SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2003-2004

Isabelle Gallagher et Laure Saint-Raymond

Résultats asymptotiques pour des fluides en rotation inhomogène

Séminaire É. D. P. (2003-2004), Exposé n° III, 12 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2003-2004____A3_0>

RÉSULTATS ASYMPTOTIQUES POUR DES FLUIDES EN ROTATION INHOMOGÈNE

ISABELLE GALLAGHER ET LAURE SAINT-RAYMOND

1. Formulation mathématique du problème de fluides tournants

Le problème de fluides tournants consiste à étudier le comportement asymptotique de fluides en rotation rapide, par exemple sous l'effet d'un champ magnétique intense, ou sous l'effet de la force de Coriolis.

On s'intéresse donc à une équation du type

$$\partial_t u_\epsilon - \nu \Delta u_\epsilon + Q(u_\epsilon, u_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon} L u_\epsilon = 0, \tag{1.1}$$

où $\nu \geq 0$ est la viscosité, Q représente le terme de transport, et L l'opérateur de pénalisation. Plus précisément, pour des fluides compressibles

$$L : u \mapsto u \wedge B \tag{1.2}$$

où B est un champ de vecteurs régulier à divergence nulle (qui ne s'annule pas). Et pour des fluides incompressibles,

$$L : u \mapsto P(u \wedge B) \tag{1.3}$$

où b satisfait les mêmes hypothèses que précédemment, et P désigne le projecteur de Leray sur les champs à divergence nulle.

Si l'équation (1.1) a des solutions sur un intervalle de temps $[0, T]$ uniforme en ϵ, cela a alors un sens de considérer l'asymptotique $\epsilon \to 0$. Dans cette limite, on s'attend à ce qu'une solution u_ϵ soit correctement approchée par un élément u du noyau de L. Le premier problème consiste à déterminer une équation d'évolution sur u. Une deuxième question naturelle est de décrire la correction $u - u_\epsilon$, et en particulier les termes oscillants qui sont un obstacle à la convergence forte.

Le cas où le vecteur de rotation est constant a été étudié par de nombreux auteurs, à la fois pour des modèles compressibles et des modèles incompressibles et dans différents types de domaines (voir par exemple [1], [2] ou [8] pour des fluides incompressibles, et [3] ou [7] pour des plasmas raréfiés). Dans ce cas, on sait obtenir le comportement asymptotique moyen (qui est donné par la limite faible du champ de vitesses), et on sait aussi décrire toutes les oscillations du système et leur couplage éventuel : les méthodes de filtrage utilisées (introduites indépendamment par Grenier [8] et Schochet [10]) reposent en fait sur des calculs explicites en variables de Fourier, et sur des estimations de dispersion si le domaine considéré est l'espace tout entier.

Dans le cas où le vecteur de rotation n'est pas homogène, ces méthodes ne sont plus applicables. Si néanmoins il est de direction constante

$$B \equiv b(x)e_3,$$

des techniques de compacité faible et de compacité par compensation vont néanmoins permettre de déterminer assez simplement le mouvement asymptotique moyen. Pour décrire la composante oscillante du mouvement, il reste alors à comprendre comment interagissent le terme (linéaire) de pénalisation et le terme (non linéaire) de transport. En particulier, on s'attend à ce que le flot modifie notoirement la phase d'oscillation (qui est bien sûr inhomogène). Si la direction du vecteur de rotation est variable, il faut prendre en compte des effets géométriques : on s'attend cependant à obtenir des résultats assez similaires - au moins en ce qui concerne le mouvement asymptotique moyen - si la géométrie des lignes de champ n'est pas trop singulière (voir Remarque 1.4 de [4]).

2. Etude de l'opérateur de pénalisation

Le comportement asymptotique de u_ϵ solution de (1.1) va dépendre fortement de la structure de la perturbation singulière. En particulier, il est facile de montrer que toute valeur d'adhérence $\bar{u}$ de la famille (u_ϵ) appartient nécessairement au noyau de L, qu'il faut alors caractériser.

2.1. **Cas compressible.** Dans le cas compressible, l'équation $u \wedge B = 0$ caractérisant le noyau de L est très simple à résoudre :

Proposition 2.1. *Soit L l'opérateur linéaire défini par (1.2). Alors un champ de vecteurs $u \in L^2(\Omega)$ appartient au noyau de L si et seulement si il existe $\alpha \in L^2(\Omega)$ tel que*

$$u = \alpha e_3.$$

Cela signifie que la composante non oscillante du mouvement comporte très peu de degrés de liberté. En particulier, si on se place en 2D dans le plan orthogonal au vecteur de rotation, le champ de vitesses est purement oscillant. On obtient ainsi un problème modèle pour étudier l'interaction entre la pénalisation et le transport.

2.2. **Cas incompressible.** Dans le cas incompressible, le mutiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de divergence nulle (ie. le gradient de pression) modifie sensiblement la résolution de l'équation $u \wedge B = \nabla p$ caractérisant le noyau.

Proposition 2.2. *Soit L l'opérateur linéaire défini par (1.3). Alors un champ de vecteurs $u \in L^2(\Omega)$ à divergence nulle appartient au noyau de L si et seulement si il existe $\nabla_h \varphi \in L^2(\Omega_h)$ et $\alpha \in L^2(\Omega_h)$ tels que*

$$u = \nabla_h^\perp \varphi + \alpha e_3, \quad \nabla_h \varphi . \nabla_h^\perp b = 0.$$

On note alors $\mathcal{O} = \{x \in \Omega \,/\, \nabla b(x) \neq 0\}$ et $\mathcal{S}$ l'intérieur de l'ensemble singulier, et on suppose que ces ensembles satisfont des hypothèses de régularité $(H0) - (H2)$ (qui seront précisées ultérieurement). Soit Π (resp. $\Pi_\perp$) la projection orthogonale L^2 sur *le noyau de L (resp. sur son orthogonal). Alors Π et $\Pi_\perp$ peuvent être prolongées sur $S'(\mathcal{O}\cup\mathcal{S})$ et satisfont*

$$\|\Pi u\|_{H^s(\mathcal{O}\cup\mathcal{S})}\leq C_s\|u\|_{H^s(\mathcal{O}\cup\mathcal{S})},\quad \|\Pi_\perp u\|_{H^s(\mathcal{O}\cup\mathcal{S})}\leq C_s\|u\|_{H^s(\mathcal{O}\cup\mathcal{S})},$$

où, pour tout $s\geq 0$, $H^s(\mathcal{O}\cup\mathcal{S})$ est la fermeture de $C^\infty(\mathcal{O}\cup\mathcal{S})$ pour la norme H^s, et $H^{-s}(\mathcal{O}\cup\mathcal{S})$ son dual.

Remarque 2.1. *Les opérateurs Π et $\Pi_\perp$ ne sont généralement pas continus dans $H^s(\Omega)$ pour $s\geq 1/2$. Cela implique en particulier que le groupe $(\exp(tL))_{t\in\mathbf{R}}$ n'est pas uniformément borné dans $H^s(\Omega)$. Cela va poser des problèmes si l'on veut étudier les oscillations, a fortiori si l'on veut considérer un modèle non visqueux.*

3. Résultats de convergence faible

Dans le cas incompressible, le noyau de la pénalisation est assez riche. Il est alors intéressant de comprendre la dynamique associée au mouvement moyenné, c'est-à-dire de déterminer la limite faible $\bar{u}$ d'une suite quelconque de solutions (faibles) u_ϵ de (1.1). Bien sûr, la difficulté consiste à passer à la limite dans le terme non linéaire $Q(u_\epsilon,u_\epsilon)$ de l'équation.

Dans le cas où le vecteur de rotation est inhomogène, les méthodes reposant sur l'étude du spectre de L et notamment des résonances semblent inaccessibles. On va donc privilégier des méthodes de compacité faible, dans le même esprit que les travaux de Lions et Masmoudi [9] sur la limite incompressible. L'idée est de décomposer le terme quadratique $Q(u_\epsilon,u_\epsilon)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}Q(u_\epsilon,u_\epsilon)&=Q(\Pi u_\epsilon,\Pi u_\epsilon)\\&\quad+Q(u_\epsilon-\Pi u_\epsilon,\Pi u_\epsilon)+Q(\Pi u_\epsilon,u_\epsilon-\Pi u_\epsilon)\\&\quad+Q(u_\epsilon-\Pi u_\epsilon,u_\epsilon-\Pi u_\epsilon)\end{aligned}\tag{3.1}$$

où Π désigne la projection orthogonale sur le noyau de L. Si on parvient à établir de la compacité forte sur la projection Πu_ϵ (qui ne doit pas osciller), on pourra passer à la limite dans les trois premiers termes (puisque $u_\epsilon-\Pi u_\epsilon$ tend faiblement vers 0). L'idée est ensuite de prouver que dans le dernier cas la limite est 0 pour des raisons algébriques, de type compacité par compensation. On a alors le

Théorème 3.1. [4] *Supposons que le vecteur de rotation est de direction constante $B=b(x_h)e_3$, où b est une fonction strictement positive régulière, par exemple une perturbation C^∞ à support compact d'une constante, satisfaisant en outre des hypothèses géométriques $(H0)-(H2)$ (qui seront précisées ultérieurement).*

Soit $u^0\in L^2(\Omega)$ un champ de vecteurs à divergence nulle. Pour $\epsilon>0$, on considère u_ϵ une solution faible des équations de Navier-Stokes incompressibles (1.1) avec $\nu>0$, $Q(u,u)=P(u.\nabla u)$ et L donné par (1.3).

Alors, à extraction près, u_ϵ converge faiblement dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^+ \times \Omega)$ vers une limite $\bar{u}$ qui vaut 0 si $\Omega_3 = \mathbf{R}$, et qui satisfait le système suivant si $\Omega_3 = \mathbf{T}$:

$$
\begin{aligned}
\partial_t \bar{u}_3 - \nu\Delta\bar{u}_3 + \bar{u}_h.\nabla\bar{u}_3 = 0, \quad \partial_3\bar{u}_3 = 0 \textit{ sur } \mathbf{R}^+ \times \Omega,\\
\partial_t \bar{u}_h - \nu\Delta\bar{u}_h + \bar{u}_h.\nabla\bar{u}_h + \nabla_h p = 0, \quad \nabla_h.\bar{u}_h = 0 \textit{ sur } \mathbf{R}^+ \times \mathcal{S},\\
\partial_t \bar{u}_h - \nu\Pi\Delta\bar{u}_h = 0 \textit{ sur } \mathbf{R}^+ \times \mathcal{O},\\
\bar{u}_h = 0 \textit{ sur } \mathbf{R}^+ \times \partial\mathcal{S}\\
\bar{u}(t=0) = \Pi u^0 \textit{ sur } \mathcal{O} \cup \mathcal{S}.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Remarque 3.1. *Dans les régions où b est homogène, on retrouve à la limite les équations de Navier-Stokes 2D. Dans les régions où b n'est pas homogène, le phénomène de moyennisation est beaucoup plus important, ce que l'on peut interpréter comme un effet turbulent : les différentes échelles sont mélangées à cause des variations de b.*

Pour que le système (3.2) ait un sens et définisse complètement la limite $\bar{u}$, il est alors nécessaire de supposer que

$$(H0), \qquad \mathcal{S} \textit{ est régulier}$$

$$(H1), \qquad \Omega \setminus (\mathcal{O} \cup \mathcal{S}) \textit{ est de mesure nulle}$$

et pour des raisons de simplicité on impose de plus qu' il y ait un système de coordonnées global régulier (b, σ, x_3) sur chaque composante connexe de $\mathcal{O}$ (hypothèse $(H2)$).

Sous des hypothèses plus générales sur le champ B (en particulier s'il n'est pas de direction constante), un argument similaire devrait fonctionner : la difficulté consiste à obtenir une caractérisation propre du noyau de L et des estimations sur la projection orthogonale Π sur le noyau de L (problèmes géométriques).

3.1. **Equation de contrainte.**

Proposition 3.1. *Soit $u^0 \in L^2(\Omega)$ un champ de vecteurs à divergence nulle. Pour tout $\epsilon > 0$, on considère u_ϵ une solution faible des équations de Navier-Stokes incompressibles (1.1).*

Alors l'inégalité d'énergie suivante est vérifiée

$$\|u_\epsilon(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\nu \int_0^t \|\nabla u_\epsilon(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \leq \|u^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.3}$$

En particulier, u_ϵ est faiblement compacte dans $L^2([0,T] \times \Omega)$, et tout point d'adhérence $\bar{u}$ vérifie $L\bar{u} = 0$, ou autrement dit

$$\bar{u} = \Pi\bar{u} \tag{3.4}$$

Preuve. La structure de l'équation (1.1) qui régit les fluides tournants est très similaire à celle des équations de Navier-Stokes usuelles, puisque la perturbation singulière est un opérateur linéaire antisymétrique qui ne modifie pas l'inégalité d'énergie. On peut donc construire des solutions faibles globales “à la Leray” qui sont uniformément bornées dans $L^2([0,T] \times \Omega)$.

Il est alors facile de montrer que les points d'adhérence de la famille (u_ϵ) (qui sont les limites faibles dans $L^2([0,T]\times\Omega)$ de suites extraites) satisfont l'équation de contrainte. En effet, en mutipliant (1.1) par ϵ et en passant à la limite au sens des distributions grâce à l'estimation d'énergie (3.3), on obtient que $L\bar{u}=0$. ■

3.2. **Equation moyennée.** La stratégie consiste ensuite à caractériser un tel point d'adhérence $\bar{u}$ non pas comme limite faible d'une suite extraite de (u_ϵ) (renotée abusivement (u_ϵ)), mais comme limite forte de la suite associée $(\bar{u}_\epsilon)$ où $\bar{u}_\epsilon$ est la fonction définie par

$$\bar{u}_\epsilon=\Pi u_\epsilon.$$

Proposition 3.2. *Soit $u^0\in L^2(\Omega)$ un champ de vecteurs à divergence nulle. Soit (u_ϵ) une suite de solutions faibles des équations de Navier-Stokes incompressibles (1.1) convergeant faiblement vers $\bar{u}$. On note $\bar{u}_\epsilon=\Pi u_\epsilon$ la projection orthogonale de u_ϵ sur le noyau de L.*

Alors $\bar{u}_\epsilon$ satisfait l'équation d'évolution suivante

$$\begin{aligned}&\partial_t\bar{u}_\epsilon+\Pi(u_\epsilon\cdot\nabla u_\epsilon-\nu\Delta u_\epsilon)=0,\\&\bar{u}_\epsilon=\Pi\bar{u}_\epsilon.\end{aligned}\tag{3.5}$$

En particulier, la convergence

$$\bar{u}_\epsilon\to\bar{u}$$

a lieu dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^+\times\Omega)$ fort.

Preuve. L'équation (3.5) est obtenue simplement en appliquant la projection Π à l'équation pénalisée (1.1), et en remarquant que

$$\Pi(Lv)=0$$

(puisque L est anti-autoadjoint).

Comme Π est continue dans $H^s(\mathcal{O}\cup\mathcal{S})$ pour tout s, et que $H^s(\Omega)\subset H^s(\mathcal{O}\cup\mathcal{S})$ pour $s\le 0$, on a alors que

$$\partial_t\bar{u}_\epsilon \text{ est bornée dans } W^{1,\infty}([0,T],\mathcal{D}'(\mathcal{O}\cup\mathcal{S})).$$

D'autre part, à cause de l'inégalité d'énergie, (u_ϵ) est bornée dans $L^2([0,T],\mathcal{K})$ où $\mathcal{K}$ est localement compact dans $L^2(\Omega)$: $(\bar{u}_\epsilon)$ est alors bornée dans $L^2([0,T],\Pi\mathcal{K})$ avec ΠK localement compact dans $L^2(\Omega)$. Par interpolation, on obtient la compacité forte de $(\bar{u}_\epsilon)$ dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^+\times\Omega)$. L'identification des limites se fait alors en utilisant la continuité de Π et l'identité $\Pi\bar{u}=\bar{u}$. ■

3.3. **Un argument de compacité par compensation.** La dernière étape consiste donc à passer à la limite dans l'équation moyennée (3.5), la seule difficulté étant de déterminer la limite du terme non linéaire. En utilisant la décomposition (3.1) et les convergences

$$\bar{u}_\epsilon\to\bar{u} \text{ fortement dans } L^2_{loc}(\mathbf{R}^+\times\Omega),$$

$$w_\epsilon=u_\epsilon-\bar{u}_\epsilon\rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } L^2_{loc}(\mathbf{R}^+\times\Omega),$$

on se ramène à étudier la convergence du terme projeté$\Pi(w_\epsilon\cdot\nabla w_\epsilon)$ que l'on réécrit $-\Pi(w_\epsilon\wedge rot w_\epsilon)$ en utilisant l'identité

$$v\wedge rot v=\nabla\frac{|v|^2}{2}-v\cdot\nabla v$$

ainsi que la relation $\Pi(\nabla|v|^2)=0$.

Proposition 3.3. *Soit $u^0\in L^2(\Omega)$ un champ de vecteurs à divergence nulle. Pour tout $\epsilon>0$, on considère u_ϵ une solution faible des équations de Navier-Stokes incompressibles (1.1). On note $w_\epsilon=\Pi_\perp u_\epsilon$ la projection orthogonale de u_ϵ sur l'orthogonal du noyau de L, et $W_{\epsilon,3}\in L^2_{loc}(\mathbf{R}^+\times\Omega)$ la fonction de moyenne nulle telle que $w_{\epsilon,3}=\partial_3 W_{\epsilon,3}$.*

Alors les équations d'oscillation suivantes sont vérifiées

$$\begin{aligned}\epsilon\partial_t(w_{\epsilon,h}-\nabla_h W_{\epsilon,3})+bw_{\epsilon,h}^\perp&=s_\epsilon,\\ \epsilon\partial_t(\partial_2 w_{\epsilon,1}-\partial_1 w_{\epsilon,2})+\nabla_h.(bw_{\epsilon,h})&=s'_\epsilon,\end{aligned}\tag{3.6}$$

où s_ϵ, s'_ϵ convergent vers 0 dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^+,\mathcal{D}'(\mathcal{O}\cup\mathcal{S}))$ quand $\epsilon\to 0$.

En particulier, la convergence

$$\Pi(w_\epsilon\wedge rot w_\epsilon)\to 0$$

a lieu au sens des distributions quand $\epsilon\to 0$.

Preuve. En multipliant l'équation pénalisée par ϵ et en projetant sur l'orthogonal du noyau de L, on montre que

$$\epsilon\partial_t\Pi_\perp u_\epsilon+\Pi_\perp Lu_\epsilon=\epsilon\partial_t w_\epsilon+Lw_\epsilon=\epsilon\Pi_\perp(\nu\Delta u_\epsilon-u_\epsilon\cdot\nabla u_\epsilon)$$

tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathcal{O}\cup\mathcal{S})$ à cause de la continuité de $\Pi_\perp$. On obtient alors les équations (3.6) en appliquant le rotationnel et en intégrant les deux premières composantes par rapport à la variable x_3.

Quitte à régulariser w_ϵ (par convolution), on peut supposer que s_ϵ et s'_ϵ sont réguliers de sorte que le calcul formel suivant a un sens. On pose

$$\rho_{\epsilon,h}=\nabla_h^\perp W_{\epsilon,3}-w_{\epsilon,h}^\perp,\quad \rho_{\epsilon,3}=\partial_1 w_{\epsilon,2}-\partial_2 w_{\epsilon,1}$$

et par souci de clarté on ne mentionne plus l'indice ϵ. On a alors

$$\begin{aligned}w_\epsilon\wedge rot\, w_\epsilon&=\begin{pmatrix}-\frac{1}{b}(\epsilon\partial_t\rho_1+r_\epsilon)\\ -\frac{1}{b}(\epsilon\partial_t\rho_2+r_\epsilon)\\ \partial_3 W_3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\partial_3\rho_1\\ \partial_3\rho_2\\ \rho_3\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-\frac{\epsilon}{b}\rho_3\partial_t\rho_2-\partial_3W_3\partial_3\rho_2+r_\epsilon\\ \frac{\epsilon}{b}\rho_3\partial_t\rho_1+\partial_3W_3\partial_3\rho_1+r_\epsilon\\ \frac{\epsilon}{b}(\partial_t\rho_2\partial_3\rho_1-\partial_t\rho_1\partial_3\rho_2)+r_\epsilon\end{pmatrix}\end{aligned}$$

où r_ϵ désigne une quantité tendant vers 0.

La troisième composante se calcule aisément

$$(w_\epsilon \wedge rot\, w_\epsilon)_3 = -\frac{\epsilon}{b}\partial_t(\rho_1\partial_3\rho_2) + \frac{\epsilon}{b}\partial_3(\rho_1\partial_t\rho_2) + r_\epsilon \tag{3.7}$$

Les composantes horizontales peuvent aussi se mettre sous forme conservative. En effet, on a

$$\begin{aligned}(w_\epsilon \wedge rot\, w_\epsilon)_h &= -\frac{\epsilon}{b}\partial_t(\rho_h^\perp\rho_3) + \frac{\epsilon}{b}\rho_h^\perp\partial_t\rho_3 - \partial_3 W_3\partial_3\rho_h^\perp + r_\epsilon\\ &= -\frac{\epsilon}{b}\partial_t(\rho_h^\perp\rho_3) + \frac{1}{b}\rho_h^\perp(w_h\cdot\nabla b - b\partial_3 w_3) - \partial_3 W_3\partial_3\rho_h^\perp + r_\epsilon\\ &= -\frac{\epsilon}{b}\partial_t(\rho_h^\perp\rho_3) - \frac{1}{b^2}\rho_h^\perp(\epsilon\partial_t\rho_h\cdot\nabla b) - \partial_3(\rho_h^\perp\partial_3 W_3)\end{aligned}$$

en utilisant les équations d'oscillation (3.6), ainsi que la contrainte de divergence nulle $\partial_3 w_3 = -\nabla_h\cdot w_h$. Sur $\mathcal{S}$ le terme du milieu est nul. Sur $\mathcal{O}$, grâce à l'identité

$$\rho_h^\perp = (\rho_h\cdot\nabla b)\frac{\nabla^\perp b}{|\nabla b|^2} - (\rho_h\cdot\nabla^\perp b)\frac{\nabla b}{|\nabla^\perp b|^2},$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned}(w_\epsilon \wedge rot\, w_\epsilon)_h =& -\frac{\epsilon}{b}\partial_t(\rho_h^\perp\rho_3) - \frac{\epsilon}{2}\partial_t\left((\rho_h\cdot\nabla\log b)^2\frac{\nabla^\perp b}{|\nabla b|^2}\right)\\ &+ \left((\rho_h\cdot\nabla\log b)(\epsilon\partial_t\rho_h\cdot\nabla\log b)\right)\nabla b - \partial_3(\rho_h^\perp\partial_3 W_3)\end{aligned} \tag{3.8}$$

Il est alors facile de vérifier que tout élément du noyau de L est presque orthogonal à $w_\epsilon \wedge rot\, w_\epsilon$: les termes de correction sont soit des dérivées totales en temps du type $\epsilon\partial_t\Pi_\epsilon$, soit des restes r_ϵ, c'est-à-dire qu'ils convergent vers 0 au sens des distributions de $\mathcal{D}'(\mathcal{O}\cup\mathcal{S})$ quand $\epsilon\to 0$. ■

4. Résultats de convergence forte

4.1. **Cas compressible.** Dans le cas compressible 2D, le noyau de l'opérateur de pénalisation est réduit à $\{0\}$, on s'attend donc à ce que tout le champ de vitesses soit oscillant. De plus, le groupe d'oscillations est facile à décrire

$$R\left(\frac{t}{\epsilon}, x\right)u = u\cos\left(\frac{b(x)t}{\epsilon}\right) - u^\perp\sin\left(\frac{b(x)t}{\epsilon}\right),$$

L'inhomogénéité de b entraine alors une perte de régularité ($R(\frac{t}{\epsilon}, x)u$ explose dans toutes les normes Sobolev H^s pour $s>0$), et une interaction avec l'opérateur de transport.

L'enjeu est alors de comprendre comment la phase d'oscillation est modifiée par le flot (une modification même légère de la phase change le champ de vecteurs de façon significative). Il faut ensuite trouver un espace adapté pour établir un résultat de convergence (les estimations de stabilité de type énergie ne vont pas fonctionner par manque de régularité).

Théorème 4.1. [5] *Supposons que le vecteur de rotation est de direction constante et de divergence nulle* $B \equiv be_3$*, où* b *est une fonction* $C^\infty \cap W^{2,\infty}(\mathbf{R}^2)$ *minorée par une constante strictement positive.*

Soit $u_0 \in W^{s,\infty}(\mathbf{R}^2)$ *(*$s \geq 1$*) un champ de vecteurs. Pour tout* $\epsilon > 0$*, on considère* $u_\epsilon \in L^\infty_{loc}([0, T_\epsilon[, W^{s,\infty}(\mathbf{R}^2))$ *la solution forte maximale des équations d'Euler sans pression (1.1) avec* $\nu = 0$*,* $Q(u, u) = u.\nabla u$ *et* L *donné par (1.2).*

Alors $\liminf_{\epsilon\to 0} T_\epsilon = T^* > 0$ *et pour tout* $T < T^*$

$$u_\epsilon(t, x) - \big(u_0(x) \cos\theta_\epsilon(t, x) - u_0^\perp(x) \sin\theta_\epsilon(t, x)\big)$$

converge fortement vers 0 dans $L^\infty([0, T] \times \mathbf{R}^2)$*, où la phase* θ_ϵ *est définie par l'équation suivante*

$$\theta_\epsilon(t, x) = \frac{b(x)t}{\epsilon} - tu_0(x).\nabla \log b(x) \sin\theta_\epsilon(t, x) + tu_0^\perp(x).\nabla \log b(x) \cos\theta_\epsilon(t, x). \tag{4.1}$$

Remarque 4.1. *Pour démontrer un tel résultat de convergence forte, on doit d'une part décrire très précisément les oscillations (qui convergent faiblement vers 0, mais contiennent une énergie finie), et d'autre part établir une estimation de stabilité. Pour le système des gaz sans pression, le champ de vitesses est essentiellement transporté par son propre flot : la formulation qui permet d'obtenir des estimations uniformes est la représentation à l'aide des caractéristiques, et l'espace fonctionnel adapté est* $L^\infty([0, T] \times \mathbf{R}^2)$*.*

Le fait que le temps de vie des solutions soit uniformément minoré est en fait obtenu comme une conséquence du développement asymptotique. En effet, pour ϵ *fixé, la solution est bien définie (et régulière) tant que le flot génère un difféomorphisme* $X_\epsilon(t, .)$

$$\frac{dX_\epsilon}{dt}(t, x) = u_\epsilon(t, X_\epsilon(t, x))$$

c'est-à-dire tant que DX_ϵ *est inversible. Or, si* $DX_\epsilon = DX_0 + O(\epsilon)$ *avec* DX_0 *inversible, pour* ϵ *assez petit* DX_ϵ *est inversible.*

La borne supérieure sur le temps de vie des solutions correspond à un phénomène de croisement, comparable à la caustique en optique géométrique. Au-delà de ce temps, le système différentiel

$$\dot{X} = \xi, \quad \dot{\xi} = \xi \wedge b$$

avec donnée initiale $(x, u_0(x))_{x\in\mathbf{R}^2}$ *admet toujours une unique solution régulière, mais l'application* $(X(t, x), \xi(t, x)) \mapsto X(t, x)$ *n'est plus injective et ne peut plus être relevée. Le système hyperbolique n'a plus de solution.*

4.1.1. *Formulation avec les caractéristiques.* Pour obtenir des bornes uniformes sur les solutions (a fortiori pour en étudier le comportement asymptotique), il est nécessaire de bien comprendre la dynamique des particules : on utilise donc une formulation lagrangienne du système à l'aide des caractéristiques.

Proposition 4.1. *Soit* $u_0 \in W^{s,\infty}(\mathbf{R}^2)$ *(*$s \geq 1$*) un champ de vecteurs. Pour* $\epsilon > 0$*, on considère* $u_\epsilon \in L^\infty_{loc}([0, T_\epsilon[, W^{s,\infty}(\mathbf{R}^2))$ *la solution forte maximale des équations d'Euler sans pression (1.1).*

Alors le champ de vitesses u_ϵ satisfait les équations suivantes

$$
\begin{aligned}
u_\epsilon(t, X_\epsilon(t,x)) = u_0(x)\cos\left(\frac{\phi_\epsilon(t,x)}{\epsilon}\right) - u_0^\perp(x)\sin\left(\frac{\phi_\epsilon(t,x)}{\epsilon}\right),\\
\phi_\epsilon(t,x) = \int_0^t b(X_\epsilon(s,x))ds,\\
\frac{dX_\epsilon(t,x)}{dt} = u_\epsilon(t, X_\epsilon(t,x)).
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

En particulier, on a les estimations a priori

$$
\|u_\epsilon\|_{L^\infty([0,T_\epsilon[\times\mathbf{R}^2)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}, \quad \|\partial_{tt}^2\phi_\epsilon(t,x)\|_{L^\infty([0,T_\epsilon[\times\mathbf{R}^2)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}\|\nabla b\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)},
$$

$$
\forall t \in [0,T_\epsilon[, \quad \|X(t,x) - x\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}t.
$$

Preuve. Ici et dans toute la suite, s'il n'y a pas de confusion possible, on omet les indices ϵ pour simplifier les notations.

Tant que les trajectoires sont bien définies et que le flot est un difféomorphisme, le système d'Euler des gaz sans pression se réécrit

$$
\begin{aligned}
\frac{dX}{dt} = u(t,X), \quad X_{|t=0} = x\\
\frac{d}{dt}(u(t,X)) + \frac{b(X)}{\epsilon}u^\perp(t,X) = 0, \quad u_{|t=0} = u_0.
\end{aligned}
$$

L'équation sur le champ de vitesses transporté $u(t,X)$ est alors simplement l'équation du semi-groupe, et on peut l'intégrer pour obtenir (4.2).

De cette identité et du fait que X est un difféomorphisme, on déduit immédiatement la borne L^∞ sur u. Les deux autres estimations s'obtiennent alors très simplement à partir des formules

$$
\frac{dX}{dt} = u(t,X), \quad \partial_{tt}^2\phi = \frac{dX}{dt}\cdot\nabla b(X).
$$

La norme L^∞ semble donc définir de "bons espaces" pour avoir des estimations de stabilité. ■

4.1.2. *Approximation par phase non stationnaire.* En utilisant ces premières estimations a priori, on va pouvoir obtenir par intégrations par parties successives les différents termes du développement asymptotique. Plus précisément, on va utiliser une version (élémentaire) du théorème de phase non stationnaire permettant de calculer l'équivalent d'une intégrale oscillante.

Proposition 4.2. *Soit $u_0 \in W^{s,\infty}(\mathbf{R}^2)$ $(s \geq 1)$ un champ de vecteurs. Pour tout $\epsilon > 0$, on considère $u \in L^\infty_{loc}([0,T_\epsilon[, W^{s,\infty}(\mathbf{R}^2))$ la solution forte maximale des équations d'Euler sans pression (1.1). Et on note $X(.,x)$ la trajectoires associée au champ de vitesses u issue du point x.*

Alors X et DX admettent les développements asymptotiques suivants :

$$
\begin{aligned}
X &= x + \epsilon \frac{u_0}{b} \sin\left(\frac{\phi}{\epsilon}\right) - \epsilon \frac{u_0^\perp}{b}\left(1 - \cos\left(\frac{\phi}{\epsilon}\right)\right) + \epsilon t v + O(\epsilon^2) \\
DX &= Id + u_O \otimes \nabla \log b \cos\left(\frac{\phi}{\epsilon}\right) - t u_0^\perp \otimes \nabla \log b \sin\left(\frac{\phi}{\epsilon}\right) + O(\epsilon)
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

où la vitesse de dérive v est donnée par

$$v = \frac{1}{2b^2}\left((u_0 \cdot \nabla b) u_0^\perp - (u_0^\perp \cdot \nabla b) u_0\right),$$

$O(\epsilon^\alpha)$ désigne une quantité d'ordre ϵ^α dans $L^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^2)$ et T vérifie $T < \min(T_\epsilon, T^*)$ avec $T^* = \|u_0\|^{-1}_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \|\nabla b\|^{-1}_{L^\infty(\mathbf{R}^2)}$.

En particulier, le temps de vie T_ϵ de la solution forte des équations d'Euler sans pression tend vers T^* quand $\epsilon \to 0$.

Preuve. Le développement asymptotique de X est obtenu en cherchant des approximations successives des intégrales oscillantes dans la formule

$$X = x + u_0(x) \int_0^t \cos\left(\frac{\phi_\epsilon(s,x)}{\epsilon}\right) ds - u_0^\perp(x) \int_0^t \sin\left(\frac{\phi_\epsilon(s,x)}{\epsilon}\right) ds$$

Grâce à la borne inférieure sur $\partial_t \phi = b(X)$, à la borne L^∞ sur $\partial^2_{tt}\phi$ et à l'estimation de phase non stationnaire,

$$\left| \int_0^t F(s,x) \exp\left(\frac{i\phi(s,x)}{\epsilon}\right) ds \right| \leq \epsilon \left(\left\| \frac{F}{\partial_t \phi} \right\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^2)} + t \left\| \frac{\partial_t F}{\partial_t \phi} \right\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^2)} \right), \tag{4.4}$$

on obtient que $X - x = O(\epsilon)$.

Pour avoir le terme suivant, on doit écrire explicitement l'intégration par parties qui conduit à (4.4) et utiliser l'identité

$$\partial^2_{tt} \phi(s,x) = (u \cdot b)(s,X)$$

avant d'appliquer le résultat de phase non stationnaire. En effet, l'interaction de termes oscillants provenant du couplage entre l'équation du champ transporté et l'équation des caractéristiques produit des termes non oscillants d'une part (terme de dérive) et de nouvelles harmoniques (à fréquence double) d'autre part :

$$
\begin{aligned}
-\int_0^t \partial_t \left(\frac{1}{\partial_t \phi}\right)(s,x) \sin\left(\frac{\phi(s,x)}{\epsilon}\right) ds &= \int_0^t u_0(x) \cdot \frac{\nabla b(X(s,x))}{2b^2(X(s,x))} \sin\left(\frac{2\phi(s,x)}{\epsilon}\right) ds \\
&\quad - \int_0^t u_0^\perp(x) \cdot \frac{\nabla b(X)}{2b^2(X)}(s,x) \left(1 - \cos\left(\frac{2\phi(s,x)}{\epsilon}\right)\right) ds,
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

et de façon analogue

$$\int_0^t \partial_t \left(\frac{1}{\partial_t \phi}\right)(s,x) \cos\left(\frac{\phi(s,x)}{\epsilon}\right) ds = \int_0^t u_0^\perp(x) \cdot \frac{\nabla b(X)}{2b^2(X)}(s,x) \sin\left(\frac{2\phi(s,x)}{\epsilon}\right) ds$$

$$-\int_0^t u_0(x)\cdot\frac{\nabla b(X)}{2b^2(X)}(s,x)\left(1+\cos\left(\frac{2\phi(s,x)}{\epsilon}\right)\right)\,ds.$$

Des techniques similaires permettent d'obtenir le développement de DX au premier ordre à partir de la formule

$$\begin{aligned}DX-Id= \quad & Du_0(x)\int_0^t \cos\left(\frac{\phi(s,x)}{\epsilon}\right)\,ds - Du_0^\perp(x)\int_0^t \sin\left(\frac{\phi(s,x)}{\epsilon}\right)\,ds\\ & -\frac{1}{\epsilon}\int_0^t (X(t,x)-X(\tau,x))^\perp\otimes(DX(\tau,x)\cdot\nabla)b(X(\tau,x))\,d\tau\end{aligned}\tag{4.6}$$

du développement au deuxième ordre de X, et d'une inégalité de stabilité de type Gronwall.

De cette dernière estimation, on déduit que le Jacobien $J(t,x)=|\det(DX(t,x))|$ satisfait

$$\left|J(t,x)-1-u_0\cdot\nabla\log bt\cos\left(\frac{\phi(t,x)}{\epsilon}\right)+u_0^\perp\cdot\nabla\log bt\sin\left(\frac{\phi(t,x)}{\epsilon}\right)\right|\le C_T\epsilon.$$

Pour $T<\|u_0\|_{L^\infty}^{-1}\|\nabla b\|_{L^\infty}^{-1}$, il existe alors ϵ_T tel que

$$\forall\epsilon\le\epsilon_T,\quad\forall t\in[0,T],\quad\sup_{x\in\mathbf{R}^2}|J(t,x)-1|<1,$$

ce qui signifie que X est un C^1-difféomorphisme sur $\mathbf{R}^2$ et que nécessairement $T_\epsilon>T$. Inversement il est facile de vérifier que le phénomène de croisement des trajectoires se produit pour la première fois à un instant $T^*+O(\epsilon)$, de sorte que $\limsup T_\epsilon\le T^*$. ∎

4.1.3. *Asymptotique du champ de vitesses.* L'étude préliminaire des trajectoires permet de dériver facilement l'asymptotique du champ de vitesses transporté $u(t,X)$. Il suffit en effet d'insérer le développement limité de X dans la formule (4.2) :

$$u(t,X)-\Big(u_0(x)\cos(\widetilde{\phi}_\epsilon(t,x))-u_0^\perp(x)\sin(\widetilde{\phi}_\epsilon(t,x))\Big)$$

converge fortement vers 0 dans $L^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^2)$, où la phase $\widetilde{\phi}_\epsilon$ est donnée par

$$\widetilde{\phi}_\epsilon(t,x)=\frac{b(x)t}{\epsilon}-t\left(u_0^\perp(x)\cdot\nabla_x\right)\log b(x).\tag{4.7}$$

La dernière étape consiste à inverser les caractéristiques

$$\begin{aligned}x-X^{-1}(t,x)=&\epsilon\frac{u_0}{b}(x)\sin\widetilde{\phi}_\epsilon(t,X^{-1}(t,x))\\ &-\epsilon\frac{u_0^\perp}{b}(x)\Big(1-\cos\widetilde{\phi}_\epsilon(t,X^{-1}(t,x))\Big)-\epsilon t v(x)+O(\epsilon^2).\end{aligned}$$

Un calcul simple de développements limités permet alors de conclure la preuve du Théorème 4.1.

4.2. **Cas incompressible.** Dans le cas incompressible, l'étude du couplage entre oscillations et transport est beaucoup plus compliquée. D'une part, l'opérateur de pénalisation est plus complexe puisqu'il est non local (il fait intervenir le projecteur de Leray, opérateur pseudo-différentiel de degré 0). D'autre part, la formulation Lagran-gienne de la convection n'est pas aussi simple : la contrainte d'incompressibilité ne s'écrit pas bien en termes de caractéristiques. Enfin, pour la même raison de non localisation, les normes L^∞ ne sont pas bien adaptées au problème.

Dans le cas particulier de la dimension 2 d'espace, la formulation en vorticité permet de contourner certaines difficultés : on peut montrer que la quantité $\omega + \frac{b}{\epsilon}$ est constante le long des trajectoires, où ω désigne le tourbillon du champ de vitesses. Reste alors à décrire suffisamment précisément le groupe d'oscillations pour comprendre les couplages, et à trouver un espace adapté pour écrire une estimation de stabilité. Ceci fait l'objet d'un travail en cours [6].

Références

[1] A. Babin, A. Mahalov, et B. Nicolaenko, Global splitting, integrability and regularity of 3D Euler and Navier–Stokes equations for uniformly rotating fluids, *European Journal of Mechanics*, **15**, 1996, pages 291-300.

[2] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher et E. Grenier, Anisotropy and dispersion in rotating fluids, *Nonlinear Partial Differential Equations and their applications, Collège de France Seminar*, Studies in Mathematics and its Applications, **31**, pages 171–191.

[3] E. Frénod et E. Sonnendrücker, Homogeneization of the Vlasov equation and the Vlasov–Poisson system with a strong external magnetic field, *Asymptotic Analysis*, **18**, 3, 1998, pages 193–213.

[4] I. Gallagher et L. Saint-Raymond, Weak convergence results for inhomogeneous rotating fluid equations, *soumis*, *Preprint du Centre de Mathématiques de l'École polytechnique*, 2003.

[5] I. Gallagher et L. Saint-Raymond, Asymptotic results for pressureless magneto-hydrodynamics, *soumis*, *Preprint du Centre de Mathématiques de l'École polytechnique*, 2003.

[6] I. Gallagher et L. Saint-Raymond, Strong convergence results for the 2D incompressible rotating fluids, *en préparation.*

[7] F. Golse et L. Saint-Raymond, The Vlasov-Poisson system with strong magnetic field, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **78**, 1999, pages 791–817.

[8] E. Grenier, Pseudodifferential energy estimates of singular perturbations, *Communications in Pure and Applied Mathematics*, **50**, 9, 1997, pages 821–865.

[9] P.L. Lions et N. Masmoudi, Une approche locale de la limite incompressible, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 329, 1999, 387-392.

[10] S. Schochet, Fast singular limits of hyperbolic PDEs. *J. Diff. Equ.* **114**, 1994, pages 476 − 512.

(I. Gallagher) Centre de Mathématiques UMR 7640 CNRS, Ecole Polytechnique,, 91128 Palaiseau, FRANCE

E-mail address: `Isabelle.Gallagher@math.polytechnique.fr`

(L. Saint-Raymond) Laboratoire J.-L. Lions, Université Paris VI, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, FRANCE

E-mail address: `saintray@ann.jussieu.fr`