Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2003-2004

Jean-Yves Chemin

Propriétés lagrangiennes des solutions du système de Navier-Stokes incompressible

Séminaire É. D. P. (2003-2004), Exposé n° V, 11 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2003-2004____A5_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram
Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Propriétés lagrangiennes des solutions du système de Navier-Stokes incompressible

Jean-Yves CHEMIN
Centre de Mathématiques
École polytechnique, 91 128 Palaiseau Cedex, France
chemin@math.polytechnique.fr

Résumé *Dans ce texte, après un bref aperçu historique, nous étudions les propriétés lagrangiennes des solutions des équations de Navier-Stokes.*

Abstract *In this text, after a brief historical survey, we study lagrangian properties of the solutions of Navier-Stokes equations.*

Introduction

Commençons par quelques rappels sur le système de Navier-Stokes incompressible qui s'écrit

$$
(NS_\nu)\left\{\begin{array}{rcl}
\partial_t v + \operatorname{div}(v\otimes v) - \nu\Delta v & = & -\nabla p\\
\operatorname{div} v & = & 0\\
v_{|t=0} & = & v_0
\end{array}\right.
$$

où $v(t,x)$ est un champ de vecteurs sur $\mathbf{R}^d$, p une fonction sur $\mathbf{R}^d$ et

$$
\operatorname{div} v = \sum_{j=1}^d \frac{\partial v^j}{\partial x_j}\,,\ \operatorname{div}(v\otimes v)^j = \operatorname{div}(v^j v) \quad \text{et} \quad \Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\cdot
$$

On se restreindra à l'espace $\mathbf{R}^d$ tout entier. Pour plus de détails sur les questions et résultats de base sur ce sytème, le lecteur pourra consulter les livres [2], [8] et [12].

En appliquant l'opérateur de divergence au système (NS_ν), on obtient

$$
\partial_t \operatorname{div} v + \sum_{1\leq j,k\leq d} \frac{\partial^2(v^j v^k)}{\partial x_j \partial x_k} - \nu\Delta \operatorname{div} v = -\Delta p.
$$

La condition $\operatorname{div} v = 0$ implique alors que $-\Delta p = \displaystyle\sum_{1\leq j,k\leq d} \frac{\partial^2(v^j v^k)}{\partial x_j \partial x_k}$ et donc que

$$p = -\sum_{1\leq j,k\leq d} \Delta^{-1}\frac{\partial^2(v^j v^k)}{\partial x_j \partial x_k} \quad \text{avec} \quad \Delta^{-1}\frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_k} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-2}\xi_j\xi_k\widehat{a}).$$

Définissons les applications bilinéaires Q et B par

$$Q(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div} u\otimes v - \sum_{1\leq k,\ell\leq d} \nabla\Delta^{-1}\frac{\partial^2(u^k v^\ell)}{\partial x_k \partial x_\ell} \quad \text{avec} \quad \Delta^{-1}\frac{\partial^2 a}{\partial x_k \partial x_\ell} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\xi_k\xi_\ell}{|\xi|^2}\widehat{a}\Big) \quad \text{et} \tag{1}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\partial_t - \nu\Delta)B(u,v) & = & Q(u,v) \\ w_{|t=0} & = & 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

Résoudre le système (NS_ν) est équivalent à trouver u tel que

$$(NSG_\nu) \qquad u = e^{t\nu\Delta}u_0 + B(u,u)$$

c'est-à-dire à trouver un point fixe de l'application $u \longmapsto e^{t\nu\Delta}u_0 + B(u,u)$.

1 Théorèmes d'existence globale à donnnées petites

1.1 Rappel historique

Le premier théorème d'existence et d'unicité globale pour l'équation de Navier-Stokes tridimensionnelle a été démontré par J. Leray en 1934 dans [13]. Rappelons ce théorème.

Théorème *Si la donnée initiale est dans l'espace $H^1(\mathbf{R}^3)$ et de quasi-divergence nulle, il existe alors un unique temps maximal strictement positif T et une unique solution v de classe C^∞ sur $]0,T[$, continue en temps à valeurs $L^2(\mathbf{R}^3)$, telle que $v\in L^2_{loc}([0,T[;L^\infty)$ et telle que*

$$\|v(t)\|^2_{L^2} + 2\nu\int_0^t \|\nabla v(t')\|^2_{L^2}dt' = \|v_0\|^2_{L^2}.$$

De plus, le temps d'existence est infini si

$$\|v_0\|_{L^2}\|\nabla v_0\|_{L^2} \leq c\nu^2 \quad \textit{ou bien si} \quad \|v_0\|^2_{L^2}\|v_0\|_{L^\infty} \leq c\nu^3. \tag{3}$$

Nous ne nous intéresserons ici qu'aux petites solutions, la mesure de la petitesse étant bien sûr très importante. La condition (3) a été remplacée par la petitesse de la norme $\|\cdot\|_{\dot H^{\frac12}}$ avec

$$\|v_0\|^2_{\dot H^{\frac12}} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}^3} |\xi|\,|\widehat{v}_0(\xi)|^2 d\xi \leq c\nu^2,$$

par H. Fujita et T. Kato en 1964 (voir [9]) puis par celle de la norme L^3 par T. Kato en 1983 (voir [10]). Contrairement à Fujita et Kato, J. Leray utilise de façon clé les propriétés particulières du système de Navier-Stokes incompressible.

1.2 Les espaces de Kato

Définition 1.1 *On désigne par E_p l'espace des fonctions $u \in C(]0,+\infty[;L^p)$ telles que*

$$\|u\|_{E_p} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t>0} (\nu t)^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{p}\right)} \|u(t)\|_{L^p} < \infty.$$

Nous allons démontrer le thèorème suivant.

Théorème 1.1 *Soit $p \in]3,\infty[$, il existe c telle que, si u_0 est une donnée initiale telle que*

$$\|e^{\nu t\Delta} u_0\|_{E_p} \leq c\nu, \tag{4}$$

alors il existe une unique solution u dans E_p telle que $\|u\|_{E_p} \leq 2c\nu$.

Ce théorème résulte du fait que, pour tout $p \in]3,+\infty[$, il existe une constante C telle que

$$\|B(u,v)\|_{E_p} \leq \frac{C}{\nu} \|u\|_{E_p} \|v\|_{E_p}. \tag{5}$$

En posant $E_j(z) \stackrel{\text{déf}}{=} -2z_j e^{-|z|^2}$, on a, par définition de B,

$$\pi^{\frac{3}{2}} B^j(u,v)(x) = \sum_{k,\ell} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^3} (4\nu(t-s))^{-2} E_j\left(\frac{x-y}{(4\nu(t-s))^{\frac{1}{2}}}\right) A_{k,\ell}(D)(u^k(s)v^\ell(s))(y)dsdy,$$

les $A^j_{k,\ell}$ étant des mulplicateurs de Fourier C^∞ homogènes de degré 0. Ce sont donc des opérateurs bornés sur L^q pour $q \in]1,\infty[$ donc en particulier pour $q = p/2$. Nous avons ainsi

$$\|A^j_{k,\ell}(D)(u^k(s)v^\ell(s))\|_{L^{\frac{p}{2}}} \leq \frac{C}{(\nu s)^{1-\frac{3}{p}}} \|u\|_{E_p} \|v\|_{E_p}.$$

Ainsi donc, d'après l'inégalité de Young, on obtient,

$$\begin{aligned} \|B(u,v)(t)\|_{L^p} \leq C\|u\|_{E_p}\|v\|_{E_p} \int_0^t (4\pi\nu(t-s))^{-\frac{3}{2}} \left\| \frac{|\cdot|}{(4\nu(t-s))^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4\nu(t-s)}} \right\|_{L^{p'}} \\ \times \frac{1}{(4\nu(t-s))^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{(\nu s)^{1-\frac{3}{p}}}\, ds. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|B(u,v)(t)\|_{L^p} &\leq \frac{C}{\nu^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2p}}} \|u\|_{E_p}\|v\|_{E_p} \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2p}} s^{1-\frac{3}{p}}} \\ &\leq \frac{C}{\nu} \|u\|_{E_p}\|v\|_{E_p} \frac{1}{(\nu t)^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{p}\right)}}. \end{aligned}$$

L'inégalité (5) et donc le théorème 1.1 sont démontrés par l'application du schéma de Picard.

1.3 Interprétation en termes d'espaces de Besov

Nous allons traduire la condition (4) en termes d'analyse de Fourier. Introduisons une partition de l'unité dyadique, i.e. une fonction φ de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d\backslash\{0\})$ et une fonction χ de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ telles que

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^d\,,\ \chi(\xi)+\sum_{j\geq 0}\varphi(2^{-j}\xi)=1 \quad \text{et} \quad \forall \xi\in\mathbf{R}^d\backslash\{0\}\,,\ \sum_{j\in\mathbf{Z}}\varphi(2^{-j}\xi)=1.$$

On pose alors

$$\begin{aligned}\Delta_j u &= \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-j}\xi)\widehat{u}) = 2^{jd}h(2^j\cdot)\star u \quad \text{avec} \quad h=\mathcal{F}^{-1}\varphi \quad \text{et}\\ S_j u = \sum_{j'\leq j-1}\Delta_p u &= \mathcal{F}^{-1}(\chi(2^{-j}\xi)\widehat{u}) = 2^{jd}\widetilde{h}(2^j\cdot)\star u \quad \text{avec} \quad \widetilde{h}=\mathcal{F}^{-1}\chi.\end{aligned}$$

Définissons maintenant une classe d'espaces de Besov homogènes.

Définition 1.2 *Soit s un réel et $(p,r)\in[1,\infty]^2$. L'espace B^s_p est l'espace des distributions tempérées u telles que $\lim_{j\to-\infty} S_j u = 0$ dans $\mathcal{S}'$ et telles que*

$$\|u\|_{B^s_p} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_j 2^{js}\|\Delta_j u\|_{L^p}.$$

Exemple Si $\sigma\in]0,d[$, alors $|\cdot|^{-\sigma}\in B_p^{\frac{d}{p}-\sigma}$. En effet, par définition de l'opérateur Δ_j, on a

$$\Delta_j(|\cdot|^{-\sigma})(x) = 2^{j\sigma}h_\sigma(2^jx) \quad \text{avec} \quad h_\sigma(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbf{R}^d} h(y-z)|z|^{-\sigma}dz.$$

Comme $\widehat{h}_\sigma(\xi) = \varphi(\xi)\mathcal{F}(|\cdot|^{-\sigma}) = c_d\varphi(\xi)|\xi|^{\sigma-d}$, la fonction $\widehat{h}_\sigma$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ donc en particulier h_σ est dans L^p pour tout $p\in[1,\infty]$; ceci implique que

$$\|\Delta_j(|\cdot|^{-\sigma})\|_{L^p} = 2^{j\left(\sigma-\frac{d}{p}\right)}\|h_\sigma\|_{L^p}.$$

Nous allons maintenant faire le lien entre espace de Besov et noyau de la chaleur.

Proposition 1.1 *Soient $s\geq 0$ et $p\in[1,\infty]$. Il existe une constante C telle que*

$$\forall u\in\mathcal{S}' \,/\, \lim_{j\to-\infty}S_ju=0\,,\quad C^{-1}\|u\|_{B_p^{-s}} \leq \sup_{t>0}\|t^{\frac{s}{2}}e^{t\Delta}u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{B_p^{-s}}.$$

La condition (4) est donc une condition de petitesse de la norme de l'espace $B_p^{-1+\frac{3}{p}}$. La preuve de ce résultat classique repose sur le lemme suivant, démontré par exemple dans [5].

Lemme 1.1 *Soit $\mathcal{C}$ une couronne. Il existe c et C telles que, pour tout $p\in[1,+\infty]$, on a*

$$\forall (t,\lambda)\in]0,+\infty[^2\,,\quad \text{Supp }\widehat{u}\subset\lambda\mathcal{C} \Rightarrow \|e^{t\Delta}u\|_{L^p}\leq Ce^{-ct\lambda^2}\|u\|_{L^p}.$$

Ce lemme assure que

$$\|t^{\frac{s}{2}}\Delta_j e^{t\Delta}u\|_{L^p} \leq C t^{\frac{s}{2}} 2^{js} e^{-ct2^{2j}} 2^{-js}\|\Delta_j u\|_{L^p}.$$

Comme u appartient à $\mathcal{S}'_h$, nous avons

$$\begin{aligned}\|t^{\frac{s}{2}} e^{t\Delta}u\|_{L^p} &\leq \sum_{j\in\mathbf{Z}} \|t^{\frac{s}{2}}\Delta_j e^{t\Delta}u\|_{L^p}\\ &\leq C\|u\|_{B_p^{-s}} \sum_{j\in\mathbf{Z}} t^{\frac{s}{2}} 2^{js} e^{-ct2^{2j}}.\end{aligned}$$

Le fait que $\sup\limits_{t>0} \sum\limits_{j\in\mathbf{Z}} t^{\frac{s}{2}} 2^{js} e^{-ct2^{2j}}$ soit fini assure le première inégalité. Pour démontrer la seconde inéqualité, observons que, pour s strictement positif, nous avons

$$\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}} |\xi|^{s+1} e^{-t|\xi|^2} dt = \int_0^\infty \tau^{\frac{s}{2}} e^{-\tau} d\tau \stackrel{\text{def}}{=} C_s,$$

ce qui permet d'écrire

$$\Delta_j u = C_s^{-1} \int_0^\infty t^{\frac{s}{2}} (-\Delta)^{\frac{s+1}{2}} e^{t\Delta}\Delta_j u dt.$$

Comme $e^{t\Delta}u = e^{\frac{t}{2}\Delta} e^{\frac{t}{2}\Delta}u$, le lemme 1.1 implique que

$$\begin{aligned}\|\Delta_j u\|_{L^p} &\leq C\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}} 2^{j(s+1)} e^{-ct2^{2j}} \|\Delta_j e^{\frac{t}{2}\Delta}u\|_{L^p} dt\\ &\leq C\int_0^\infty t^{\frac{s}{2}} 2^{j(s+1)} e^{-ct2^{2j}} \|e^{t\Delta}u\|_{L^p} dt.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}\|\Delta_j u\|_{L^p} &\leq C\Big(\sup_{t>0} t^s \|e^{t\Delta}u\|_{L^p}\Big) \int_0^\infty 2^{2j(s+1)} e^{-ct2^{2j}} dt\\ &\leq C 2^{2js} \Big(\sup_{t>0} t^s \|e^{t\Delta}u\|_{L^p}\Big).\end{aligned}$$

La proposition 1.1 est ainsi démontrée.

2 Une autre approche pour des données petites dans $B_p^{-1+\frac{3}{p}}$

2.1 Un effet régularisant de type L^1 en temps sur l'équation de la chaleur

Cet effet régularisant résulte du lemme 1.1. Supposons que u_0 appartienne à B_p^s. On en déduit alors que $\|\Delta_j e^{\nu t\Delta}u_0\|_{L^p} \leq Ce^{-c\nu t2^{2j}}\|\Delta_j u_0\|_{L^p}$ et donc par intégration en temps que

$$\|\Delta_j e^{\nu t\Delta}u_0\|_{L^1(\mathbf{R}^+;L^p)} \leq \frac{C}{\nu} 2^{2^{-j(s+2)}} \|u_0\|_{B_p^s}.$$

Cette observation conduit à la définition et au théorème suivants.

Définition 2.1 *Soit $s < d/p$, $\widetilde{E}_p$ est l'espace des fonctions $u \in L^\infty(\mathbf{R}^+; B^s_p)$ telles que*

$$\|u\|_{\widetilde{E}_p} \stackrel{def}{=} \sup_j 2^{js} \|\Delta_j u\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+;L^p)} + \sup_j \nu 2^{j(s+2)} \|\Delta_j u\|_{L^1(\mathbf{R}^+;L^p)}.$$

Théorème 2.1 *Soit $p \in]3, +\infty[$. Il existe c telle que, si $v_0 \in B_p^{-1+\frac{3}{p}}$ telle que $\|v_0\|_{B_p^{-1+\frac{3}{p}}} \leq c\nu$, alors il existe une unique solution de (NSG_ν) dans la boule de centre 0 et de rayon $c\nu$ de $\widetilde{E}_p$.*

Ceci résulte du lemme suivant, démontré à l'aide du calcul paradifférentiel de Bony (voir [1]).

Lemme 2.1 *Il existe une constante C (indépendante de ν) telle que, pour tout p dans $]3, +\infty[$,*

$$\|B(u, v)\|_{\widetilde{E}_p} \leq \frac{C}{\nu} \|u\|_{\widetilde{E}_p} \|v\|_{\widetilde{E}_p}. \tag{6}$$

Pour démontrer ce lemme, commençons par écrire que

$$\begin{aligned}
\Delta_j Q(u, v) &= \sum_{k,\ell,m} \Delta_j \partial_k A_{\ell,m}(D)(u^\ell v^m) \\
&= \sum_{j',k,\ell,m} \Delta_j \partial_k A_{\ell,m}(D)\Big(S_{j'} u^\ell \Delta_{j'} v^m + S_{j'+1} v^m \Delta_{j'} u^\ell\Big).
\end{aligned}$$

Comme $A_{\ell,m}(D)$ est un multiplicateur de Fourier d'ordre 1, on a

$$\|\Delta_j \partial_k A_{\ell,m}(D)(S_{j'} u^\ell \Delta_{j'} v^m)\|_{L^1(\mathbf{R}^+;L^p)} \leq C 2^j \|\Delta_j (S_{j'} u^\ell \Delta_{j'} v^m)\|_{L^1(\mathbf{R}^+;L^p)}.$$

Le fait que Supp $\mathcal{F}(S_{j'} u^\ell \Delta_{j'} v^m) \subset 2^{j'} \widetilde{\mathcal{B}}$ pour une boule fixe $\widetilde{\mathcal{B}}$ implique que

$$\begin{aligned}
\|\Delta_j Q(u, v)\|_{L^1(\mathbf{R}^+;L^p)} &\leq C 2^j \sum_{j' \geq j - N_0} \|S_{j'} u\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+;L^\infty)} \|\Delta_{j'} v\|_{L^1(\mathbf{R}^+;L^p)} \\
&\leq \frac{C}{\nu} 2^j \|u\|_{\widetilde{E}_p} \|v\|_{\widetilde{E}_p} \sum_{j' \geq j - N_0} 2^{j'} 2^{j'\left(-1+\frac{3}{p}\right)} \|\Delta_{j'} v\|_{L^1(\mathbf{R}^+;L^p)} \\
&\leq \frac{C}{\nu} 2^{j\left(1-\frac{3}{p}\right)} \|u\|_{\widetilde{E}_p} \|v\|_{\widetilde{E}_p}.
\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau le lemme 1.1, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\Delta_j B(u, v)(t)\|_{L^p} &\leq \int_0^t \|e^{\nu(t-t')\Delta} \Delta_j Q(u(t'), v(t'))\|_{L^p} dt' \\
&\leq C \int_0^t \|e^{-c\nu(t-t')2^{2j}} \|\Delta_j Q(u(t'), v(t'))\|_{L^p} dt'.
\end{aligned}$$

Les inégalités de Young assurent le résultat.

3 Trajectoires des éléments de $\widetilde{E}_p$

3.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz revisité

Le théorème de Cauchy-Lipschitz se généralise grâce à la condition d'Osgood.

Définition 3.1 *Soit μ un module de continuité. Il est dit de Osgood si et seulement si*

$$\int_0^a \frac{dr}{\mu(r)} = +\infty. \tag{7}$$

Il est dit admissible si la fonction Γ définie par $\Gamma(y) \stackrel{\text{def}}{=} y\mu\Big(\frac{1}{y}\Big)$ est croissante et satisfait

$$(A) \qquad \int_x^\infty \frac{1}{y^2}\Gamma(y)dy \leq C\frac{\Gamma(x)}{x}\cdot$$

Donnons quelques exemples. Les fonctions

$$\mu(r) = r\,,\ \mu(r) = r(-\log r)^\alpha \quad \text{et} \quad \mu(r) = r(-\log r)(\log(-\log r))^\alpha$$

sont Osgood et admissibles si $\alpha < 1$. Les fonctions $\mu(r) = r^\alpha$ avec $\alpha < 1$ sont admissibles, mais non Osgood de même que les fonctions ci-dessus pour $\alpha \geq 1$.

Définition 3.2 *Soit μ un module de continuité et (X, d) un espace métrique. L'espace C_μ est l'espace des fonctions bornées u telles que*

$$\|u\|_{C_\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \|u\|_{L^\infty(X)} + \sup_{0<d(x,y)\leq a} \frac{\|u(x) - u(y)\|}{\mu(d(x,y))} < \infty.$$

L'intérêt de ces définitions réside dans le théorème suivant.

Théorème 3.1 *Soient E un espace de Banach, Ω un ouvert de E , I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. On considère une fonction $F \in L^1_{loc}(I; \mathcal{C}_\mu(\Omega; E))$ pour un module de continuité de Osgood. Alors, il existe un intervalle J tel que $t_0 \in J \subset I$ et tel que l'équation*

$$(EDO) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(t', x(t'))dt'$$

admette une et une seule solution continue définie sur l'intervalle J.

Pour démontrer ce théorème, on démontre que le schéma de Picard converge grâce au lemme d'Osgood que nous rappelons (voir par exemple [4] ou [7]).

Lemme 3.1 *Soient ρ une fonction mesurable positive, γ une fonction positive localement intégrable et μ un module de continuité de Osgood. On a alors*

$$\rho(t) \leq \int_{t_0}^t \gamma(t')\mu(\rho(t'))dt' \Longrightarrow \rho \equiv 0.$$

Définition 3.3 *Soit Γ une fonction sur $[b,\infty[$. L'espace B_Γ est l'espace des fonctions continues bornées u sur $\mathbf{R}^d$ telles que*

$$\|u\|_{B_\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \|u\|_{L^\infty} + \sup_{j\geq 0} \frac{\|\nabla S_j u\|_{L^\infty}}{\Gamma(2^j)} < \infty.$$

Proposition 3.1 *Si μ est un module de continuité admissible, alors $C_\mu = B_\Gamma$.*

Si u appartient à B_Γ, comme $\nabla\Delta_j = \nabla S_{j+1} - \nabla S_j$, nous avons $\|\nabla\Delta_j u\|_{L^\infty} \leq C\Gamma(2^j)\|u\|_{B_\Gamma}$. Vu que φ est dans $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d\setminus\{0\})$, on a, en écrivant $|\xi|^2 = \sum_k \xi_k^2$ que $\varphi(\xi) = \sum_{k=1}^d \varphi_k(\xi) i\xi_k\varphi(\xi)$ où les φ_k sont des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d\setminus\{0\})$. On en déduit que

$$\Delta_j = \sum_{k=1}^d 2^{-j}\varphi_k(2^{-j}D)\partial_k\Delta_j \quad \text{ce qui implique que} \quad \|\Delta_j u\|_{L^\infty} \leq C2^{-j}\Gamma(2^j)\|u\|_{B_\Gamma}. \tag{8}$$

Écrivons alors que

$$\begin{aligned}
|u(x)-u(x')| &\leq \|\nabla S_j u\|_{L^\infty}|x-x'| + 2\sum_{j'\geq j}\|\Delta_{j'}u\|_{L^\infty}\\
&\leq \|\nabla S_j u\|_{L^\infty}|x-x'| + C\|u\|_{B_\Gamma}\sum_{j'\geq j} 2^{-j'}\Gamma(2^{j'}).
\end{aligned}$$

La condition (A) et le fait que la fonction μ soit croissante entraî ne par définition de $\|\cdot\|_{B_\Gamma}$,

$$\begin{aligned}
|u(x)-u(x')| &\leq \|u\|_{B_\Gamma}\Big(\Gamma(2^j)|x-x'| + C\int_{2^j}^\infty \frac{1}{y^2}\Gamma(y)dy\Big)\\
&\leq \|u\|_{B_\Gamma}\Big(\Gamma(2^j)|x-x'| + C2^{-j}\Gamma(2^j)\Big).
\end{aligned}$$

Le choix $2^{-j} \equiv |x-x'|$ assure que u est dans C_μ. Supposons maintenant que u appartienne à C_μ. Par définition de S_j, nous avons, en utilisant le fait que $\int_{\mathbf{R}^d}\partial_k\widetilde{h}(y)dy = 0$,

$$\begin{aligned}
|\partial_k S_q u(x)| &\leq \|u\|_\mu 2^{jd}2^j\int_{\mathbf{R}^d}|\partial_k\widetilde{h}(2^j(x-y))| \times |u(y)-u(x)|dy\\
&\leq \|u\|_\mu 2^{jd}2^j\int_{\mathbf{R}^d}|\partial_k\widetilde{h}(2^j(x-y))|\mu(|y-x|)dy
\end{aligned}$$

En découpant l'intégrale ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned}
|\partial_k S_q u(x)| \leq \|u\|_\mu 2^{jd}2^j &\int_{|z|\leq 2^{-j}}|\partial_k\widetilde{h}(2^jz)|\mu(|z|)dy\\
&+ 2\|u\|_\mu 2^{jd}\int_{|z|\geq 2^{-j}}|\partial_k\widetilde{h}(2^jz)|\,|2^jz|\Gamma\Big(\frac{1}{z}\Big)dz.
\end{aligned}$$

Comme les fonctions μ et Γ sont croissantes, on en déduit que

$$\begin{aligned}
|\partial_k S_q u(x)| \leq \|u\|_\mu 2^{jd}2^j\mu(2^{-j}) &\int_{|z|\leq 2^{-j}}|\partial_k\widetilde{h}(2^jz)|dy\\
&+ 2\|u\|_\mu\Gamma(2^j)2^{jd}\int_{|z|\geq 2^{-j}}|\partial_k\widetilde{h}(2^jz)|\,|2^jz|dz.
\end{aligned}$$

D' où il vient $\|\nabla S_j u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_\mu\Gamma(2^j)$ et la proposition est alors démontrée.

La proposition suivante montre la nécessité de sortir du cadre du lemme d'Osgood.

Proposition 3.2 *Soit u_0 une distribution homogène de degré -1 de classe C^∞ en dehors de l'origine. Soit μ un module de continuité tel que $e^{t\Delta}u_0 \in L^1([0,T];C_\mu)$ pour un réel strictement positif T, alors μ ne vérifie pas la condition d'Osgood.*

L'homogénéïté de la donnée u_0 implique que $\nabla S_j u_0 = 2^{2j} S_0 u_0(2^j \cdot)$ et donc que

$$\|e^{t\Delta}\nabla S_j u_0\|_{L^\infty} = 2^{2j}\|e^{t2^{-2j}\Delta}\nabla S_0 u_0\|_{L^\infty}.$$

Sur l'espace des fonctions de transformée de Fourier à support compact, l'opérateur $e^{-c\Delta}$ est borné sur tous les L^p. La fonction Γ étant décroissante, si j_t est le plus grand j tel que $2^{-2j} \geq t$,

$$\sup_j \frac{\|e^{t\Delta}\nabla S_j u_0\|_{L^\infty}}{\Gamma(2^j)} \geq 2^{2j_t}\frac{\|e^{t2^{-2j_t}\Delta}\nabla S_0 u_0\|_{L^\infty}}{\Gamma(2^{j_t})} \geq \frac{C}{t}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)}\cdot$$

Ainsi donc, si $e^{t\Delta}u_0$ est localement intégrable à valeurs C_μ, nous avons, par définition de Γ,

$$\int_0^{\sqrt{T}} \frac{dr}{\mu(r)} = 2\int_0^T \frac{dt}{t\,\Gamma\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)} \leq c\int_0^T \|e^{t\Delta}u_0\|_{C_\mu}dt.$$

La proposition est démontrée.

3.2 Un théorème de Cauchy-Lipschitz pour les éléments de $\widetilde{E}_p$

Théorème 3.2 *Il existe une constante C telle que, pour tout champ de vecteurs v de l'espace $L^1([0,T];B^{-r}_\infty)$ pour un réel positif r et tel qu'il existe un entier positif j_0 tel que*

$$N_{j_0}(T,v) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{j\geq j_0} 2^j\|\Delta_j v\|_{L^1([0,T];L^\infty)} < \frac{1}{C},$$

il existe une unique application continue ψ de $[0,T]\times\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^d$ telle que

$$\psi(t,x) = x + \int_0^t v(t',\psi(t',x))dt' \quad \text{et} \quad \psi(t,\cdot) - \mathrm{Id} \in C^{1-CN_{j_0}(t,v)} \qquad \forall t \leq T.$$

Commençons par démontrer l'unicité qui est une conséquence immédiate du lemme suivant.

Lemme 3.2 *Sous les hypothèses du théorème ci-dessus, si γ_j sont deux fonctions continues telles que*

$$\gamma_j(t) = x_j + \int_0^t v(t',\gamma_j(t'))dt',$$

nous avons, lorsque $|x_1 - x_2| \leq 2^{-j_0}$,

$$\forall t_0 \leq T\,,\ |\gamma_1(t_0) - \gamma_2(t_0)| \leq C|x_1 - x_2|^{1-CN_{j_0}(t_0,v)}\exp\Big(2^{j_0(r+1)}\int_0^{t_0}\|v(t,\cdot)\|_{B^{-r}_\infty}dt\Big).$$

Décomposons le champ de vecteurs v en une partie basses fréquences et une partie hautes fréquences. Ceci conduit à

$$\begin{aligned}
|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)| &\leq |x_1-x_2| + \int_0^t |S_j v(t',\gamma_1(t')) - S_j v(t',\gamma_2(t'))|dt' \\
&\qquad\qquad + 2\int_0^t \sum_{j'\geq j} \|\Delta_{j'}v(t')\|_{L^\infty} dt' \\
&\leq |x_1-x_2| + \int_0^t \|\nabla S_j v(t',\cdot)\|_{L^\infty} |\gamma_1(t')-\gamma_2(t')|dt' \\
&\qquad\qquad + 2^{1-j}\sum_{j'\geq j} 2^{j-j'}2^{j'}\int_0^t \|\Delta_{j'}v(t')\|_{L^\infty}dt'.
\end{aligned}$$

Posons, pour $0\leq t\leq t_0\leq T$, $\rho(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t'\leq t} |\gamma_1(t')-\gamma_2(t')|$ et

$$D_j(t) \stackrel{\text{déf}}{=} |x_1-x_2| + 2^{2-j}N_{j_0}(t_0,v) + \int_0^t \|\nabla S_j v(t',\cdot)\|_{L^\infty}|\gamma_1(t')-\gamma_2(t')|dt'.$$

Par définition de $N_{j_0}(t,v)$, $\forall j\geq j_0$, $\rho(t)\leq D_j(t)$. Écrivons alors que, pour tout $t\leq t_0$,

$$D_j(t) \leq |x_1-x_2| + 2^{2-q}N_{j_0}(t_0,v) + \int_0^t \|\nabla S_j v(t',\cdot)\|_{L^\infty} D_j(t')dt'.$$

Le lemme de Gronwall implique que, pour tout $t\leq t_0$,

$$D_j(t) \leq \Big(|x_1-x_2| + 2^{2-q}N_{j_0}(t_0,v)\Big)\exp\Big(\int_0^t \|\nabla S_j v(t',\cdot)\|_{L^\infty}dt'\Big).$$

D'après les inégalités de Bernstein, nous avons, pour tout $t\leq t_0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|\nabla S_j v(t',\cdot)\|_{L^\infty}dt' &\leq \int_0^t \sum_{j'<j_0} 2^{j'}\|\Delta_{j'}v(t',\cdot)\|_{L^\infty}dt' + \sum_{j'=j_0}^{j}\int_0^t 2^{j'}\|\Delta_{j'}v(t',\cdot)\|_{L^\infty}dt' \\
&\leq 2^{j_0(r+1)}\int_0^t \|v(t',\cdot)\|_{B^{-r}_\infty}dt' + jN_{j_0}(t,v). \qquad (9)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $j\geq j_0$ et pour tout $t\leq t_0$, avons nous

$$D_j(t) \leq \Big((|x_1-x_2| + 2^{2-j}N_{j_0}(t_0,v)\Big)\exp\Big(2^{j_0(r+1)}\int_0^t \|v(t',\cdot)\|_{B^{-r}_\infty}dt' + jN_{j_0}(t,v)\Big).$$

En choisissant $2^j \equiv |x_1-x_2|^{-1}$, on trouve que

$$\rho(t_0) \leq C|x_1-x_2|^{1-CN_{j_0}(t_0,v)}\exp\Big(2^{j_0(r+1)}\int_0^{t_0}\|v(t',\cdot)\|_{B^{-r}_\infty}dt'\Big)$$

et le lemme est ainsi démontré. La preuve de l'existence est analogue (voir [6] pour les détails).

Références

[1] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Annales de l'École Normale Supérieure*, **14**, 1981, pages 209–246.

[2] M. Cannone, *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes*, Diderot Éditeur, Arts et Sciences, 1995.

[3] M. Cannone, Y. Meyer et F. Planchon, Solutions autosimilaires des équations de Navier-Stokes, Séminaire "Équations aux Dérivées Partielles de l'École Polytechnique, Exposé VIII, 1993–1994.

[4] J.-Y. Chemin, *Fluides parfaits incompressibles*, Astérisque, **230**, 1995 ; version anglaise : *Perfect incompressible fluids*, Oxford University Press, 1998.

[5] J.-Y. Chemin, Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel. *Journal d'Analyse Mathématique*, **77**, 1999, pages 27–50.

[6] J.-Y. Chemin, Le système de Navier-Stokes incompressible soixante dix ans après Jean Leray, *Actes des journées mathématiques à la mémoire de Jean Leray, à paraître dans Séminaire et Congrès, Société Mathématique de France, Paris.*

[7] J.-Y. Chemin et N. Lerner, Flot de champs de vecteurs non-lipschitziens et équations de Navier-Stokes, *Journal of Differential Equations*, **121**, 1995, pages 314–328.

[8] P. Constantin et C. Foias, *Navier-Stokes equations*, Chicago University Press, 1988.

[9] H. Fujita et T. Kato, On the Navier-Stokes initial value problem I, *Archiv for Rationnal Mechanic Analysis*, **16**, 1964, pages 269–315.

[10] T. Kato, Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbf{R}^3$, *Journal of functionnal Analysis*, **9**, 1972, pages 296–305.

[11] H. Koch et D. Tataru, Well-posedness for the Navier-Stokes equations, *Advances in Mathematics*, **157**, 2001, pages 22–35.

[12] P.-G. Lemarié-Rieusset, Recent developments in the Navier-Stokes problem, Chapman & Hall, Research Notes in Mathematics, **431**, 2002.

[13] J. Leray, Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Matematica*, **63**, 1933, pages 193–248.

[14] W. von Wahl, *The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations*, Aspect der Mathematik, Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 1985.