SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2003-2004

R. Belaouar, Thierry Colin, G. Gallice, et Cedric Galusinski

Amortissement Landau en physique des plasmas

Séminaire É. D. P. (2003-2004), Exposé n° II, 12 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2003-2004____A2_0>

Amortissement Landau en Physique des plasmas

R. Belaouar[1,2], T. Colin[2], G. Gallice[1], C. Galusinski[2]

1 *SIS, CEA CESTA, BP 2 33114 Le barp, France.*
2 *Mathématiques Appliquées de Bordeaux UMR CNRS 5466 et CEA LRC M03,*
Université Bordeaux 1, 351 cours de la Libération, 33405 Talence, France

Résumé:
Le but de cet article est de donner un sens au modèle mathématique décrivant l'amortissement Landau des ondes Langmuir en Physique des plasmas. L'originalité de ce modèle est la présence d'un couplage nonlinéaire entre le champ électrique, fonction de la position spatiale, et la distribution électronique des électrons en fonction de la fréquence. Ce couplage spatio-fréquentiel ainsi que les termes nonlinéaires obligent à considérer le problème simultanément en variable spatiale et fréquentielle sur le champ électrique. Deux théorèmes d'existence locale sont alors établis; l'un avec une hypothèse portant sur la distribution électronique initiale assurant un amortissement des ondes Langmuir au cours du temps; l'autre sans cette hypothèse, mais pour des données initiales plus régulières.

1 Le modèle

Le système de Zakharov décrit l'intéraction des ondes plasmas électronique (haute fréquence) avec les ondes ioniques acoustiques dans un plasma (voir [10]). Ce système couple l'enveloppe lentement variable E du champ électrique avec la variation n de la densité des ions par rapport à l'état d'équilibre de densité constante. Sous forme adimensionné, il s'écrit en dimension 1 d'espace,

$$\begin{aligned} &i\partial_t E + \partial_x^2 E = nE \\ &\frac{1}{c^2}\partial_t^2 n - \partial_x^2 n = \partial_x^2(|E|^2). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Physiquement, ces ondes n'existent pas par elles mêmes et sont créées par une onde pompe de la forme

$$E_p(x)\exp(i(k_p x - \omega t)) \text{ avec } |\partial_x E_p| << k_p E_p,$$

et $\omega = -k_p^2$ qui est donc résonante avec la première équation de (1.1). Cette onde pompe est souvent obtenue par effet Raman [2]. Le système (1.1) devient,

$$\begin{aligned} &i\partial_t E + \partial_x^2 E = nE + E_p(x)\exp(i(k_p x - \omega t)) \\ &\frac{1}{c^2}\partial_t^2 n - \partial_x^2 n = \partial_x^2(|E|^2). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ce système (1.2) ne décrit pas les effets cinétiques dus à des déséquilibres thermodynamiques par les électrons.
Une façon de remedier à cela est d'introduire un couplage entre (E, n) et $F_e(t, v)$ (la moyenne spatiale de la distribution en vitesse des électrons). La vitesse des électrons est reliée à leur

phases et après adimensionnement on a $v = k^{-1}$ où k est la variable de Fourier duale de x. Ce couplage s'écrit [7]

$$
\begin{aligned}
&i(\partial_t E + \nu_e \star E) + \partial_x^2 E = nE + E_p \exp(i(k_p x - \omega t)),\\
&\frac{1}{c^2}\partial_t^2 n - \partial_x^2 n = \partial_x^2(|E|^2),\\
&\partial_t F_e - \partial_v(\frac{1}{|v|}|\hat{E}(\frac{1}{v},t)|^2 \partial_v F_e) + F_e - F_{e0} = 0,\\
&\hat{\nu}_e(k,.) = -\frac{1}{k|k|}\partial_v F_e(\frac{1}{k},.).
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

où $F_{e0}(.)$ est une Gaussienne, $|\hat{E}(k,t)|$ est la transformée de Fourier de $x \to E(x,t)$.
Il est plus commode d'écrire ce système en utilisant la variable k plutôt que v et on pose

$$H_e(k,t) = F_e(v,t).$$

On obtient alors le système

$$
\begin{aligned}
&i(\partial_t E + \nu_e \star E) + \partial_x^2 E = nE + E_p \exp(i(k_p x - \omega t)),\\
&\frac{1}{c^2}\partial_t^2 n - \partial_x^2 n = \partial_x^2(|E|^2),\\
&\partial_t H_e - k^2\partial_k(|k|^3|\hat{E}(k,t)|^2 \partial_k H_e) + H_e - H_{e0} = 0,\\
&\hat{\nu}_e(k,.) = sgn(k)\partial_k H_e(k,.).
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Il reste à déterminer sur quels domaines ces équations sont vérifées.
Usuellement, les deux premières équations de (1.4) sont supposées être vérifiées sur l'espace entier, ici $\mathbb{R}$.
En revanche la troisième et quatrième ne sont vérifiées que pour des vitesses bornées et également loin de zéro,

$$v \in [-A,-a] \cup [a,A], \quad (A > a > 0),$$

ce qui donne un domaine en fréquence de la forme,

$$k \in \Omega = [-a^{-1}, -A^{-1}] \cup [A^{-1}, a^{-1}], \quad (A > a > 0).$$

En dehors de ce domaine, on prend

$$\hat{\nu}_e(k,.) = 0.$$

Le système que nous étudions est alors,

$$
\begin{aligned}
&i(\partial_t E + \nu_e \star E) + \partial_x^2 E = nE + E_p \exp(i(k_p x - \omega t)), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0\\
&\frac{1}{c^2}\partial_t^2 n - \partial_x^2 n = \partial_x^2(|E|^2), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_t H_e - k^2\partial_k(|k|^3|\hat{E}(k,t)|^2 \partial_k H_e) + H_e - H_{e0} = 0, \quad k \in \Omega, t \geq 0\\
&\hat{\nu}_e(k,.) = 1_\Omega sgn(k)\partial_k H_e(k,.).
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Les conditions aux limites sont

$$\partial_k H_{e|\partial\Omega} = 0. \tag{1.7}$$

Le problème de Cauchy avec $\nu_e = 0$ est maintenant bien compris (même en dimension 2 et 3) [8], [9], [6], [1], [3], [4], [5].

On ne sait pas faire le cas général $\nu_e \neq 0$. Nous allons nous restreindre au cas $c = +\infty$ et les deux équations (1.5) deviennent

$$i(\partial_t E + \nu_e \star E) + \partial_x^2 E = |E|^2 E + E_p \exp(i(k_p x - \omega t)), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \tag{1.8}$$

On doit alors résoudre (1.8), (1.6) et (1.7).
Nous introduisons un espace naturel pour la condition limite (1.7),

$$H_n^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) \text{ tel que } \partial_{n|\partial\Omega} u = 0\}.$$

Pour ne pas alourdir inutilement les calculs, nous prenons $\Omega =]-2, -1[\cup]1, 2[$.
Pour démontrer l'existence de solutions, nous allons tout d'abord construire des solutions d'un problème régularisé. La régularisation est obtenue en prenant un terme de diffusion non dégénéré dans l'équation (1.6), c'est à dire que l'on remplace $|k|^3|\hat{E}|^2$ par $|k|^3|\hat{E}|^2 + \varepsilon$.
De plus le terme non linéaire $|E|^2 E$ est remplacé par un terme source f. On obtient alors des solutions dont le temps d'existence dépend de ε et f. Nous montrons cette existence pour

$$(E, \hat{E}, H_e) \in L^\infty(0, T^\star; H^1(\mathbb{R})) \times L^\infty(0, T^\star; H^2(\Omega) \cap H^1(\mathbb{R})) \times L^\infty(0, T^\star; H_n^2(\Omega)).$$

L'étape suivante revient à remplacer f par $|E|^2 E$ par une méthode de point fixe. Le point clef est que H^1 est une algèbre et que E, $\hat{E}$ appartiennent à H^1 de sorte que

$$\widehat{|E|^2 E} \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$$

et donc

$$\widehat{|E|^2 E} \in H^2(\Omega).$$

L'étape suivante consiste à obtenir des bornes indépendantes de ε. On remarquera alors que lors des estimations de l'énergie, la dissipation dégénérante avec $|E|^2$ suffit à contrôler les termes préalablement contrôlés par la dissipation en ε.

2 Les résultats

On remarque que $\hat{\nu}_e$ n'a aucune raison d'être positif pour une donnée initiale de la distribution électronique quelconque. Le premier objectif est de donner un théorème d'existence pour ce système sans hypothèse de signe sur $\hat{\nu}_e$ à l'instant initial, nous n'avons donc pas affaire à une équation de Schrödinger amortie. Nous rappelons le système que nous étudions,

$$\begin{aligned}
&i(\partial_t E + \nu_e \star E) + \partial_x^2 E = |E|^2 E + E_p, \\
&\partial_t H_e - k^2 \partial_k(|k|^3 |\hat{E}|^2 \partial_k H_e) + H_e - H_{e0} = 0, \quad \forall k \in \Omega, \\
&\partial_k H_{e|\Omega} = 0, \\
&\hat{\nu}_e(k, .) = sgn(k) \partial_k H_e 1_\Omega, \\
&H_e(., 0) = H_{e0}(.), E(., 0) = E_0(.).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Nous obtenons le théorème d'existence locale suivant:

Theorem 2.1 *Soit $E_0 \in H^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{E}_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1(\mathbb{R})$, et soit $H_{e0} \in H_n^2(\Omega)$, il existe $T^\star > 0$ et une unique solution (E, H_e) de (2.9) telle que*

$$(E, \hat{E}, H_e) \in L^\infty([0, T^\star[; H^1(\mathbb{R})) \times L^\infty([0, T^\star[; H^2(\Omega) \cap H^1(\mathbb{R})) \times L^\infty([0, T^\star[; H_n^2(\Omega)),$$

$$(E, \hat{E}, H_e) \in C^0([0, T^\star[; H^{1-\eta}(\mathbb{R})) \times C^0([0, T^\star[; H^{2-\eta}(\Omega) \cap H^{1-\eta}(\mathbb{R})) \times C^0([0, T^\star[; H^{2-\eta}(\Omega)), \ \forall \eta > 0.$$

Le terme Landau est en fait un terme d'amortissement dans les situations physiques. Nous allons supposer la positivité de $\hat{\nu}_e$ à l'instant initiale, démontrer un principe du maximum sur $\hat{\nu}_e$ afin d'obtenir un terme Landau amortissant qui permettra d'obtenir un théorème d'existence dans un espace moins régulier.

Theorem 2.2 *Soit $E_0 \in H^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{E}_0 \in H^1(\mathbb{R})$, et soit $H_{e0} \in H^1(\Omega)$ tel que*

$$\hat{\nu}_{e0}(k) = sgn(k)\partial_k H_{e0}(k) \geq 0, \quad \forall k \in \Omega,$$

il existe $T^\star > 0$, ne dépendant que de la taille de $(E_0, \hat{E}_0, H_{e0})$ dans $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\Omega)$, une solution (E, H_e) de (2.9) telle que

$$(E, \hat{E}, H_e) \in C^0([0, T^\star[; H^{1-\eta}(\mathbb{R})) \times C^0([0, T^\star[; H^{1-\eta}(\mathbb{R})) \times C^0([0, T^\star[; H^{1-\eta}(\Omega)), \quad \forall \eta > 0,$$

$$(E, \hat{E}, H_e) \in L^\infty([0, T^\star[; H^1(\mathbb{R})) \times L^\infty([0, T^\star[; H^1(\mathbb{R})) \times L^\infty([0, T^\star[; H^1(\Omega)).$$

De plus,

$$\hat{\nu}_e(k, t) = sgn(k)\partial_k H_e(k, t) \geq 0, \quad \forall (k, t) \in \Omega \times (0, T^\star)$$

et

$$|\hat{E}(t)|_{L^2(\mathbb{R})} \leq |\hat{E}_0|_{L^2(\Omega)}, \forall t \leq T^\star.$$

La section suivante est consacrée aux preuves des résultats précédents.

3 Preuves

Afin de démontrer les théorèmes 2.1 et 2.2, nous considérons préalablement des systèmes à dissipation non dégénérée dans l'équation de distribution électronique. Le premier système étudié ne comporte pas le terme non linéaire classique de Schrödinger, le second système comporte tous les termes.

3.1 Problème non dégénéré simplifié

On considère dans un premier temps le problème à diffusion non dégénérée sur l'équation en distribution électronique et sans le terme non linéaire classique de Schrödinger,

$$\begin{aligned}
&i(\partial_t E^\varepsilon + \nu_e^\varepsilon \star E^\varepsilon) + \partial_x^2 E^\varepsilon = f, \\
&\partial_t H_e^\varepsilon - k^2 \partial_k((|k|^3 |\hat{E}|^2 + \varepsilon)\partial_k H_e^\varepsilon) + H_e^\varepsilon - H_{e0} = 0, \quad \forall k \in \Omega, \\
&\partial_k H_{e|\Omega}^\varepsilon = 0, \\
&\hat{\nu}_e^\varepsilon(k, .) = sgn(k)\partial_k H_e^\varepsilon 1_\Omega, \\
&H_e^\varepsilon(., 0) = H_{e0}(.), E^\varepsilon(., 0) = E_0(.),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

avec $f \in H^1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in H_n^2(\Omega) \cap H^1(\mathbb{R})$.

Proposition 3.1 *Soit $E_0 \in H^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{E}_0 \in H^1(\mathbb{R})$, et soit $H_{e0} \in H^1(\Omega)$, il existe $T^\star > 0$ et une unique solution $(E^\varepsilon, H_e^\varepsilon)$ de (3.10) telle que*

$$(E^\varepsilon, \hat{E}^\varepsilon, H_e^\varepsilon) \in C^0([0, T^\star[; H^1(\mathbb{R})) \times C^0([0, T^\star[; H^1(\mathbb{R})) \times C^0([0, T^\star[; H^1(\Omega)).$$

Soit $E_0 \in H^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{E}_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1(\mathbb{R})$, et soit $H_{e0} \in H_n^2(\Omega)$, il existe $T^\star > 0$ et une unique solution $(E^\varepsilon, H_e^\varepsilon)$ de (3.10) telle que

$$(E^\varepsilon, \hat{E}^\varepsilon, H_e^\varepsilon) \in C^0([0, T^\star[; H^1(\mathbb{R})) \times C^0([0, T^\star[; H^2(\Omega) \cap H^1(\mathbb{R})) \times C^0([0, T^\star[; H_n^2(\Omega)).$$

La preuve de cette proposition s'obtient par une technique de point fixe.
On considère la fonction $G_e : (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que

$$G_e \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H_n^2(\Omega)),$$

et on définit $\mu_e = sgn(k)\partial_k G_e 1_\Omega$, E, puis H^ε et enfin ν^ε de la façon suivante,

$$\begin{aligned}
& i(\partial_t E + \mu_e \star E) + \partial_x^2 E = f, \\
& \partial_t H_e^\varepsilon - k^2 \partial_k((|k|^3|\hat{E}|^2 + \varepsilon)\partial_k H_e^\varepsilon) + H_e^\varepsilon - H_{e0} = 0, \quad \forall k \in \Omega, \\
& \partial_k H_{e|\Omega}^\varepsilon = 0, \\
& \hat{\nu}_e^\varepsilon(k,.) = sgn(k)\partial_k H_e^\varepsilon 1_\Omega, \\
& H_e^\varepsilon(.,0) = H_{e0}(.), E(.,0) = E_0(.).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

On cherche à montrer que l'application $\tau(G_e) = H_e^\varepsilon$ est bien définie sur un espace à préciser et vérifie les hypothèses d'invariance de boule et de contraction, suffisantes à l'obtention d'un point fixe.
On note $B_R(H)$ la boule de centre 0 et de rayon R d'un espace H.
Pour R suffisamment grand et T suffisamment petit, on montre que τ opère de la boule

$$B_R(L^\infty(0,T; H_n^2(\Omega)) \cap L^2(0,T, H_n^3(\Omega)))$$

dans elle même, ainsi que de

$$B_R(L^\infty(0,T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_n^2(\Omega)))$$

dans elle même.
Nous démontrons seulement ce dernier résultat.
Les estimations d'energie dans L^2 donnent

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|\hat{E}|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leq 2\int_\Omega |\hat{\mu}_e||\hat{E}|^2 + 2\int_\mathbb{R} |\hat{f}||\hat{E}| \\
&\leq c|\hat{\mu}_e|_{H^1(\Omega)}|\hat{E}|^2_{L^2(\Omega)} + |\hat{f}|^2_{L^2(\mathbb{R})} + |\hat{E}|^2_{L^2(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}|k^{-1}H_e^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega (|k|^3|\hat{E}|^2 + \varepsilon)|\partial_k H_e^\varepsilon|^2 + |k^{-1}H_e^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} \leq |k^{-1}H_{e0}|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Les estimations H^1 donnent

$$\frac{d}{dt}|\partial_k \hat{E}|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\int_\Omega \hat{\mu}_e|\partial_k\hat{E}|^2 + 2\int_\Omega \partial_k\hat{\mu}_e \hat{E}\partial_k\overline{\hat{E}} = 2\int_\mathbb{R} \partial_k\hat{f}\partial_k\overline{\hat{E}} + 4\int_\mathbb{R} k\hat{E}\partial_k\overline{\hat{E}},$$

donc,

$$\frac{d}{dt}|\partial_k\hat{E}|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq c|\hat{\mu}_e|_{H^1(\Omega)}|\hat{E}|^2_{H^1(\Omega)} + |\partial_k\hat{f}|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2|\partial_k\hat{E}|^2_{L^2(\mathbb{R})} + C|\hat{E}|^2_{H^1(\mathbb{R})}.$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}|\partial_k H_e^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega k^2(|k|^3|\hat{E}|^2 + \varepsilon)|\partial_k^2 H_e^\varepsilon|^2 + |\partial_k H_e^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} \leq \\
&\varepsilon|\partial_k H_e^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^{-1}|k^2\partial_k(|k|^3|\hat{E}|^2)|_{L^1(\Omega)} + |\partial_k H_{e0}|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Par la sommation de ces estimations, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(|\hat{E}|^2_{H^1(\mathbb{R})} + |k^{-1}H_e^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} + |k^{-1}\partial_k H_e^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \int_\Omega (|k|^3|\hat{E}| + \varepsilon)(k^2|\partial_k H_e^\varepsilon|^2 + |H_e^\varepsilon|^2) \leq \\
&c(1 + \varepsilon^{-1} + |\hat{\mu}_e|_{H^1(\Omega)})|\hat{E}|^2_{H^1(\Omega)} + |H_{e0}|^2_{H^1(\Omega)} + |\hat{f}|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

C'est grâce au terme de diffusion non dégénérée que nous récupérons l'estimation de $\hat{\nu}_e$ dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Par le choix de T suffisamment petit (dépendant de ε) et R suffisamment grand en fonction de la taille des données intiales, nous obtenons que l'application τ qui à G_e associe H_e^ε opère de la boule $B_R(L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_n^2(\Omega)))$ dans elle même.

La propriété de contraction s'obtient dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Soit G_e^1, G_e^2 éléments de $B_R(L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_n^2(\Omega)))$. On note $(E^1, H_e^{\varepsilon,1}, \nu_e^{\varepsilon,1})$, $(E^2, H_e^{\varepsilon,2}, \nu_e^{\varepsilon,2})$ les solutions de (3.11) associées à G_e^1 et G_e^2. On note $E = E^1 - E^2$, $H_e^\varepsilon = H_e^{\varepsilon,1} - H_e^{\varepsilon,2}$, $\nu_e^\varepsilon = \nu_e^{\varepsilon,1} - \nu_e^{\varepsilon,2}$. Pour tout $\eta > 0$, on a,

$$\frac{d}{dt}|\hat{E}|^2_{L^2(\Omega)} \leq K(\eta, R)|\hat{E}|^2_{L^2(\Omega)} + \eta|\mu_e|^2_{L^2(\Omega)},$$

où K dépend de η et R.

$$\frac{d}{dt}|H_e^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega (|\hat{E}^1|^2 + \varepsilon)|\partial_k H_e^\varepsilon|^2 \leq C(R,\varepsilon)|\hat{E}|^2_{L^2(\Omega)}.$$

D'aprés le lemme de Gronwall, on conclut aisément que

$$|H_e^\varepsilon|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \varepsilon|\partial_k H_e^\varepsilon|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C(R,\varepsilon)\exp(KT)\eta|\mu_e|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

La propriété de contraction découle de ces deux estimations par le choix de η et T suffisamment petit.

■

3.2 Problème non dégénéré complet

Nous démontrons ensuite un théorème d'existence pour le problème complet suivant avec toujours un terme de diffusion non dégénéré,

$$\begin{aligned}
&i(\partial_t E^\varepsilon + \nu_e^\varepsilon \star E^\varepsilon) + \partial_x^2 E^\varepsilon = |E^\varepsilon|^2 E^\varepsilon + E_p,\\
&\partial_t H_e^\varepsilon - k^2 \partial_k((|k|^3|\hat{E^\varepsilon}|^2 + \varepsilon)\partial_k H_e^\varepsilon) + H_e^\varepsilon - H_{e0} = 0, \quad \forall k \in \Omega,\\
&\partial_k H^\varepsilon_{e|\Omega} = 0,\\
&\hat{\nu_e^\varepsilon}(k,.) = sgn(k)\partial_k H_e^\varepsilon 1_\Omega,\\
&H_e^\varepsilon(.,0) = H_{e0}(.), E^\varepsilon(.,0) = E_0(.).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Proposition 3.2 *Soit $E_0 \in H^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{E}_0 \in H^1(\mathbb{R})$, et soit $H_{e0} \in H^1(\Omega)$, il existe $T^\star > 0$ et une unique solution $(E^\varepsilon, H_e^\varepsilon)$ de (3.12) telle que*

$$(E^\varepsilon, \hat{E}^\varepsilon, H_e^\varepsilon) \in C^0(0,T^\star;H^1(\mathbb{R})) \times C^0(0,T^\star;H^1(\mathbb{R})) \times C^0(0,T^\star;H^1(\Omega)).$$

Soit $E_0 \in H^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{E}_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\Omega)$, et soit $H_{e0} \in H_n^2(\Omega)$, il existe $T^\star > 0$ et une unique solution $(E^\varepsilon, H_e^\varepsilon)$ de (3.12) telle que

$$(E^\varepsilon, \hat{E}^\varepsilon, H_e^\varepsilon) \in C^0(0,T^\star;H^1(\mathbb{R})) \times C^0(0,T^\star;H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\Omega)) \times C^0(0,T^\star;H_n^2(\Omega)).$$

D'après la proposition 3.1, le problème (3.10) admet une solution. On pose $f = |D|^2 D + E_p$ ou D appartient à $C^0([0,T^\star[, H^1(\mathbb{R}))$ et $\hat{D}$ appartient à $C^0([0,T^\star[, H^1(\mathbb{R}))$. On vérifie que f appartient bien à $C^0([0,T^\star[, H^1(\mathbb{R}))$ car $H^1(\mathbb{R})$ est une algèbre en dimension 1 et de plus $\hat{f} = \hat{D} \star \hat{\overline{D}} \star \hat{D}$ appartient à $C^0([0,T^\star[; H^1(\mathbb{R}))$ car $\hat{D}$ appartient à $C^0([0,T^\star[; L^1(\mathbb{R}))$.
On a même,

$$\partial_k^2 \hat{f} = \hat{D} \star \partial_k \hat{\overline{D}} \star \partial_k \hat{D} + \partial_k^2 E_p$$

appartient à $C^0([0,T^\star[; L^\infty(\mathbb{R}))$ résultant de la convolé d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ par une de $L^2(\mathbb{R})$ convolé encore par une fonction de $L^2(\mathbb{R})$.
On va ainsi démontrer la proposition ci-dessus par un point fixe sur l'application τ qui à D associe E^ε solution de

$$\begin{aligned}
&i(\partial_t E^\varepsilon + \nu_e^\varepsilon \star E^\varepsilon) + \partial_x^2 E^\varepsilon = |D|^2 D + E_p, \\
&\partial_t H_e^\varepsilon - k^2 \partial_k((|k|^3 |\hat{E}^\varepsilon|^2 + \varepsilon)\partial_k H_e^\varepsilon) + H_e^\varepsilon - H_{e0} = 0, \quad \forall k \in \Omega, \\
&\partial_k H^\varepsilon_{e|\Omega} = 0, \\
&\hat{\nu}_e^\varepsilon(k,.) = sgn(k)\partial_k H_e^\varepsilon 1_\Omega, \\
&H_e^\varepsilon(.,0) = H_{e0}(.), E^\varepsilon(.,0) = E_0(.).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Si $H_{e0} \in H^1(\Omega)$, $E_0 \in H^1(\mathbb{R})$ et $\hat{E}_0 \in H^1(\mathbb{R})$, on montre que τ opère de $B_R(H_T)$ dans elle même, pour R suffisamment grand et T assez petit, où H_T est défini comme

$$H_T = \{e \in L^\infty(0,T; H^1(\mathbb{R})) \text{ t.q. } \hat{e} \in L^\infty(0,T; H^1(\mathbb{R}))\}.$$

La propriété de contraction est obtenue dans $L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{R}))$.
Si $H_{e0} \in H_n^2(\Omega)$, $E_0 \in H^1(\mathbb{R})$ et $\hat{E}_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1(\mathbb{R})$, on montre aussi que τ opère de $B_R(V_T)$ dans elle même, pour R suffisamment grand et T assez petit, où V_T est défini comme

$$V_T = \{e \in L^\infty(0,T, H^1(\mathbb{R})) t.q. \hat{e} \in L^\infty(0,T, H^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\Omega))\}.$$

■

3.3 Estimation uniforme en ε

A cette étape, nous disposons d'une solution pour le problème (3.12). Nous allons obtenir des bornes uniformes en ε sur les solutions de (3.12) afin de passer à la limite lorsque ε tend vers zéro. Sans hypothèse de signe sur $\hat{\nu}_e$, nous n'obtenons ces bornes que pour E dans V_T.

Proposition 3.3 *La solution de (3.12) vérifie*

$$\begin{aligned}
&|E^\varepsilon(t)|^2_{H^1(\mathbb{R})} + |\hat{E}^\varepsilon(t)|^2_{H^1(\mathbb{R})} + |\partial_k^2 \hat{E}^\varepsilon(t)|^2_{L^2(\Omega)} + |H_e(t)|^2_{L^2(\Omega)} + |\partial_k^2 H_e(t)|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad + \int_0^t \int_\Omega (|\hat{E}|^2 + \varepsilon)|\partial_k^3 H_e|^2 \\
&\le C(t)\left(|E_0|^2_{H^1(\mathbb{R})} + |\hat{E}_0|^2_{H^1(\mathbb{R})} + |\partial_k^2 \hat{E}_0|^2_{L^2(\Omega)} + |H_{e0}|^2_{L^2(\Omega)} + |\partial_k^2 H_{e0}|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\qquad + |E_p|^2_{H^1(\mathbb{R})} + |\hat{E}_p|^2_{H^1(\mathbb{R})} + |\partial_k^2 \hat{E}_p|^2_{L^2(\Omega)}, \forall t \le T^\star,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

où $C(t)$ est une fonction indépendante de ε.

Les estimations L^2 sont les suivantes:

$$\frac{d}{dt}|\hat{E}^\varepsilon|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2|\hat{\nu}_e^\varepsilon \hat{E}^\varepsilon|_{L^2(\Omega)}|\hat{E}^\varepsilon|_{L^2(\Omega)},$$

$$\frac{d}{dt}|k^{-1}H_e^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega (|k|^3|\hat{E}^\varepsilon|^2+\varepsilon)|\partial_k H_e^\varepsilon|^2 + |k^{-1}H_e^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} \leq |k^{-1}H_e^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)}.$$

L'estimation H^1 de E est obtenue par produit scalaire de l'équation de Schrödinger avec $-\partial_x^2\overline{E}$ puis en prenant la partie imaginaire de l'expression. On utilise la formule de Parseval pour le terme en ν_e^ε.

$$\frac{d}{dt}|\partial_x E^\varepsilon|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\int_\Omega \hat{\nu}_e^\varepsilon \hat{E}^\varepsilon k^2 \overline{\hat{E}^\varepsilon} \leq 6\int_{\mathbb{R}} |\partial_x E^\varepsilon|^2|E^\varepsilon|^2 \tag{3.15}$$

Les autres estimations H^1 s'écrivent

$$\frac{d}{dt}|\partial_k \hat{E}^\varepsilon|^2_{L^2(\mathbb{R})} + 2\int_\Omega \hat{\nu}_e^\varepsilon|\partial_k\hat{E}^\varepsilon|^2 + 2\int_\Omega \partial_k\hat{\nu}_e^\varepsilon\hat{E}^\varepsilon\partial_k\overline{\hat{E}} = 2\int_{\mathbb{R}}\partial_k\hat{E}^\varepsilon \star \hat{E}\star\overline{\hat{E}}\partial_k\overline{\hat{E}} \tag{3.16}$$

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}|\partial_k H_e^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega k^2(|k|^3|\hat{E}|^2+\varepsilon)|\partial_k^2 H_e^\varepsilon|^2 + |\partial_k H_e^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} \leq \\ \varepsilon|\partial_k H_e^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^{-1}|k^2\partial_k(|k|^3|\hat{E}|^2)|_{L^1(\Omega)} + |\partial_k H_{e0}|^2_{L^2(\Omega)}.\end{gathered} \tag{3.17}$$

Les termes de l'estimation de $\partial_k\hat{E}$ se contrôlent de la façon suivante,

$$-\int_\Omega \partial_k\hat{\nu}_e^\varepsilon\hat{E}^\varepsilon\partial_k\overline{\hat{E}^\varepsilon} \leq \int_\Omega |k|^5|\hat{E}^\varepsilon|^2|\partial_k^2\hat{H}_e^\varepsilon|^2 + |\partial_k\hat{E}^\varepsilon|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{3.18}$$

$$\int_{\mathbb{R}}\partial_k\hat{E}^\varepsilon\star\hat{E}\star\overline{\hat{E}^\varepsilon}\partial_k\overline{\hat{E}^\varepsilon} \leq |\partial_k\hat{E}^\varepsilon|^2_{L^2(\mathbb{R})}|\hat{E}^\varepsilon|^2_{L^1(\mathbb{R})} \leq c|\partial_k\hat{E}^\varepsilon|^2_{L^2(\mathbb{R})}|E^\varepsilon|^2_{H^1(\mathbb{R})}. \tag{3.19}$$

On remarque que l'estimation (3.18) est uniforme en ε grâce à l'estimation de dissipation dégénérée obtenue en (3.17). On comprend ici que le terme de convolution $\nu_e^\varepsilon\star E$ de l'équation de Schrödinger dégénère de la même façon que le terme de dissipation dans l'équation de distribution electronique, lors des estimations de l'énergie.
Sans hypothèse de signe sur $\hat{\nu}_e^\varepsilon$, le terme restant doit être estimé,

$$-\int_\Omega \hat{\nu}_e^\varepsilon|\partial_k\hat{E}^\varepsilon|^2 \leq c|\hat{\nu}_e^\varepsilon|_{H^1(\Omega)}|\partial_k\hat{E}^\varepsilon|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

C'est à cause de ce dernier terme qu'il est nécessaire d'établir les estimations $H^2(\Omega)$ afin d'obtenir des estimations uniformes en ε,

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}|\partial_k^2\hat{E}^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega \hat{\nu}_e^\varepsilon|\partial_k^2\hat{E}^\varepsilon|^2 + 4\int_\Omega \partial_k\hat{\nu}_e^\varepsilon\partial_k\hat{E}^\varepsilon\partial_k^2\overline{\hat{E}^\varepsilon} \\ +2\int_\Omega \partial_k^2\hat{\nu}_e^\varepsilon\hat{E}^\varepsilon\partial_k^2\overline{\hat{E}^\varepsilon} = 2\int_\Omega(\partial_k\hat{E}^\varepsilon\star\partial_k\hat{E}^\varepsilon\star\overline{\hat{E}^\varepsilon})\partial_k^2\overline{\hat{E}^\varepsilon}\end{gathered} \tag{3.20}$$

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}|\partial_k^2 H_e^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega k^2(|k|^3|\hat{E}|^2+\varepsilon)|\partial_k^3 H_e^\varepsilon|^2 + |\partial_k^2 H_e^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} \leq \\ 4\int_\Omega |(1+\partial_k)(|k|^3|\hat{E}|^2+\varepsilon)||\partial_k^2 H_e^\varepsilon||\partial_k^3 H_e^\varepsilon| + 4\int_\Omega |\partial_k(|k|^3|\hat{E}|^2+\varepsilon)||\partial_k H_e^\varepsilon||\partial_k^3 H_e^\varepsilon| \\ +|\partial_k^2 H_{e0}|^2_{L^2(\Omega)}.\end{gathered} \tag{3.21}$$

Le contrôle des différents termes de (3.20) se fait de la façon suivante,

$$\int_\Omega \hat{\nu}_e^\varepsilon|\partial_k^2\hat{E}^\varepsilon|^2 \leq c|\partial_k H_e^\varepsilon|_{H^1(\Omega)}|\partial_k^2\hat{E}^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$\int_\Omega \partial_k \hat\nu_e^\varepsilon \partial_k \hat E^\varepsilon \partial_k^2 \overline{\hat E^\varepsilon} \le |\partial_k^2 H_e^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} + c|\partial_k \hat E^\varepsilon|^2_{H^1(\Omega)} |\partial_k^2 \hat E^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)},$$

$$\int_\Omega \partial_k^2 \hat\nu_e^\varepsilon \hat E^\varepsilon \partial_k^2 \overline{\hat E^\varepsilon} \le \int_\Omega |k|^5 |\hat E^\varepsilon|^2 |\partial_k^3 H_e^\varepsilon|^2 + |\partial_k^2 \hat E^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)}.$$

On retrouve encore dans l'estimation ci-dessus une borne par le terme de dissipation dégénéré obtenu dans (3.21).
Le dernier terme de (3.20) exploite la troncature en fréquence par la borne de la longueur de Ω

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\partial_k \hat E^\varepsilon \star \partial_k \hat E^\varepsilon \star \overline{\hat E^\varepsilon}) \partial_k^2 \overline{\hat E^\varepsilon} &\le |\partial_k \hat E^\varepsilon \star \partial_k \hat E^\varepsilon \star \overline{\hat E^\varepsilon}|_{L^2(\Omega)} ||\partial_k^2 \hat E^\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \\ &\le |\Omega|^{\frac12} ||\partial_k \hat E^\varepsilon \star \partial_k \hat E^\varepsilon \star \overline{\hat E^\varepsilon}|_{L^\infty(\mathbb{R})} ||\partial_k^2 \hat E^\varepsilon|_{L^2(\Omega)} \\ &\le |\Omega|^{\frac12} ||\partial_k \hat E^\varepsilon|^2_{L^2(\mathbb{R})} |\hat E^\varepsilon|_{L^1(\mathbb{R})} |\partial_k^2 \hat E^\varepsilon|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

De plus,

$$|\hat E^\varepsilon|_{L^1(\mathbb{R})} \le c|E^\varepsilon|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Ceci termine le contrôle des termes de (3.20).
L'estimation (3.21) se poursuit ainsi,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |(1+\partial_k)(|k|^3 |\hat E|^2)||\partial_k^2 H_e^\varepsilon||\partial_k^3 H_e^\varepsilon| + \int_\Omega |\partial_k(|k|^3|\hat E|^2)||\partial_k H_e^\varepsilon||\partial_k^3 H_e^\varepsilon| \le \\ &\quad 8\int_\Omega (|\hat E^\varepsilon| + |\partial \hat E^\varepsilon|)(|\partial_k H_e^\varepsilon| + |\partial_k^2 H_e^\varepsilon|)(|\hat E^\varepsilon||\partial_k^3 H_e^\varepsilon|) \le \\ &\quad c|\hat E^\varepsilon|^4_{H^2(\Omega)} + |H_e^\varepsilon|^4_{H^2(\Omega)} + \frac14 \int_\Omega |k|^5 |\hat E^\varepsilon|^2 |\partial_k^3 H_e^\varepsilon|^2.\end{aligned}$$

Ainsi, par la sommation des diverses estimations et majorations, nous obtenons,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(|E^\varepsilon|^2_{H^1(\mathbb{R})} + |\hat E^\varepsilon|^2_{H^1(\mathbb{R})} + |\partial_k^2 \hat E^\varepsilon|^2_L(\Omega)^2 + |k^{-1} H_e^\varepsilon|^2_{L^2(\Omega)} + |\partial_k H_e^\varepsilon|^2_{H^1(\Omega)}\Big) \\ &\quad + \int_\Omega (|\hat E^\varepsilon|^2 + \varepsilon)(|\partial_k^3 H_e^\varepsilon|^2 + |\partial_k^2 H_e^\varepsilon|^2 + |\partial_k H_e^\varepsilon|^2) \le \\ &\quad c|\hat E^\varepsilon|^4_{H^1(\mathbb{R})} + c|\partial_k^2 \hat E^\varepsilon|^4_{L^2(\Omega)} + |H_e^\varepsilon|^4_{H^2(\Omega)} + |E^\varepsilon|^4_{H^1(\mathbb{R})} \\ &\quad + |E_p|^2_{H^1(\mathbb{R})} + |\hat E_p|^2_{H^1(\mathbb{R})} + |\partial_k^2 \hat E_p|^2_{L^2(\Omega)} + |H_{e0}|^2_{H^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

On en déduit aisement l'estimation (3.14). ■

Par passage à la limite quand ε tend vers zéro, on en déduit l'existence d'une solution pour le problème (2.9).

Theorem 3.1 *Soit $E_0 \in H^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat E_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1(\mathbb{R})$, et soit $H_{e0} \in H^2_n(\Omega)$, il existe $T^\star > 0$ et une unique solution (E, H_e) de (2.9) telle que*

$$(E, \hat E, H_e) \in L^\infty([0,T^\star[; H^1(\mathbb{R})) \times L^\infty([0,T^\star[; H^2(\Omega)\cap H^1(\mathbb{R})) \times L^\infty([0,T^\star[; H^2_n(\Omega)),$$

$$(E, \hat E, H_e) \in C^0([0,T^\star[; H^{1-\eta}(\mathbb{R})) \times C^0([0,T^\star[; H^{2-\eta}(\Omega)\cap H^{1-\eta}(\mathbb{R})) \times C^0([0,T^\star[; H^{2-\eta}(\Omega)),\ \forall \eta > 0.$$

On ne démontrera ici que l'unicité de la solution.
Soit $(E_1, \hat E_1, H_{e1}, \nu_{e1})$ et $(E_2, \hat E_2, H_{e2}, \nu_{e2})$ deux solutions de (2.9). On notera $(E, \hat E, H_e, \nu_e)$ la différence de ces solutions.

$$
\begin{aligned}
&i(\partial_t E + \nu_{e1} \star E + \nu_e \star E_2) + \partial_x^2 E = |E_1|^2 E + (E_1 \overline{E} + E\overline{E_2})E_2,\\
&\partial_t H_e - \tfrac{1}{2}k^2\partial_k(|k|^3|\hat{E}_2|^2\partial_k H_e + |k|^3(|\hat{E}_1|^2 - |\hat{E}_2|^2)\partial_k H_{e1})\\
&-\frac{1}{2}k^2\partial_k(|k|^3|\hat{E}_1|^2\partial_k H_e + |k|^3(|\hat{E}_2|^2 - |\hat{E}_1|^2)\partial_k H_{e2}) + H_e = 0, \quad \forall k \in \Omega,\\
&\partial_k H_{e|\partial\Omega} = 0,\\
&H_e(.,0) = 0, E(.,0) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

L'estimation L^2 de $(E, \hat{E}, H_e, \nu_e)$ donne

$$
\frac{d}{dt}|\hat{E}|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\int_\Omega |\hat{\nu_{e1}}||\hat{E}|^2 + |\hat{\nu}_e||\hat{E}_2||\hat{E}| + |E_1|_{L^\infty(\mathbb{R})}|\hat{E}|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq C|\hat{E}|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \int_\Omega |\hat{E}_2|^2|\hat{\nu}_e|^2
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|k^{-1}H_e|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \int_\Omega k^3(|\hat{E}_1|^2 + |\hat{E}_2|^2)|\partial_k H_e|^2 + 2|H_e|^2_{L^2(\Omega)} \leq \\
\int_\Omega k^3||\hat{E}_1|^2 - |\hat{E}_2|^2|(|\partial_k H_{e1}| + |\partial_k H_{e2}|)|\partial_k H_e| \\
\leq C|\hat{E}|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_\Omega k^3(|\hat{E}_1|^2 + |\hat{E}_2|^2)|\partial_k H_e|^2.
\end{aligned}
$$

Ainsi, par sommation et majoration, on obtient,

$$
\frac{d}{dt}\left(|\hat{E}|^2_{L^2(\mathbb{R})} + |k^{-1}H_e|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right) + \int_\Omega k^3|\hat{E}_2|^2|\partial_k H_e|^2 \leq C|\hat{E}|^2_{L^2(\Omega)},
$$

où C dépend des bornes des solutions $(E_i, \hat{E}_i, H_{ei})$ $(i = 1, 2)$, en norme $H^1(\mathbb{R}) \times H^2(\Omega) \cap H^1(\mathbb{R}) \times H^2(\Omega)$.
L'unicité est alors évidente. ∎

3.4 Amortissement Landau

Afin d'exploiter le terme Landau $(\nu_e \star \cdot)$comme un terme d'amortissement $(\hat{\nu}_e \geq 0)$ et non comme un terme de signe quelconque comme dans le théorème 3.1, nous allons supposer $\hat{\nu}_e$ positive à l'instant initiale. Nous montrons alors le résultat suivant,

Proposition 3.4 *Sous les hypothèses de régularité du théorème 3.1, supposons que*

$$
\hat{\nu_{e0}}(k) = sgn(k)\partial_k H_{e0}(k) \geq 0, \quad \forall k \in \Omega,
$$

alors, la solution $(E^\varepsilon, H_e^\varepsilon)$ du problème (2.9) vérifie

$$
\hat{\nu}_e^\varepsilon(k,t) = sgn(k)\partial_k H_e^\varepsilon(k,t) \geq 0, \quad \forall (k,t) \in \Omega \times (0, T^\star).
$$

La preuve de cette proposition repose sur un principe du maximum sur l'equation de $\hat{\nu}_e$,

$$
\partial_t\hat{\nu}_e - k^2\partial_k(|k|^3|\hat{E}|^2\partial_k\hat{\nu}_e) + \hat{\nu}_e - \hat{\nu}_{e0} = 2k\partial_k(|k|^3|\hat{E}|^2\hat{\nu}_e) + k^2\partial_k((\partial_k(|k|^3|\hat{E}|^2)\hat{\nu}_e), \quad \forall k \in \Omega.
$$

Multipliant cette équation par $-k^{-2}\hat{\nu}_e^- = k^{-2}\min(\hat{\nu}_e, 0)$ et intégrant sur Ω, on obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|k^{-1}\hat{\nu}_e^-|^2_{L^2(\Omega)} + 2\int_\Omega |k|^3|\hat{E}|^2|\partial_k\hat{\nu}_e^-|^2 + 2|k^{-1}\hat{\nu}_e^-|^2_{L^2(\Omega)} \leq \\
2\int_\Omega(|k|^3|\hat{E}|^2)|\hat{\nu}_e^-||\partial_k\hat{\nu}_e^-| + 2\int_\Omega |\partial_k(|k|^3|\hat{E}|^2)||\hat{\nu}_e^-||\partial_k\hat{\nu}_e^-|.
\end{aligned}
$$

On en déduit l'estimation

$$\frac{d}{dt}|k^{-1}\hat{\nu}_e^-|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |k|^3|\hat{E}|^2|\partial_k\hat{\nu}_e^-|^2 + 2|k^{-1}\hat{\nu}_e^-|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq C(|\hat{E}|_{L^\infty(\Omega)}, |\partial_k\hat{E}|_{L^\infty(\Omega)})|\hat{\nu}_e^-|^2_{L^2(\Omega)}$$

et comme $\hat{\nu}_e^-$ est nulle à l'instant initiale, $\hat{\nu}_e$ reste positif au cours du temps. ■

Ainsi, l'amortissement de $\hat{E}$ nous permet d'obtenir,

Proposition 3.5 *Sous l'hypothèse de positivité de $\hat{\nu}_e$ à l'instant initiale, la solution de (2.9) vérifie*

$$|\hat{E}(t)|_{L^2(\mathbb{R})} \leq |\hat{E}_0|_{L^2(\Omega)}, \forall t \leq T^\star,$$

$$|E(t)|^2_{H^1(\mathbb{R})} + |\hat{E}(t)|^2_{H^1(\mathbb{R})} + |H_e(t)|^2_{H^1(\Omega)}$$
$$+ \int_0^t \int_\Omega |\hat{E}|^2|\partial_k^2 H_e|^2 + \int_0^t \int_\Omega \hat{\nu}_e(|\hat{E}|^2 + |\nabla\hat{E}|^2)$$
$$\leq C(t)\left(|E_0|^2_{H^1(\mathbb{R})} + |\hat{E}_0|^2_{H^1(\mathbb{R})} + |H_{e0}|^2_{H^1(\Omega)}\right)$$
$$+|E_p|^2_{H^1(\mathbb{R})} + |\hat{E}_p|^2_{H^1(\mathbb{R})}, \forall t \leq T^\star.$$

En reprenant les estimations (3.15)-(3.19) pour $\varepsilon = 0$, on obtient la proposition 3.5. ■

De ces estimations et par un procédé de régularisation des données initiales, on déduit le deuxième résultat de cet article,

Theorem 3.2 *Soit $E_0 \in H^1(\mathbb{R})$ tel que $\hat{E}_0 \in H^1(\mathbb{R})$, et soit $H_{e0} \in H^1(\Omega)$ tel que*

$$\hat{\nu}_{e_0}(k) = sgn(k)\partial_k H_{e0}(k) \geq 0, \quad \forall k \in \Omega,$$

il existe $T^\star > 0$, ne dépendant que de la taille des données intiales $(E_0, \hat{E}_0, H_{e0})$ dans $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\Omega)$, une solution (E, H_e) de (2.9) telle que

$$(E, \hat{E}, H_e) \in C^0(0, T^\star; H^{1-\eta}(\mathbb{R})) \times C^0(0, T; H^{1-\eta}(\mathbb{R})) \times C^0(0, T; H^{1-\eta}(\Omega)), \ \forall \eta > 0,$$

$$(E, \hat{E}, H_e) \in L^\infty(0, T^\star; H^1(\mathbb{R})) \times C^0(0, T; H^1(\mathbb{R})) \times C^0(0, T; H^1(\Omega)).$$

De plus,

$$\hat{\nu}_e(k,t) = sgn(k)\partial_k H_e(k,t) \geq 0, \quad \forall (k,t) \in \Omega \times (0, T^\star)$$

et

$$|\hat{E}(t)|_{L^2(\mathbb{R})} \leq |\hat{E}_0|_{L^2(\Omega)}, \forall t \leq T^*,$$

L'unicité n'est pas établie par manque de régularité.
Malgré la positivité de $\hat{\nu}_e$, la globalisation en temps de la solution n'est pas établie.

Remerciement : Ce travail a été partiellement financé par le GDR 2103 EAPQ CNRS, le réseau européen HYKE financé par la CE (contrat HPRN-CT-2002-00282).

References

[1] J. Bourgain, *On the Cauchy and invariant measure problem for the periodic Zakharov system.* Duke Math. J., Vol. 76 (1), (1994), 175-202.

[2] M. Colin et T. Colin. *On a quasilinear Zakharov system describing laser-plasma interactions.* à paraî tre dans DIE.

[3] J. Ginibre, Y. Tsutsumi et G. Velo. *On the Cauchy problem for the Zakharov system.* J. Funct. Anal., Vol. 151, (1997), 384-436.

[4] L. Glangetas et F. Merle. *Existence of self-similar blow-up solutions for Zakharov equation in dimension two. I.* Comm. Math. Phys., Vol. 160 (1), (1994), 173-215.

[5] L. Glangetas et F. Merle. *Concentration properties of blow up solutions and instability results for Zakharov equation in dimension two. II* Comm. Math. Phys., Vol. 160 (2), (1994), 349-389.

[6] T. Ozawa et Y. Tsutsumi. *Existence and smoothing effect of solution for the Zakharov equations.* Publ. Res. Inst. Math. Sci, Vol. 28 (3), (1992), 329-361.

[7] K. Y. Sanbonmatsu. "Competition between Langmuir wave-wave and wave-particule interaction in the auroral ionosphere.", thesis of university of colorado (1997).

[8] C. Sulem et P-L. Sulem. "The nonlinear Schrödinger Equation. Self-Focusing and Wave Collapse." Applied Mathematical Sciences 139, Springer, (1999).

[9] C. Sulem et P-L. Sulem. *Quelques résultats de régularité pour les équations de la turbulence de Langmuir.*C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, Vol. 289 (3), (1979), 173-176.

[10] V.E. Zakharov, S.L. Musher et A.M. Rubenchik. *Hamiltonian approach to the description of nonlinear plasma phenomena.* Phys. Reports, Vol. 129, (1985), 285-366.