambda_j,|\lambda_j|\leq r\}=\frac{\ell(\Gamma)}{\pi c_R}r+O(1)\tag{8}$$

Cela nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Il existe deux suites de résonances de Rayleigh $z_{k,+}$ et $z_{k,-}$ (comptées avec multiplicités) vérifiant*

$$|\Re z_{k,+} - \Re z_{k,-}| = O\left(\exp(-C\Re z_{k,\pm})\right) \quad et \quad \Im(z_{k,\pm}) = O\left(\exp(-C\Re z_{k,\pm})\right)$$

où C est une constante > 0.
$k^{-1}\Re z_{k,\pm}$ est un symbole analytique d'ordre 0 de la variable k^{-1} et

$$\Re(z_{k,\pm}) = \frac{2\pi c_R}{\ell(\Gamma)} k + \sum_{m\geq 0} a_m k^{-m} .$$

Soit $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} / |\Im z| \leq |z|^{-\delta}, \Re z \geq C_0\}$ où δ, $C_0 > 0$; si C_0 est assez grand il n'y a pas d'autres résonances de Rayleigh dans Λ que les nombres $z_{k,\pm}$.

3 Construction de quasimodes à grande durée de vie

On voudrait maintenant préciser le taux de décroissance exponentielle de la partie imaginaire des résonances, c'est-à-dire le C optimal dans le théorème. Soit v une fonction résonante associée à l'une des résonances $z_{k,+}$ ou $z_{k,-}$, on a $-\Delta_e v = z^2 v$ et $Bv_{|\Gamma} = 0$. Soit $r_0 > 0$, on considère Γ_0 la courbe d'équation $r = r_0$ et Ω_0 l'ouvert connexe de frontière $\Gamma \cup \Gamma_0$. La formule de Green dans Ω_0 donne

$$\int_{\Omega_0} -\Delta_e v \cdot \bar{v} - \int_{\Omega_0} v \cdot -\Delta_e \bar{v} = -\int_{\Gamma_0} Bv \cdot \bar{v} - B\bar{v} \cdot v$$

puis

$$\Im(z^2)\|v\|^2_{L^2(\Omega_0)} = -\Im\left(\int_{\Gamma_0} Bv \cdot \bar{v}\right) \tag{9}$$

On espère, mais nous ne sommes pas pour l'instant en mesure de le montrer, que v est assez proche d'une combinaison linéaire des quasimodes u^+ et u^-. C'est ce qui motive la construction des quasimodes le plus loin possible de l'obstacle, en fait jusqu'à ce qu'ils oscillent transversalement à une courbe du type Γ_0, et l'étude de leur décroissance exponentielle. Pour faire cela, il va falloir rajouter des hypothèses sur le bord de l'obstacle. En effet pour que les traces sur $\mathbb{R}^2$ des projections dans l'espace des configurations des courbes du champ hamiltonien H_{p_j} soient assez loin de l'obstacle il faut qu'elles soient issues de points (θ, η) de $\Sigma^\pm$ avec θ assez loin dans le complexe.

(**H.2**) On suppose donc maintenant que Γ est analytique dans une bande complexe assez large (on sait en préciser la largeur en fonction des vitesses d'ondes) et qu'il est assez proche d'un cercle.

On peut alors étendre les coordonnées d'Euler-Gauss assez loin dans le complexe. On montre l'existence de sous-variétés $\mathcal{H}_j^\pm$ de $\Lambda_j^\pm$ de dimension 1 sur lesquelles la projection canonique Π est singulière. Les caustiques $\Pi(\mathcal{H}_j^\pm) = \mathcal{C}_j^\pm$ sont des variétés complexes de dimension 1. Dans le cas où Γ est un cercle de rayon R, la trace de $\mathcal{C}_j^\pm$ sur le réel est un cercle concentrique de rayon $c_j c_R^{-1} R$. Si Γ n'est pas un cercle mais assez proche d'un cercle, cette trace est un ensemble fini de points non vide

(indépendant de $\pm$). Ces points sont aussi proches que l'on veut de la trace dans le cas du cercle pourvu que Γ soit assez proche d'un cercle.
La construction BKW faite dans la section précédente reste donc valable dans un domaine compact donné à l'avance auquel on a enlevé deux couronnes contenant respectivement $\mathcal{C}_1^\pm \cap \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C}_2^\pm \cap \mathbb{R}^2$. En fait, dès que l'on décolle du bord de l'obstacle la solution $u^\pm$ vit asymptotiquement uniquement sur la lagrangienne $\Lambda_1^\pm$ puisque la composante de $u^\pm$ qui vit sur la lagrangienne associée à la plus grande des deux vitesses d'ondes ($\Lambda_2^\pm$) décroî t exponentiellement plus vite et plus loin de l'obstacle que la composante de $u^\pm$ qui vit sur la lagrangienne associée à la plus petite des deux vitesses d'ondes ($\Lambda_1^\pm$). Dans la zone $\mathcal{D}$ où la construction BKW est valable, en ressommant les symboles analytiques, on a pour $h \in \{h_k\}$

$$\left\{\begin{array}{lclcc} (-h^2\Delta_e - 1)u^\pm & = & O\left(e^{-(C+\Im\phi_1^\pm)/h}\right) & \text{dans} & \mathcal{D} \\ Bu^\pm & = & O\left(e^{-C/h}\right) & \text{sur} & \Gamma \\ u^\pm(r,\theta+2\pi;h) - u^\pm(r,\theta;h) & = & O\left(e^{-(C+\Im\phi_1^\pm)/h}\right) & \text{dans} & \mathcal{D} \end{array}\right. \tag{10}$$

On va maintenant préciser le comportement de $u^\pm$:
- $u^\pm$ décroî t exponentiellement ($\Im\phi_1^\pm$ croî t) jusqu'à $\mathcal{C}_1^\pm \cap \mathbb{R}^2$.
- Dans le cas où Γ est un cercle, $u^\pm$ arrête de décroî tre exponentiellement après $\mathcal{C}_1^\pm \cap \mathbb{R}^2$ ($\Im\phi_1^\pm$ devient constante) et se met à osciller transversalement à Γ_0.
- Dans le cas où Γ est une perturbation analytique d'un cercle, après $\mathcal{C}_1^\pm \cap \mathbb{R}^2$ $u^\pm$ arrête de décroî tre exponentiellement suivant un nombre fini de rayons $d_j^\pm$ en nombre ≥ 4. $\Im\phi_1^\pm$ est constante sur chacun de ces rayons et elle est minimale sur l'un de ceux-ci. d_j^+ est la trace sur $\mathbb{R}^2$ de la projection d'une courbe du champ hamiltonien incluse dans Λ_1^+ et issue d'un point (x_j, ξ_j) du complexifié de Σ^+. On obtient

$$2\Im\phi_1^+|_{d_j^+} = \Im\left(\int_{L_j} \xi \cdot dx\right) \tag{11}$$

où $L_j = L_{j,1} \cup L_{j,2}$ est une courbe fermée. $L_{j,1}$ est la projection d'une courbe du champ hamiltonien H_{p_1} joignant x_j à $\overline{x_j}$ et $L_{j,2}$ est une courbe incluse dans le complexifié de Γ et joignant $\overline{x_j}$ à x_j.

On pense que c'est la plus petite des actions définies dans (11) (pour les différents rayons) qui donnera le taux de décroissance exponentielle de la partie imaginaire des résonances de Rayleigh.
En tout cas, c'est exactement ce que l'on obtient lorsque Γ est un cercle (dans ce cas toutes les actions sont égales). Dans ce cas, on a $z_{k,+} = z_{k,-}$ (les résonances sont doubles), et on peut obtenir, par une méthode complètement différente (voir [Ga3]), un développement asymptotique des fonctions résonantes à l'extérieur de $\mathcal{C}_1^\pm \cap \mathbb{R}^2$. Les fonctions résonantes associées à $z_k = z_{k,+} = z_{k,-}$, de norme 1 dans $L^2(\Omega_0)$, vérifient les asymptotiques suivantes :
Soit $\delta > 1$. Si $\delta R < r + R < \frac{1}{\delta} c_1 c_R^{-1} R$,

$$u_k = \frac{1}{r+R}(\Re z_k)^{1/2}\left(1 + O\left((\Re z_k)^{-1/2}\right)\right) \sum_{\sigma=+,-} \delta_{\sigma k} e^{i\phi_1^\sigma \Re z_k}$$

$$\times\left(\frac{A_\sigma}{\left(c_1^2 c_R^{-2} R^2 - (r+R)^2\right)^{1/4}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + B_\sigma \left(c_1^2 c_R^{-2} R^2 - (r+R)^2\right)^{1/4} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}\right),$$

et si $r + R > \delta c_1 c_R^{-1} R$,

$$u_k = \frac{1}{r+R} (\Re z_k)^{1/2} \left(1 + O\left((\Re z_k)^{-1/2}\right)\right) \sum_{\sigma=+,-} \delta_{\sigma k} e^{i\phi_1^\sigma \Re z_k}$$

$$\times \left(\frac{C_\sigma}{\left((r+R)^2 - c_1^2 c_R^{-2} R^2\right)^{1/4}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + D_\sigma \left((r+R)^2 - c_1^2 c_R^{-2} R^2\right)^{1/4} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right) \tag{12}$$

où A_σ, B_σ, C_σ, D_σ sont des constantes et $|\delta_k|^2 + |\delta_{-k}|^2 = 1$.
Pour obtenir le résultat il suffit de choisir Γ_0 tel que son intérieur contienne $\mathcal{C}_1^\pm \cap \mathbb{R}^2$ et (9) et (12) donnent le résultat.

Bibliographie

[Be00] M.Bellassoued, *Distributions of resonances and decay rate of the local energy for the elastic wave equation.* Comm.Math.Phys.,vol.**215**, 2000, p.375-408.

[Bur98] N.Burq, *Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel.* Acta Math. **180**, 1998, $n°1$, pp.1-29.

[Ga1] D.Gamblin, *Résonances de Rayleigh en dimension deux.* Thèse de doctorat de l'Univ. Paris 13, 2002.

[Ga2] D.Gamblin, *Résonances de Rayleigh en dimension deux.* A paraître au Bulletin de la SMF.

[Ga3] D.Gamblin, *Partie imaginaire des résonances de Rayleigh dans le cas d'une boule.* En préparation.

[GrSj] A.Grigis, J.Sjöstrand, *Microlocal analysis for differential operators.* London Mathematical Society, Lecture note series **196**.

[HeSj86] B.Helffer, J.Sjöstrand, *Résonances en limite semi-classique.* Mémoire de la S.M.F.(N.S.), $n°$ 24-25, 1986.

[HeSj90] B.Helffer, J.Sjöstrand, *Analyse semi-classique pour l'équation de Harper* II. Mémoire de la S.M.F., **40**, 1990.

[IN89] M.Ikehata, G.Nakamura, *Decaying and nondecaying properties of the local energy of an elastic wave outside an obstacle.* Japan Journal Appl. Math., vol **6**, 1989, p.83-95.

[K92] M.Kawashita, *On the local-energy decay property for the elastic wave equation with the Neumann boundary conditions.* Duke Mathematical Journal, vol.**67**, 1992, p.333-351.

[SjVo97] J.Sjöstrand, G.Vodev, *Asymptotics of the number of Rayleigh resonances.* Matematische Annalen, 309, p.287-306, 1997.

[Sj82] J.Sjöstrand, *Singularités analytiques microlocales.* Astérisque vol. **95**, 1982.

[SjZw91] J.Sjöstrand, M.Zworski, *Complex scaling method and the distribution of scattering poles.* Journal of the American Mathematical Society, vol.**4**, 1991, p.729-769.

[St99] P.Stefanov, *Quasimodes and resonances : Sharp lower bounds.* Duke Mathematical Journal, vol.**99**, $n°$ 1, 1999, p.75-92.

[St00] P.Stefanov, *Lower bound of the number of the Rayleigh resonances for arbitrary body.* Indiana University Math. Journal, vol.**49**, $n°1$, 2000, p.405-426.

[St01] P.Stefanov, *Resonance expansions and Rayleigh waves.* Math.Res.Lett.**8** (1-2) (2001), p.105-124.

[StVo94] P.Stefanov, G.Vodev, *Distribution of resonances for the Neumann problem in linear elasticity outside a ball.* Annales de l'Institut H.Poincaré (Physique théorique), vol. **60**, $n°3$, 1994, p.303-321.

[StVo95] P.Stefanov, G.Vodev, *Distribution of resonances for the Neumann problem in linear elasticity in the exterior of a strictly convex body.* Duke Mathematical Journal, vol. **78**, $n°3$, 1995, p.677-714.

[StVo96] P.Stefanov, G.Vodev, *Neumann resonances in linear elasticity for an arbitrary body.* Comm. Math. Phys., vol.**176**, 1996, p.645-659.

[TaZw00] S.-H.Tang, M.Zworski, *Resonances expansions of scattered waves.* Comm. Pure Appl. Math. **53** (2000), p.1305-1334.

[Tay79] M.Taylor, *Rayleigh waves in linear elasticity as a propagation of singularities phenomenon*, in proceedings of the Conference on Partial Differential Equations and Geometry, Marcel Dekker, New York, 1979, p.273-291.

[Vo97] G.Vodev, *Existence of Rayleigh resonances exponentially close to the real axis.* Annales de l'Institut H.Poincaré (Physique théorique), vol.**67**, $n°1$, 1997, p.41-57.