



SEMINAIRE

**Equations aux
Dérivées
Partielles**

2003-2004

Serge Alinhac

Inégalités d'énergie et solutions d'équations d'ondes en métrique courbe

Séminaire É. D. P. (2003-2004), Exposé n° IV, 10 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2003-2004____A4_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*
<http://www.cedram.org/>

INEGALITES D'ENERGIE ET SOLUTIONS D'EQUATIONS D'ONDES EN METRIQUE COURBE

par S. Alinhac

Introduction

Dans cet exposé, nous considérons sur $\mathbf{R}_{x,t}^4$ une métrique scindée

$$g = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j,$$

et le d'Alembertien associé L_g . Nous supposons toujours g proche de la métrique plate g_0 . Les deux questions que nous abordons sont les suivantes :

- 1) Pour quelles g peut-on établir des inégalités d'énergie "standard" pour L_g , dans lesquelles le facteur d'amplification soit bien contrôlé?
- 2) Pour quelles g les solutions de $L_g\phi = 0$ se comportent-elles approximativement comme des solutions de $L_{g_0}\phi = 0$?

Une réponse à la question 2) s'obtient par une méthode d'énergie utilisant des champs de Klainerman *modifiés* et une bonne inégalité répondant à la question 1).

I. Inégalités d'énergie géométriques

1. Quelques rappels de notations

a. Nous notons

$$t = x^0, x = (x^1, x^2, x^3).$$

Les indices grecs α, β , etc. sont sommés de 0 à 3 tandis que les indices latins i, j , etc. le sont de 1 à 3. La matrice inverse de $g_{\alpha\beta}$ est notée $g^{\alpha\beta}$, et l'on définit

$$\partial_\alpha = \partial_{x^\alpha}, \partial^\alpha = g^{\alpha\beta}\partial_\beta, \nabla\phi = \partial^\alpha\phi\partial_\alpha.$$

La métrique sera aussi notée $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ et la connexion associée D ; le Hessien d'une fonction ϕ est défini par

$$\nabla^2\phi(X, Y) = XY\phi - (D_X Y)\phi.$$

Le d'Alembertien L_g est alors

$$L_g\phi = g^{\alpha\beta}\nabla^2\phi_{\alpha\beta}.$$

Nous aurons aussi besoin de la seconde forme k associée aux surfaces $\{t = C\}$, définie par

$$k(X, Y) = \langle D_X \partial_t, Y \rangle, k_{ij} = (1/2) \partial_t g_{ij},$$

dont la trace sera notée \bar{k} .

b. Il nous faut ici dire quelques mots du tenseur de déformation ${}^X \pi = \pi$ d'un champ X . Ce tenseur est défini par

$$(1.1) \quad \pi(Y, Z) = \langle D_Y X, Z \rangle + \langle D_Z X, Y \rangle, \pi_{\alpha\beta} = D_\alpha X_\beta + D_\beta X_\alpha.$$

C'est en fait la dérivée de Lie de g , ce qui explique qu'il intervient aussi bien dans les formules de commutation que dans les inégalités d'énergie pour L_g . Pour ces dernières, rappelons le calcul fondamental. On introduit, associé à une fonction ϕ , le tenseur

$$Q_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha \phi)(\partial_\beta \phi) - (1/2)g_{\alpha\beta}(g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi).$$

En posant, pour un champ X donné (le "multiplicateur"), $P_\alpha = Q_{\alpha\beta} X^\beta$, on trouve

$$D^\alpha P_\alpha = (1/2)Q^{\alpha\beta} \pi_{\alpha\beta} + (L_g \phi)(X\phi).$$

Il est donc naturel, pour obtenir une inégalité à petite amplification, de choisir un multiplicateur X (de type temps de façon à obtenir une énergie positive) pour lequel les composantes de π soient les plus petites possibles.

2. Une inégalité sans amplification

Nous nous plaçons ici dans une première situation géométrique où l'on suppose donnée une *fonction optique* u , c'est à dire une fonction satisfaisant

$$g^{\alpha\beta} \partial_\alpha u \partial_\beta u = 0, a = (\partial_t u)^{-1} > 0.$$

A cette fonction sont associés un feuilletage en "2-sphères"

$$S_{t_0, u_0} = \Sigma_{t_0} \cap \{u = u_0\}, \Sigma_{t_0} = \{t = t_0\},$$

un champ unitaire horizontal N orthogonal à ces sphères, et un couple de vecteurs isotropes

$$L = -\nabla u = a^{-1}(\partial_t + N), \underline{L} = a(\partial_t - N), \langle L, \underline{L} \rangle = -2.$$

Si l'on choisit (e_1, e_2) un repère orthonormal sur les sphères, on travaillera dans le repère (e_1, e_2, e_3, e_4) , où $e_3 = \underline{L}$, $e_4 = L$.

Définissons alors l'énergie "standard" (par opposition à "conforme", que nous ne discuterons pas ici, voir par exemple [6], [7])

$$E(t) = \int_{\Sigma_t} [a(L\phi)^2 + a^{-1}(\underline{L}\phi)^2 + (a + a^{-1})\Sigma_{i=1,2}(e_i\phi)^2] dv,$$

où dv est l'élément de volume associé à g .

Théorème 1. *Soit*

$$T_0 = (1/2)(L + \underline{L}), \pi =^{T_0} \pi.$$

Supposons, pour un $\epsilon > 0$, les estimations

$$(2.1)_a \quad \langle u \rangle^{1+\epsilon} a[\Sigma_{i=1,2}(\pi_{Li})^2 + (\Sigma_{i=1,2}\pi_{ii})^2] \in L_t^1 L_x^\infty,$$

$$(2.1)_b \quad \langle u \rangle^{1+\epsilon} (\Sigma_{1 \leq i, j \leq 2} |\pi_{ij}| + |\underline{\omega}| + \Sigma_{i=1,2} |\pi_{\underline{L}i}|) \in L_{x,t}^\infty.$$

Il existe alors $C = C_\epsilon$ telle que pour toute ϕ satisfaisant $L_g \phi = f$, on ait

$$(2.2) \quad E^{1/2}(t) + \left\{ \int_{0 \leq t' \leq t} \langle u \rangle^{-1-\epsilon} [(L\phi)^2 + \Sigma_{i=1,2}(e_i \phi)^2] dt' dv \right\}^{1/2} \leq \\ \leq C E^{1/2}(0) + C \int_0^t |(a^{1/2} + a^{-1/2})f|_{L^2(dv)}(t') dt'.$$

Il est difficile d'expliciter les hypothèses (2.1) du théorème : disons que les diverses composantes de π peuvent se calculer à l'aide des composantes de $\nabla^2 u$ et de k ; les composantes de $\nabla^2 u$ s'estiment à leur tour grâce à la formule

$$D_L \nabla^2 u_{\alpha\beta} + \nabla^2 u_\alpha^\mu \nabla^2 u_{\mu\beta} = R_{\alpha L \beta L},$$

où R est le tenseur de courbure de g . Pour une étude détaillée, on pourra consulter [9], ou aussi [7]. Il est important de remarquer que ces hypothèses sont moins fortes que l'hypothèse d'intégrabilité $|\partial_\alpha g_{\beta\gamma}| \in L_t^1 L_x^\infty$ qui permettrait d'obtenir trivialement le résultat. Outre l'absence d'amplification, on notera qu'on obtient une meilleure estimation sur les "bonnes" dérivées associées à la donnée de u , c'est à dire sur les champs e_i tangents aux "sphères" et sur le champ L .

La preuve du théorème 1 est très simple, et repose sur deux idées (voir [1]):

- i) Le multiplicateur T_0 est choisi en sorte qu'il ressemble à ∂_t , et que $\pi_{LL} = 0$. Cela implique que les termes de reste $\pi^{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta}$ dans l'inégalité d'énergie ne font pas intervenir la composante $Q_{\underline{L}\underline{L}} = (\underline{L}\phi)^2$, la seule qui ne contienne pas au moins une bonne dérivée de ϕ .
- ii) L'introduction d'un "poids fantôme" $e^{b(u)}$, avec $b'(s) = B(1 + s^2)^{-\frac{1}{2}(1+\epsilon)}$ donne le contrôle supplémentaire des termes de bonnes dérivées

$$-b'(u)[(L\phi)^2 + \Sigma_{i=1,2}(e_i \phi)^2].$$

La combinaison de i) et ii) permet de conclure.

Le problème avec cette inégalité est qu'elle suppose la construction d'une fonction optique u convenable. Nous allons maintenant présenter une deuxième situation géométrique, qui peut être comprise comme une approximation de la première.

3. La situation quasi-radiale

On peut voir la situation géométrique décrite en 2. de la façon suivante : on choisit un feuilletage en sphères $S_{t,u}$; à normalisation près, L et \underline{L} sont les vecteurs isotropes "sortant" et "entrant" dans l'orthogonal de l'espace tangent aux sphères. On suppose enfin que le système des 3-plans (e_1, e_2, e_4) est intégrable, les feuilles étant les cônes sortant $\{u = u_0\}$. On voit donc que le repère (e_1, e_2, e_3, e_4) préexiste à la fonction optique u , qui peut ne pas exister.

Dans une situation "quasi-radiale" (où l'on note bien sûr $r = |x|, \omega_i = x^i/r$), nous décidons que le feuilletage en sphères *standard*

$$S_{t_0, r_0} = \Sigma_{t_0} \cap \{r = r_0\}$$

est suffisant pour nos besoins. Le champ N est alors simplement

$$N = \frac{\nabla r}{c}, c = |\nabla r|, c^2 = g^{ij} \omega_i \omega_j,$$

et l'on pose

$$L = \partial_t + N, \underline{L} = \partial_t - N.$$

Dans ce cas, il n'y a pas de fonction optique, mais en fait $t - r$ est un bon ersatz. Le théorème suivant est analogue au théorème 1, les bonnes directions étant maintenant L et les rotations standard $R_i/r = (1/r)(x \wedge \partial)_i$.

Théorème 2. *Supposons, pour un $\epsilon > 0$, les estimations*

$$(3.1)_a \quad \langle t - r \rangle^{1+\epsilon} [\Sigma_{i=1,2} k_{Ni}^2 + (\Sigma_{i=1,2} k_{ii})^2] \in L_t^1 L_x^\infty,$$

$$(3.1)_b \quad \langle t - r \rangle^{1+\epsilon} [|\partial_t c/c| + \Sigma_{i=1,2} |k_{Ni}| + \Sigma_{1 \leq i, j \leq 2} |k_{ij}|] \in L_{x,t}^\infty.$$

Il existe alors $C = C_\epsilon$ telle que pour toute ϕ satisfaisant $L_g \phi = f$, on ait

$$(3.2) \quad \begin{aligned} E(t) + \int_{0 \leq t' \leq t} \langle t' - r \rangle^{-1-\epsilon} [(L\phi)^2 + \Sigma_{i=1,2} (e_i \phi)^2] dt' dv &\leq \\ &\leq CE(0) + C \int_{0 \leq t' \leq t} |f| |\partial_t \phi| dt' dv + C \int_0^t A(t') E(t') dt'. \end{aligned}$$

Ici, le facteur d'amplification est

$$A(t) = |\partial_t c/c|_{L_x^\infty} + |< t - r >^{-1} (c - 1)|_{L_x^\infty}.$$

L'hypothèse quasi-radiale consiste précisément à supposer A suffisamment décroissant en t . On remarquera cette fois que les hypothèses (3.1) du théorème sont beaucoup plus faciles à vérifier, puisqu'elles s'expriment directement en termes de dérivées premières de la métrique. La preuve du théorème 2 est analogue à celle du théorème 1, à ceci près qu'on utilise ∂_t comme multiplicateur et une fonction de $t - r$ comme "poids fantôme". Cela crée deux sortes d'"erreurs" :

i) La composante π_{LL} n'est plus zéro (π étant le tenseur de déformation de ∂_t). En fait,

$$\pi_{LL} = -2k_{NN} = -\partial_t c/c.$$

Cette erreur est responsable du premier terme dans le facteur d'amplification A .

ii) La fonction $t - r$ n'est pas exactement une fonction optique, en fait

$$g^{\alpha\beta} \partial_\alpha (t - r) \partial_\beta (t - r) = c^2 - 1.$$

Cette erreur fournit le deuxième terme de A .

Nous allons donner dans la partie II une application de ce théorème au comportement des solutions de $L_g \phi = 0$.

II. Solutions du d'Alembertien dans une situation quasi-radiale

1. Nous nous plaçons ici dans la situation décrite en I.3. Comme la métrique $g = g_0 + \gamma$ est une perturbation de la métrique standard g_0 , le comportement de γ sera évalué en utilisant les paramètres $\sigma = < t - r >$ et $1 + t + r$, ainsi que l'action des champs $R_i = (x \wedge \partial)_i$ (rotations) et $S = t\partial_t + x^i \partial_i$. On distinguera traditionnellement les trois zones

$$r \leq (1/2)(1 + t), (1/2)(1 + t) \leq r \leq (3/2)(1 + t), r \geq (3/2)(1 + t),$$

que l'on nommera "l'intérieur", "le bord du cône" et "l'extérieur".

Outre la seconde forme $k_{ij} = (1/2)\partial_t g_{ij}$ déjà introduite, nous aurons aussi besoin de la seconde forme θ des sphères standard par rapport à l'espace ambiant, dans Σ_t

$$\theta(e_i, e_j) = < D_{e_i} N, e_j >, \bar{\theta} = \theta_{11} + \theta_{22}.$$

Toute cette partie s'inspire beaucoup du traitement du modèle non-linéaire [2]

$$\partial_t^2 \phi - c^2(\phi) \Delta \phi = 0.$$

Pour donner aux hypothèses la souplesse requise dans des applications telles que celle ci-dessus, on mesurera le caractère quasi-radial de la situation à l'aide d'une fonction croissante $m(t)$ ($m' > 0$), telle que m' et m''/m' soient des symboles d'ordre -1 , et que e^m soit négligeable devant toute puissance de $(1+t)$, c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0, m(t) \leq C_\epsilon + \epsilon \log(1+t).$$

On pourra penser que m' est un peu plus petit que $(1+t)^{-1}$: par exemple, $m'(t) = (1+t)^{-1-\eta}$, ou, plus subtilement, $m(t) = (\log(1+t))^\lambda$, $0 < \lambda < 1$.

Les hypothèses sur la métrique se répartissent alors en deux groupes : une hypothèse générale de décroissance de γ , assez faible ; une hypothèse spécifique de décroissance forte de \bar{k} , $\bar{\theta}$ et $1-c$:

(Décroissance faible) Pour un certain $\mu > 1/2$ et tout k ,

$$(1.1)_a \quad |\Gamma^k \gamma^{\alpha\beta}| \leq \gamma_0 \sigma^{1/2} (1+t+r)^{-\mu},$$

$$(1.1)_b \quad |\Gamma^k \partial \gamma^{\alpha\beta}| \leq \gamma_0 \sigma^{-1/2} (1+t+r)^{-\mu}.$$

Ici, Γ^k signifie un produit de k champs pris parmi R_i , S ou $\sigma^\mu \partial_\alpha$. A l'intérieur ou à l'extérieur, il suffit de prendre Γ parmi R_i , S ou ∂_α .

(Décroissance spécifique) Au bord du cône, on suppose

$$(1.2) \quad |\Gamma^k \bar{k}| \leq \gamma_0 \sigma^{-1/2} (1+t)^{-1}, |\Gamma^k \bar{\theta}| \leq \gamma_0 (1+t)^{-1},$$

$$(1.3) \quad |1-c| \leq \gamma_0 \sigma^{1/2} m', |\partial c| \leq \gamma_0 \sigma^{-1/2} m',$$

$$(1.4) \quad |\Gamma^{k+1} c| \leq \gamma_0 \sigma^{1/2} m' e^{Cm}, |\Gamma^k \partial c| \leq \gamma_0 \sigma^{-1/2} m' e^{Cm}.$$

Nous supposons les données de Cauchy (ϕ_0, ϕ_1) de ϕ de classe C^∞ , réelles et vérifiant

$$\forall \alpha, \forall \beta, |\alpha| \leq |\beta|, x^\alpha \partial_x^\beta \phi_i \in L^2, i = 0, 1.$$

Le théorème est alors le suivant (ce théorème est en fait valable dans des situations plus générales où la métrique n'est pas scindée, cf. [3]).

Théorème 3. *Sous les hypothèses ci-dessus, pour γ_0 assez petit, nous avons, dans la zone $r \geq (1/2)(1+t)$, l'estimation*

$$(1.5) \quad |\partial u| \leq C \sigma^{-1/2} (1+t+r)^{-1} e^{Cm}.$$

On notera que l'estimation de décroissance n'a lieu qu'en dehors de la zone intérieure. Il s'agit d'un choix, qui est expliqué dans la remarque v) ci-dessous.

Plusieurs remarques doivent être faites à propos des hypothèses :

- i) On notera partout l'homogénéité particulière des hypothèses par rapport à σ : les inégalités sur les coefficients font intervenir $\sigma^{1/2}$, tandis que les inégalités sur leurs gradients font intervenir $\sigma^{-1/2}$. Ce choix paraît optimal dans les calculs ; par ailleurs, il faut penser aux applications aux problèmes non-linéaires

$$g^{\alpha\beta}(\phi, \nabla\phi)\nabla^2\phi_{\alpha\beta} = N(\phi, \nabla\phi)$$

qui motivent cette étude. Les termes en ∂g y font intervenir $\partial\phi, \partial^2\phi$, qui présentent naturellement une décroissance en $\sigma^{-1/2}$ vers l'intérieur, en conséquence de l'inégalité de Klainerman

$$\sigma^{1/2}(1+t+r)|\partial\phi| \leq C\Sigma|Z\partial\phi|_{L^2}.$$

- ii) L'hypothèse de décroissance faible ne permet même pas d'obtenir une inégalité d'énergie raisonnable, car on est très loin de l'intégrabilité en temps de $|\partial\gamma|_{L^\infty}$. En revanche, les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites ! La valeur limite $\mu = 1/2$ semble jouer un rôle crucial ; dans nos calculs, cette limitation se traduit tout simplement par le fait qu'un facteur $\sigma^{-1/2}(1+t+r)^{-\mu}$ est intégrable à l'intérieur ou à l'extérieur.
- iii) Si l'on choisit m' intégrable, le facteur d'amplification $A(t)$ dans l'inégalité (3.2) est intégrable, et donc il disparaît de l'inégalité d'énergie. Dans les applications aux problèmes non-linéaires, ce n'est pas le cas, il faut au contraire choisir dans [2] par exemple

$$m(t) = \epsilon \log(1+t),$$

où ϵ mesure la taille des données de Cauchy.

- iv) La petite différence du facteur e^{Cm} entre les estimations (1.3) et (1.4) est importante aussi dans les applications : un facteur de la taille de m' donne une amplification en e^{Cm} , qui est acceptable, tandis qu'un facteur de la taille de $m'e^{Cm}$ donne une amplification en $\exp e^{Cm}$, qui est exclu. De fait, dans [2] par exemple, on a (1.3) mais on n'a pas la majoration (1.4) sans le facteur e^{Cm} .
- v) Le choix de ne pas inclure les rotations hyperboliques $H_i = x^i\partial_t + t\partial_i$ parmi les champs Γ est délibéré. L'enjeu est de vérifier que la méthode de preuve du théorème 3 (qui étend les techniques de [2]) ne requiert pas l'usage des H_i . La principale différence réside dans l'inégalité

$$\sigma|\partial v| \leq C\Sigma|Zv|,$$

où la somme est étendue à *tous* les champs de Klainerman $R_i, S, H_i, \partial_\alpha$. Si l'on avait inclus les champs H_i parmi les Γ , l'homogénéité particulière soulignée en i) aurait

été une conséquence de l'inégalité ci-dessus. Au lieu de cela, on demande seulement que l'action de ∂_α , *au bord du cône*, fasse gagner σ^μ . La contrepartie de ce choix est l'absence d'estimation convaincante à l'intérieur : nous nous contentons donc d'une estimation pour $r \geq (1/2)(1+t)$.

2. La formule de commutation et la preuve du théorème 3

La preuve s'appuie sur la formule

$$(2.1) \quad [L_g, X]\phi = \pi^{\alpha\beta}\nabla^2\phi_{\alpha\beta} + D_\alpha\pi^{\alpha\beta}\partial_\beta\phi - (1/2)\partial^\alpha(tr\pi)\partial_\alpha\phi.$$

Ici, $\pi =^X \pi$ est le tenseur de déformation de X . On se propose d'utiliser cette formule avec $X = \partial_\alpha$, $X = R_i$ ou $X = S$. Dans la formule (I.1.1), les dérivées des coefficients de g , qui doivent logiquement apparaître dans le commutateur, sont cachées dans les coefficients de la connexion D . Il est plus transparent d'écrire (comme on le voit facilement)

$$\pi^{\alpha\beta} = \partial^\alpha(X^\beta) + \partial^\beta(X^\alpha) - X(g^{\alpha\beta}).$$

Il est alors naturel d'écrire les traces qui apparaissent dans (2.1) dans le repère $(e_1, e_2, \underline{L}, L)$. Parmi les termes qui en résultent, les plus mauvais sont $\pi_{LL}\underline{L}^2\phi$: comme on ne peut "absorber" ces termes par Gronwall, on cherche à les détruire.

Pour ce faire, on va modifier les champs R_i ou S en les remplaçant par

$$\tilde{R}_i = R_i + a\partial_t, \tilde{S} = S + a\partial_t,$$

pour une fonction a bien choisie (une pour chaque champ). Donnons brièvement une idée du choix de a . Avec $Z = R_i$ ou $Z = S$, on note $\pi =^Z \pi$, et $\bar{\pi} =^T \pi$, $T = \partial_t$. On a alors

$$\begin{aligned} Z+aT\pi(X, Y) &= \pi(X, Y) + \langle D_X(aT), Y \rangle + \langle D_Y(aT), X \rangle = \\ &= \pi(X, Y) + a\bar{\pi}(X, Y) + (Xa)\langle T, Y \rangle + (Ya)\langle T, X \rangle, \end{aligned}$$

et en particulier

$$Z+aT\pi_{LL} = \pi_{LL} + a\bar{\pi}_{LL} - 2La.$$

Reste à remarquer que

$$(1/2)\pi_{LL} = \langle D_L Z, L \rangle = \langle D_L Z - D_Z L, L \rangle = \langle [L, Z], L \rangle,$$

et un calcul de $[L, Z]$ donne finalement $\pi_{LL} = -2Zc/c$. On obtient aussi $\bar{\pi}_{LL} = -2\partial_t c/c$. La condition pour faire disparaître les mauvais termes en $\underline{L}^2\phi$ est donc

$$\pi_{LL} + a\bar{\pi}_{LL} - 2La = 0,$$

soit l'équation de transport

$$La + a\partial_t c/c + Zc/c = 0.$$

Il reste évidemment à voir que ce choix suffit pour éliminer également les mauvais termes d'ordre un en $\underline{L}\phi$: on peut considérer cela comme un miracle !

Une des difficultés que l'on rencontre lorsqu'on utilise ces champs modifiés $Z + aT$ est la suivante : supposons que l'on doive absorber un terme $(1+t)^{-1-\eta}\partial Z$ du commutateur

$$L_g \tilde{Z}\phi = \dots + (1+t)^{-1-\eta}\partial Z\phi.$$

Comme l'inégalité d'énergie pour L_g ne donne que le contrôle des $\partial\tilde{Z}$, il faut faire apparaître Z à droite

$$(1+t)^{-1-\eta}\partial Z\phi = (1+t)^{-1-\eta}\partial\tilde{Z}\phi - (1+t)^{-1-\eta}(\partial a)T\phi - (1+t)^{-1-\eta}a\partial T\phi.$$

Or voilà : les hypothèses sur g ne permettent d'obtenir que les médiocres estimations de a

$$|a| \leq C\sigma^{1/2}e^{Cm}, |\partial a| \leq C\sigma^{-1/2}e^{Cm}.$$

Pour absorber le dernier terme écrit, il faudrait savoir par exemple que

$$|\partial T\phi| \leq C\sigma^{-1}\Sigma|\partial Z\phi|,$$

ce qu'on obtiendrait si on disposait de tous les Z , ce qui n'est pas le cas. L'outil de remplacement est fourni par le travail de Klainerman et Sideris [10] qui prouvent, dans le cas plat, l'inégalité ponctuelle

$$\sigma[|\Delta\phi| + |\partial_t^2\phi| + |\partial_i\partial_t\phi|] \leq C[|\partial\phi| + |\partial R_i\phi| + |\partial S\phi| + (t+r)|L_{g_0}\phi|].$$

Pour finir la preuve, il faut donc établir une inégalité analogue avec L_g , ce qui n'est pas très difficile.

Nous avons ici passé sous silence divers aspects calculatoires de la preuve : on trouvera dans [4], ou dans les textes originaux [2], [3], les indications nécessaires.

Bibliographie

- [1] Alinhac S., “*Remarks on Energy Inequalities for Wave and Maxwell Equations on a Curved Background*”, Preprint, Université Paris-Sud, (2003), à paraître dans Math. Annalen.
- [2] Alinhac S., “*An Example of Blowup at Infinity for a Quasilinear Wave Equation*”, Astérisque 284, (2003), 1-91.
- [3] Alinhac S., “*Free Decay of Solutions to Wave Equations on a Curved Background*”, Preprint, Université Paris-Sud, (2003), à paraître au Bull. Soc. Math. France.
- [4] Alinhac S., “*Free Decay of Solutions to Wave Equations on a Curved Background*”, à paraître, Actes du Colloque d’Hammamet, (2003).
- [5] Christodoulou D. and Klainerman S., “*The global nonlinear stability of the Minkowski space*”, Princeton Math. series 41, (1993).
- [6] Hörmander L., “*Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*”, Math. et Appl. 26, Springer Verlag, (1997).
- [7] Klainerman S., “*A Commuting Vectorfields Approach to Strichartz type Inequalities and Applications to Quasilinear Wave Equations*”, Int. Math. Res. Notices 5, (2001), 221-274.
- [8] Klainerman S. and Nicolò F., “*The Evolution Problem in General Relativity*”, Progress in Mathematical Physics 25, Birkhäuser, (2002).
- [9] Klainerman S. and Rodniansky I., “*Improved local well posedness for quasilinear wave equations in dimension three*”, to appear, Duke Math. J. , (2002).
- [10] Klainerman S. and Sideris T., “*On Almost Global Existence for Nonrelativistic Wave Equations in 3D*”, Comm. Pure Appl. Math. XLIX, (1996), 307-321.

S. Alinhac, Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France.
serge.alinhac@math.u-psud.fr