Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2003-2004

Jean-Michel Bismut

Le Laplacien hypoelliptique

Séminaire É. D. P. (2003-2004), Exposé n° XXI, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2003-2004____A21_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

LE LAPLACIEN HYPOELLIPTIQUE

JEAN-MICHEL BISMUT

Résumé. On construit une nouvelle théorie de Hodge sur le fibré cotangent d'une variété Riemannienne X. Le Laplacien correspondant est un opérateur hypoelliptique d'ordre deux, qui est autoadjoint relativement à une forme Hermitienne de signature (∞, ∞). Cette théorie de Hodge interpole entre la théorie de Hodge habituelle sur X et le flot géodésique sur T^*X.

Abstract. We construct a new Hodge theory on the cotangent bundle of a Riemannian manifold X. The corresponding Laplacian is a second order hypoelliptic operator, which is self-adjoint with respect to a Hermitian form whose signature is (∞, ∞). This Hodge theory interpolates between the classical Hodge theory on X and the geodesic flow on T^*X.

Introduction

L'objet de cet exposé est de décrire la construction d'une déformation de la théorie de Hodge d'une variété compacte Riemanienne X, dont le Laplacien associé est un opérateur hypoelliptique sur T^*X.

Cette construction est le résultat d'une tentative de construire la théorie de Hodge sur l'espace des lacets LX de la variété X, ainsi que la déformation de Witten de cette théorie associée à la fonctionnelle d'énergie sur LX. Bien que la théorie de Hodge de LX reste du domaine du rêve, la construction du Laplacien hypoelliptique a été obtenue comme limite 'semiclassique' d'une telle théorie. De manière équivalente, on construit certains termes du développement asymptotique en temps petit du 'noyau de la chaleur' sur LX.

On peut naturellement se passer de toute référence à l'espace des lacets ou à la déformation de Witten pour décrire la construction elle-même. Toutefois, les arguments venant de la théorie rêvée sont très utiles pour anticiper des propriétés miraculeuses du Laplacien hypoelliptique.

Cette construction a été annoncée dans [B04a, B04b, B04c]. Elle est décrite dans [B04d]. L'étude des propriétés analytiques précises du Laplacien hypoelliptique, et ses applications à la torsion analytique font l'objet de travaux menés avec G. Lebeau [BL04].

1. La déformation de Witten

Soit $\left(X, g^{TX}\right)$ une variété Riemannienne compacte, soit $\left(F, \nabla^F, g^F\right)$ un fibré vectoriel complexe plat Hermitien sur X (la connexion ∇^F est donc une connexion plate, c'est à dire une connexion de courbure nulle). Soit $\left(\Omega^{\cdot}\left(X, F\right), d^X\right)$ le complexe de de Rham des formes différentielles C^∞ sur X à coefficients dans F. On

L'auteur remercie J.-M. Bony et G. Lebeau pour leurs observations sur ce texte.

note $H^{\cdot}(X,F)$ la cohomologie de ce complexe, qui est un espace vectoriel complexe $\mathbf{Z}$-gradué de dimension finie.

Soit $\langle\,\rangle_{\Lambda^{\cdot}(T^*X)\otimes F}$ le produit Hermitien sur $\Lambda^{\cdot}(T^*X)\otimes F$ associé à g^{TX}, g^F, soit dv_X la mesure de volume sur X. On munit $\Omega^{\cdot}(X,F)$ du produit Hermitien L_2,

$$\langle s, s'\rangle = \int_X \langle s, s'\rangle_{\Lambda^{\cdot}(T^*X)\otimes F}\, dv_X. \tag{1.1}$$

Soit d^{X*} l'adjoint formel de d^X relativement au produit Hermitien (1.1). On pose

$$\square^X = \left(d^X + d^{X*}\right)^2 = \left[d^X, d^{X*}\right]. \tag{1.2}$$

Dans (1.2), $\left[d^X, d^{X*}\right]$ désigne le supercommutateur (ici l'anticommutateur) de d^X et d^{X*}. Le Laplacien $\square^X$ est un opérateur elliptique autoadjoint d'ordre deux. Soit

$$\mathcal{H}^X = \ker \square^X. \tag{1.3}$$

L'espace $\mathcal{H}^X$ est l'espace des formes harmoniques. Par la théorie de Hodge, on sait que

$$\mathcal{H}^X = \ker d^X \cap \ker d^{X*}. \tag{1.4}$$

De plus la flèche $\mathcal{H}^X \to H^{\cdot}(X,F)$ induit l'isomorphisme canonique,

$$\mathcal{H}^X \simeq H^{\cdot}(X,F) \tag{1.5}$$

Nous suivons maintenant Witten [W82]. Soit $f : X \to \mathbf{R}$ une application C^∞. Pour $T \in \mathbf{R}$, on introduit l'opérateur conjugué d^X_T, qui est donné par la formule,

$$d^X_T = e^{-Tf} d^X e^{Tf}. \tag{1.6}$$

De manière évidente, on a l'isomorphisme de complexes $s \in \left(\Omega^{\cdot}(X,F), d^X\right) \to e^{-Tf}s \in \left(\Omega^{\cdot}(X,F), d^X_T\right)$, qui induit un isomorphisme correspondant en cohomologie.

Soit $d^{X*}_T = e^{Tf} d^{X*} e^{-Tf}$ l'adjoint formel de d^X_T relativement au produit Hermitien (1.1). Soit

$$\square^X_T = \left[d^X_T, d^{X*}_T\right] \tag{1.7}$$

le Laplacien correspondant, qu'on appelle Laplacien de Witten. Pour tout $T \in \mathbf{R}$, le Laplacien $\square^X_T$ est encore un opérateur elliptique autoadjoint d'ordre deux.

On pose maintenant

$$\mathcal{H}^X_T = \ker \square^X_T. \tag{1.8}$$

Comme précédemment, on a l'isomorphisme canonique,

$$\mathcal{H}^X_T \simeq H^{\cdot}(X,F). \tag{1.9}$$

On construit ainsi une déformation de la théorie de Hodge classique, puisque pour $T=0$, $\square^X_T = \square^X$.

Notons également qu'au lieu de remplacer d^X par d^X_T, on peut laisser d^X fixe, et remplacer le produit Hermitien (1.1) par le produit Hermitien

$$\langle s, s'\rangle_T = \int_X \langle s, s'\rangle_{\Lambda^{\cdot}(T^*X)\otimes F}\, e^{-2Tf} dv_X. \tag{1.10}$$

L'adjoint formel $d^{X*'}_T$ de d^X relativement à (1.10) est donné par

$$d^{X*'}_T = e^{2Tf} d^{X*} e^{-2Tf}. \tag{1.11}$$

Soit $\square_T^{X'}$ le Laplacien correspondant. On a alors,

$$\square_T^{X'} = e^{Tf}\square_T^X e^{-Tf}. \tag{1.12}$$

Supposons maintenant que f soit une fonction de Morse. Dans [W82], Witten étudie le comportement du spectre de $\square_T^X$ quand $T \to +\infty$. Il montre très simplement que toutes les valeurs propres de $\square_T^X$, sauf un nombre fini d'entre elles, tendent vers $+\infty$. Les autres valeurs propres tendent vers 0. Soit $\left(F_T^{\cdot}, d_T^X\right)$ le complexe de dimension finie associé aux 'petites' valeurs propres. Witten montre que quand $T \to +\infty$, $F_T^{\cdot}$ se localise au voisinage des points critiques de f. Plus précisément, pour $0 \leq i \leq n$, F_T^i se localise près des points critiques d'indice i. Un argument d'algèbre élémentaire permet alors à Witten [W82] de donner une démonstration analytique des inégalités de Morse.

Le point clé qui explique cette localisation est la formule,

$$\square_T^X = \square^X + T^2 \left|\nabla f\right|^2 + Tc\left(e_i\right)\widehat{c}\left(e_j\right)\nabla_{e_i}\nabla_{e_j} f. \tag{1.13}$$

Dans (1.13), $e_1, \dots e_n$ est une base orthonormale de TX, et les $c\left(e_i\right), \widehat{c}\left(e_j\right)$ sont des variables de Clifford anticommutantes, dont la définition précise importe peu ici. Le terme $T^2 \left|\nabla f\right|^2$ joue le rôle d'un potentiel qui devient très grand en dehors de l'ensemble des points critiques de f. Si $X = \mathbf{R}^n, F = \mathbf{R}$, si $f\left(p\right) = \pm \left|p\right|^2/2$, la formule (1.13) devient,

$$\square_T^X = -\Delta + T^2 \left|p\right|^2 \pm T\left(2N - n\right). \tag{1.14}$$

Dans (1.14), N désigne l'opérateur de nombre (ou de degré) agissant sur $\Omega^{\cdot}\left(\mathbf{R}^n\right)$. Les formules (1.13), (1.14) permettent de démontrer très simplement les résultats de Witten [W82].

Dans [W82], Witten va plus loin. Il conjecture que le fait que les inégalités de Morse soient des inégalités, et non des égalités, est lié à un effet 'tunnel' entre les puits de potentiel associés aux points critiques de f. Plus précisément il suggère que les valeurs propres de $\square_T^X$ sont soient nulles, soit de l'ordre de e^{-cT}, avec $c > 0$. Il indique que les 'instantons' –c'est à dire les courbes intégrales de ∇f reliant (en temps infini) les points critiques– définissent un complexe combinatoire permettant de calculer $H^{\cdot}\left(X, F\right)$, et il conjecture que quand $T \to +\infty$, le complexe $\left(F_T, d_T^X\right)$ s'identifie à ce complexe combinatoire.

Sous des hypothèses de transversalité, Helffer et Sjöstrand [HS85] ont démontré la conjecture de Witten. Par ailleurs, le complexe combinatoire de Witten a été identifié au complexe de Thom-Smale [T49, Sm61, Sm67] associé à ∇f. En utilisant ce dernier résultat, Zhang et l'auteur [BZ94] ont donné une autre démonstration des résultats de Helffer et Sjöstrand.

A l'aide de la déformation de Witten, Zhang et l'auteur [BZ92, BZ94] ont donné une nouvelle démonstration de la conjecture de Ray et Singer [RS71] sur l'égalité de la torsion de Ray-Singer [RS71] (qui est un invariant spectral) et de la torsion de Reidemeister [Rei35, Mi65] (qui est un invariant combinatoire). Ce résultat avait d'abord été démontré par Cheeger [C79] et Müller [Mü78].

2. Espace des lacets et Laplacien de Witten

Soit LX l'espace des lacets de X, c'est à dire l'espace des applications C^∞ de $S_1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ dans X. Alors S_1 agit sur LX, de telle sorte que si $t \in S_1, x. \in LX$, alors $k_t x. = x_{t+\cdot}$. Le champ de vecteurs K engendrant cette action de S_1 est donné par $K = \dot{x}.$. De plus $X \subset LX$ est exactement la variété des points fixes de cette action, ou encore la variété des zéros de K. Notons encore que la métrique g^{TX} se relève naturellement en une métrique g^{TLX} sur LX, qui est S_1-invariante, de telle sorte que K est un champ de vecteurs de Killing.

Nous nous posons alors les deux questions suivantes :

(1) Peut-on construire la théorie de Hodge de LX ?

(2) Peut-on construire une théorie de Morse sur LX, et des déformations de Witten de cette théorie de Hodge ?

A la première question, il faut répondre par la négative. Les raisons en sont très nombreuses. Disons juste que la construction d'un produit Hermitien sur $\Omega^{\cdot}(LX)$ pose quelques difficultés, sans même évoquer la démonstration d'un théorème de Hodge.

La seconde question demande une réponse circonstanciée. La théorie de Morse de la fonctionnelle d'énergie

$$E(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{x}|^2 \, ds \tag{2.1}$$

a permis à Bott [Bo59] de démontrer son théorème de périodicité, par rétraction de LX sur une variété de dimension finie faite de géodésiques brisées. Plus récemment l'homologie de Floer peut être considérée comme une théorie de Morse sur LX pour des fonctionnelles d'indice et coindice infini.

La mesure Brownienne sur LX peut être considérée formellement comme une forme de degré $+\infty$, qui est harmonique pour le Laplacien de Witten associée à la fonction $f = -E$ sur LX. Mais ces considérations formelles sont d'une maigre utilité quand il s'agit de considérer le Laplacien complet sur les formes sur LX, et de démontrer un théorème de Hodge.

En l'état actuel de nos connaissances, la réponse aux questions précédentes est donc essentiellement négative.

Limitons donc nos ambitions, en posant une autre question. Peut-on construire le développement asymptotique du noyau de la chaleur $e^{-t\square^{LX}_{T/\sqrt{t}}}$ sur la diagonale de LX pour $t \to 0$, quand $\square^{LX}_T$ est le Laplacien de Witten associé à $f = -E$? On peut penser en effet que même si l'opérateur $\square^{LX}_T$ n'existe pas plus que son noyau de la chaleur, les termes du développement asymptotique, s'ils existaient, étant 'locaux' sur LX, l'algorithme qui les produit pourrait continuer à avoir un sens. Cette stratégie est elle-même vouée à l'échec, car ce développement asymptotique aurait une singularité d'ordre infini quand $t \to 0$ (puisque LX est de dimension infinie...), qui est la contrepartie locale de la non existence du noyau de la chaleur.

Toutefois, la théorie de l'indice local pour les opérateurs de Dirac [BeGV92] nous donne des exemples de développements asymptotiques non singuliers quand $t \to 0$ de la supertrace du noyau de la chaleur sur la diagonale. Le terme constant de ce développement s'exprime alors à l'aide de formes de Chern-Weil. La question que nous avons posée précédemment peut alors être reformulée de la manière suivante : peut-on construire directement ces formes de Chern-Weil sur LX à l'aide d'opérateurs aux dérivées partielles sur X ou T^*X (le lien entre opérateurs aux dérivées partielles et intégrales fonctionnelles sur LX résultant de la théorie des diffusions, et aussi du calcul stochastique) ?

C'est à cette dernière question que l'article [B04a] donne une réponse positive. Expliquer en quoi [B04a] répond aux questions précédentes n'est pas l'objet de cet exposé. La construction que nous allons décrire ne fait jamais apparaître l'espace

LX. Toutefois les objets ainsi construits auront des propriétés inattendues, qui sont elles-mêmes des conséquences 'naturelles' de nos considérations sur LX. En particulier notre nouvelle théorie de Hodge interpole entre la théorie de Hodge classique pour $T = 0$ et le flot géodésique quand $T \to +\infty$, alors que les géodésiques fermées sont elles mêmes les points critiques de $f = -E$. On peut enfin s'interroger sur le fait que $-E$ ait été considéré plutôt que E, qui est plus naturel du point de vue de la théorie de Morse. Nous donnerons ailleurs une réponse à cette question.

3. Intégrale fonctionnelle et Laplacien de Witten

On fait les mêmes hypothèses qu'à la section 1. Notons que la fonction $f : X \to \mathbf{R}$ se relève naturellement en la fonction $F : LX \to \mathbf{R}$ donnée par

$$F(x_\cdot) = \int_0^1 f(x_s)\, ds. \tag{3.1}$$

La fonction F est S_1-invariante. Si f est une fonction de Morse, F a les mêmes points critiques que f.

Soit $\chi(X)$ la caractéristique d'Euler de X. Alors la caractéristique d'Euler associée à $\left(\Omega^\cdot(X,F), d^X\right)$ est donnée par

$$\chi(X,F) = \dim F \chi(X). \tag{3.2}$$

D'après la formule de McKean-Singer [McS67], on a

$$\chi(X,F) = \mathrm{Tr_s}\left[\exp\left(-\square_T^X/2\right)\right]. \tag{3.3}$$

Dans (3.3), $\mathrm{Tr_s}$ représente la supertrace, c'est à dire la différence des traces évaluées sur les formes paires et impaires.

Supposons maintenant $F = \mathbf{R}$. En utilisant des manipulations venant de la physique sur l'intégrale fonctionnelle [A85], on peut écrire formellement le membre de droite sous la forme d'une intégrale d'une forme différentielle sur LX. Plus précisément (3.3) est équivalent à l'identité formelle,

$$\chi(X) = \int_{LX} \alpha \wedge (T\nabla F)^* \Phi^{TLX}. \tag{3.4}$$

Dans (3.4), α est une forme fermée pour l'opérateur $d + i_K$, de la forme

$$\alpha = \exp(-E + \ldots). \tag{3.5}$$

Dans (3.5), $\ldots$ contient la partie forme de α_t. Décrivons maintenant Φ^{TLX}.

Si $\pi : \left(E, g^E, \nabla^E\right) \to S$ est un fibré réel euclidien de dimension n sur une variété S muni d'une connexion préservant le produit scalaire, Φ^E est la forme de Mathai-Quillen associée [MQ86]. La forme Φ^E est une forme différentielle fermée de degré n sur l'espace total de E à coefficients dans $o(E)$ (qui est le fibré d'orientation de E), gaussienne le long de la fibre E, telle que

$$\pi_* \Phi^E = 1. \tag{3.6}$$

La restriction de Φ^E à S (considéré comme la section nulle de E) est exactement la forme d'Euler $e\left(E, \nabla^E\right)$ de Chern [Ch44]. Si Y est l'élément générique de E, alors Φ^E est donné par la formule,

$$\Phi^E = \exp\left(-\frac{|Y|^2}{2} + \ldots\right). \tag{3.7}$$

Si s est une section C^{∞} de E, pour $T \in \mathbf{R}$, $(Ts)^* \Phi^E$ est une n-forme fermée sur S, qui coïncide avec $e\left(E, \nabla^E\right)$ pour $T = 0$. Par (3.7),

$$(Ts)^* \Phi^E = \exp\left(-\frac{T^2}{2}|s|^2 + \dots\right). \tag{3.8}$$

La formule (3.8) montre très simplement que ce courant se 'localise' au voisinage des zéros de s. Quand $T \to +\infty$, si s est générique, $(Ts)^* \Phi^E$ converge en tant que courant vers le courant d'intégration sur la variété des zéros de s. On peut ainsi donner une démonstration du théorème de Chern-Gauss-Bonnet [Ch44] à partir du théorème d'indice de Hopf. La démonstration de Chern [Ch44] utilise un argument essentiellement identique.

Dans (3.4), Φ^{TLX} est la version K-équivariante de la construction précédente, qui est associée au fibré Euclidien TLX muni de la connexion de Levi-Civita. La forme $(T\nabla F)^* \Phi^{TLX}$ est alors une forme $d + i_K$ fermée sur LX (on utilise de manière essentielle la S_1-invariance de ∇F). Notons que

$$|\nabla F|^2 = \int_0^1 |\nabla f(x_s)|^2 \, ds. \tag{3.9}$$

De (2.1), (3.4), (3.5), (3.8), (3.9), on tire que

$$\chi(X) = \int_{LX} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{x}|^2 \, ds - \frac{T^2}{2}\int_0^1 |\nabla f(x_s)|^2 \, ds + \dots\right). \tag{3.10}$$

La formule (3.10) est à la fois banale et surprenante. Elle est banale, car si on omet la partie forme (c'est la partie fermionique pour les physiciens), elle ne fait que refléter la formule (1.13) par l'intermédiaire d'une formule de Feynman-Kac. Rappelons en effet qu'on utilise souvent la formule suivante pour la mesure Brownienne sur LX,

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{x}|^2 \, ds\right) d\mathcal{D}(x).$$

La formule (3.10) est surprenante, car le fait que son membre de droite ne dépende pas des données métriques est expliqué par la structure même de (3.10), qui est l'intégrale sur LX d'une forme différentielle $d + i_K$ fermée.

De (3.10), on tire au moins formellement que quand $T \to +\infty$, l'intégrale se localise sur les zéros de ∇F, c'est à dire sur les zéros de ∇f, qui sont les points critiques de f. La formule (3.10) montre également le fait que pour $T = 0$, on obtient la théorie de Hodge habituelle, qui est elle-même associée au mouvement Brownien sur X.

4. A la recherche du Lagrangien perdu

Soit $V : X \to \mathbf{R}$ une fonction C^{∞}. Pour $a \in \mathbf{R}$, on pose

$$L_a(x, \dot{x}) = \frac{a}{2}|\dot{x}|^2 - V(x). \tag{4.1}$$

Pour $a = 1$, on écrira $L(x, \dot{x})$ au lieu de $L_a(x, \dot{x})$. L'expression $L(x, \dot{x})$ est alors un Lagrangien classique. On pose

$$I_a(x_\cdot) = \int_0^1 L_a(x, \dot{x}) \, ds. \tag{4.2}$$

Notons que pour $a = 0, V = -f$, alors

$$I_a(x.) = F(x.). \tag{4.3}$$

L'idée va être maintenant de considérer F comme un Lagrangien tronqué. Bien que la discussion qui suive s'applique à n'importe quel Lagrangien, on prendra dans la suite $a = 1, V = 0$, de telle sorte que

$$I_1 = E. \tag{4.4}$$

Notons que

$$\nabla E = -\ddot{x}. \tag{4.5}$$

Remplaçons formellement dans la formule (3.4) ∇F par ∇E. On obtient alors,

$$\chi(X) = \int_{LX} \alpha \wedge (T\nabla E)^* \, \Phi^{TLX}. \tag{4.6}$$

De (2.1), (3.5), (3.8), (4.5), (4.6), on tire,

$$\chi(X) = \int_{LX} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{x}|^2 \, ds - \frac{T^2}{2}\int_0^1 |\ddot{x}|^2 \, ds + \dots\right). \tag{4.7}$$

De nouveau, ... cache la partie fermionique de l'intégrale fonctionnelle.

Nous allons maintenant interpréter l'équation (4.7), et pour finir lui associer un Laplacien correspondant. Notons que pour $T = 0$, on retrouve l'intégrale Brownienne habituelle, et observons que quand $T \to +\infty$, l'intégrale devrait se localiser sur les points critiques de E, qui sont les géodésiques fermées de X.

A ce stade, le lecteur peut légitimement se demander de quoi l'on parle, puisque l'intégrale fonctionnelle (4.7) n'a pour l'instant d'existence que virtuelle. Nous allons donc la forcer à révéler son contenu.

Tout d'abord, le lecteur probabiliste sait que les mesures sur les espaces de dimension infinie sont facilement mutuellement singulières. Sans s'attarder sur les termes ..., ce lecteur sait aussi que sous la mesure apparaissant dans le membre de droite de (4.7), la particule $x.$ a une dynamique qui peut être facilement décrite à l'aide de l'équation différentielle stochastique,

$$\dot{x} = p, \qquad \dot{p} = \frac{1}{T}(-p + \dot{w}). \tag{4.8}$$

Dans (4.8), w représente un mouvement Brownien à valeurs dans TX. Nous sommes délibérément imprécis sur l'interprétation de (4.8). Disons seulement que le calcul différentiel stochastique permet de donner un sens exact à cette équation. Notons également que (4.8) est équivalente à

$$\ddot{x} = \frac{1}{T}(-\dot{x} + \dot{w}). \tag{4.9}$$

La justification formelle de (4.9) est la suivante. Si $x \in LX$, alors

$$\int_0^1 \left(|\dot{x}|^2 + T^2 |\ddot{x}|^2\right) ds = \int_0^1 |\dot{x} + T\ddot{x}|^2 \, ds. \tag{4.10}$$

De (4.7), (4.10), on tire formellement que $\dot{x}+T\ddot{x}$ doit être la dérivée d'un mouvement Brownien, ce qui est le contenu de (4.9).

De (4.8), on tire que le processus (x_s, p_s) est un processus de Markov conditionnel à valeurs dans T^*X (le terme 'conditionnel' vient du fait qu'on conditionne (x_1, p_1)

à être égal à (x_0, p_0)). Plus précisément, le calcul stochastique révèle que si $-L_T$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe qui lui est associé, alors

$$L_T = -\frac{\Delta^V}{2T^2} + \frac{\nabla_{\widehat{p}}}{T} - \nabla_p. \tag{4.11}$$

Précisons les notations dans (4.11). La métrique g^{TX} nous permet d'identifier TX et T^*X. Ainsi l'espace total de TX peut être considéré comme une variété symplectique. Dans (4.11), Δ^V est le Laplacien le long des fibres de T^*X, $\nabla_{\widehat{p}}$ est le champ de vecteurs radial le long des fibres de T^*X, et ∇_p est le champ de vecteurs Hamiltonien sur T^*X de Hamiltonien $|p|^2/2$. Une dilatation sur la variable p montre que quitte à ne pas changer les notations,

$$L_T = \frac{1}{T}\left(-\frac{\Delta^V}{2} + \nabla_{\widehat{p}}\right) - \frac{\nabla_p}{\sqrt{T}}. \tag{4.12}$$

Une conjugaison par $e^{-|p|^2/2}$ permet de réécrire L_T sous la forme

$$L_T = \frac{1}{2T}\left(-\Delta^V + |p|^2 - n\right) - \frac{\nabla_p}{\sqrt{T}}. \tag{4.13}$$

Une dernière conjugaison permet d'écrire L_T sous la forme,

$$L_T = \frac{1}{2}\left(-\Delta^V + \frac{|p|^2}{T^2} - \frac{n}{T}\right) - \frac{\nabla_p}{T}. \tag{4.14}$$

Nous allons maintenant reformuler la question initiale de la manière suivante :

(1) Existe-t-il une théorie de Hodge sur T^*X, dépendant du paramètre $T > 0$, dont le Laplacien correspondant ait l'allure de L_T ?

(2) Si une telle théorie existe, en quel sens est-elle une déformation de la théorie de Hodge usuelle sur X pour $T \to 0$?

(3) En quel sens cette théorie est-elle liée au flot géodésique pour $T \to +\infty$?

(4) Bien que son apparence indique le contraire, le Laplacien L_T garde-t-il des traces d'autoadjonction ?

(5) Le théorème de Hodge (à savoir l'identification du noyau du Laplacien à la cohomologie) reste-t-il vrai pour cette nouvelle théorie de Hodge ?

C'est à ces cinq questions que nous allons chercher à répondre dans la suite de l'exposé.

5. Une construction directe du Laplacien hypoelliptique

Notons d'abord que l'opérateur L_T n'est ni elliptique, ni autoadjoint. La théorie de Hodge qui lui correspond doit donc être essentiellement exotique. Par ailleurs le champ de vecteurs Hamiltonien ∇_p apparaît dans L_T. On peut donc penser que la structure symplectique sur T^*X joue un rôle essentiel dans la construction cherchée.

Soit M une variété, soit η une forme bilinéaire sur TM. Soit $\phi : TM \to T^*M$ le morphisme tel que si $U, V \in TM$,

$$\eta(U, V) = \langle U, \phi V\rangle . \tag{5.1}$$

Soit η^* la forme bilinéaire sur T^*M correspondant à η par ϕ. Alors η^* induit une forme bilinéaire correspondante sur $\Lambda^{\cdot}(T^*M)$. Soit dv_M une forme volume sur M.

Soit $\left(\Omega^{\cdot}(M), d^M\right)$ le complexe de de Rham des formes C^∞ à support compact sur M. On munit $\Omega^{\cdot}(M)$ de la forme bilinéaire

$$\langle s, s' \rangle = \int_M \eta^*(s, s')\, dv_M. \tag{5.2}$$

Soit $\theta = \langle p, dx \rangle$ la 1-forme canonique sur T^*X, soit $\omega = d^{T^*X}\theta$ la forme symplectique canonique sur T^*X. Soit $\overline{d}^{T^*X}$ l'adjoint formel de d^{T^*X} relativement à la forme bilinéaire $\langle\,\rangle$ associée à ω sur TT^*X et à la forme volume symplectique dv_{T^*X}, de telle sorte que si $s, s' \in \Omega^{\cdot}(T^*X)$,

$$\left\langle s, d^{T^*X}s' \right\rangle = \left\langle \overline{d}^{T^*X}s, s' \right\rangle. \tag{5.3}$$

On vérifie très simplement que

$$\left[d^{T^*X}, \overline{d}^{T^*X}\right] = 0. \tag{5.4}$$

Le 'Laplacien' ainsi construit est donc nul. Rappelons toutefois que nous souhaitons obtenir un Laplacien du type (4.11), qui est non elliptique. En obtenant un Laplacien nul, nous avons été trop loin dans la direction de la non ellipticité !

La construction qui suit est en quelque sorte forcée par notre souhait d'obtenir un Laplacien du type (4.11). On identifie les fibres de TX et T^*X par g^{TX}. Soit ∇^{TX} la connexion de Levi-Civita sur TX. La connexion ∇^{TX} induit les scindages,

$$TT^*X = \pi^*(TX \oplus T^*X), \qquad T^*T^*X = \pi^*(T^*X \oplus TX). \tag{5.5}$$

On en déduit l'identification,

$$\Lambda^{\cdot}(T^*T^*X) = \pi^*\left(\Lambda^{\cdot}(T^*X)\widehat{\otimes}\Lambda^{\cdot}(TX)\right). \tag{5.6}$$

On notera avec un $\widehat{}$ les objets se rapportant au deuxième facteur à droite de (5.6). Soit $\nabla^{\Lambda^{\cdot}(T^*T^*X)}$ la connexion induite par ∇^{TX} sur $\Lambda^{\cdot}(T^*T^*X)$.

On pose

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

On identifie ϕ à un automorphisme de $TT^*X = TX \oplus T^*X$. La forme bilinéaire η associée sur TT^*X est donnée par

$$U, V \to \eta(U, V) = \langle \pi_*U, \pi_*V \rangle_{g^{TX}} + \omega(U, V). \tag{5.8}$$

Soit $\langle\,\rangle_\phi$ la forme bilinéaire correspondante sur $\Omega^{\cdot}(T^*X)$. Soit $\overline{d}_\phi^{T^*X}$ l'adjoint formel de d^{T^*X} relativement à η et à la forme volume symplectique dv_{T^*X}. Soit $\mathcal{H} : T^*X \to \mathbf{R}$ une fonction C^∞. Soit $Y^{\mathcal{H}}$ le champ de vecteurs hamiltonien associé, de telle sorte que

$$d^{T^*X}\mathcal{H} + i_{Y^{\mathcal{H}}}\omega = 0. \tag{5.9}$$

On pose

$$\langle s, s' \rangle_{\phi,\mathcal{H}} = \int_{T^*X} \eta^*(s, s')_{g^F}\, e^{-2\mathcal{H}} dv_{T^*X}. \tag{5.10}$$

On définit les opérateurs,

$$d_{\mathcal{H}}^{T^*X} = e^{-\mathcal{H}}d^{T^*X}e^{\mathcal{H}}, \qquad \overline{d}_{\phi,\mathcal{H}}^{T^*X} = e^{\mathcal{H}}\overline{d}_\phi^{T^*X}e^{-\mathcal{H}}. \tag{5.11}$$

Alors $\overline{d}_{\phi,2\mathcal{H}}^{T^*X}$ est l'adjoint formel de d^{T^*X} relativement à $\langle\,\rangle_{\phi,\mathcal{H}}$, et $\overline{d}_{\phi,\mathcal{H}}^{T^*X}$ est l'adjoint formel de $d_{\mathcal{H}}^{T^*X}$ relativement à $\langle\,\rangle_{\phi}$.

On pose

$$A_{\phi,\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\left(\overline{d}_{\phi,2\mathcal{H}}^{T^*X} + d^{T^*X}\right), \qquad \mathfrak{A}_{\phi,\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\left(\overline{d}_{\phi,\mathcal{H}}^{T^*X} + d_{\mathcal{H}}^{T^*X}\right). \tag{5.12}$$

On a évidemment,

$$\mathfrak{A}_{\phi,\mathcal{H}} = e^{-\mathcal{H}} A_{\phi,\mathcal{H}} e^{\mathcal{H}}. \tag{5.13}$$

Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormale de TX, et soit $e^1, \ldots, e^n$ la base duale correspondante de T^*X. On désigne par $\widehat{e}_1, \ldots, \widehat{e}_n$ et $\widehat{e}^1, \ldots, \widehat{e}^n$ d'autres copies de ces bases. Alors $e_1, \ldots, e_n, \widehat{e}^1, \ldots, \widehat{e}^n$ est une base de TT^*X, et $e^1, \ldots, e^n, \widehat{e}_1, \ldots, \widehat{e}_n$ est la base duale de T^*T^*X. On pose

$$\widehat{\nabla^V \mathcal{H}} = \nabla_{\widehat{e}^i} \mathcal{H} \widehat{e}^i. \tag{5.14}$$

Si Z est un champ de vecteurs sur T^*X, L_Z désigne l'opérateur de dérivée de Lie correspondant agissant sur $\Omega^{\cdot}(T^*X)$.

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que la cas où $F = \mathbf{R}$. Dans le cas général, $\Omega^{\cdot}(T^*X)$ doit être remplacé par $\Omega^{\cdot}(T^*X, \pi^*F)$. La forme Hermitienne sur $\Omega^{\cdot}(T^*X, \pi^*F)$ incorpore maintenant la métrique Hermitienne g^F. On pose

$$\omega\left(\nabla^F, g^F\right) = \left(g^F\right)^{-1} \nabla^F g^F. \tag{5.15}$$

On donne maintenant la formule de Weitzenböck de [B04a, Théorème 3.3].

Theorem 5.1.

$$\begin{aligned}
A_{\phi,\mathcal{H}}^2 &= \frac{1}{4}\left(-\Delta^V - \frac{1}{2}\left\langle R^{TX}(e_i, e_j) e_k, e_l\right\rangle e^i e^j i_{\widehat{e}^k} i_{\widehat{e}^l} + 2L_{\widehat{\nabla^V \mathcal{H}}}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(L_{Y^{\mathcal{H}}} + \frac{1}{2} e^i i_{\widehat{e}^j} \nabla_{e_i}^F \omega\left(\nabla^F, g^F\right)(e_j) + \frac{1}{2}\omega\left(\nabla^F, g^F\right)(e_i) \nabla_{\widehat{e}^i}\right), \\
\mathfrak{A}_{\phi,\mathcal{H}}^2 &= \frac{1}{4}\Bigg(-\Delta^V - \frac{1}{2}\left\langle R^{TX}(e_i, e_j) e_k, e_l\right\rangle e^i e^j i_{\widehat{e}^k} i_{\widehat{e}^l} + \left|\nabla^V \mathcal{H}\right|^2 \\
&\qquad - \Delta^V \mathcal{H} + 2\nabla_{\widehat{e}^i} \nabla_{\widehat{e}^j} \mathcal{H} \widehat{e}_i i_{\widehat{e}^j} + 2\nabla_{\widehat{e}^i} \nabla_{e_j} \mathcal{H} e^j i_{\widehat{e}^i}\Bigg) \\
&\quad - \frac{1}{2}\Bigg(L_{Y^{\mathcal{H}}} + \frac{1}{2}\omega\left(\nabla^F, g^F\right)\left(Y^{\mathcal{H}}\right) + \frac{1}{2} e^i i_{\widehat{e}^j} \nabla_{e_i}^F \omega\left(\nabla^F, g^F\right)(e_j) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\omega\left(\nabla^F, g^F\right)(e_i) \nabla_{\widehat{e}^i}\Bigg).
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Pour $c \in \mathbf{R}$, on pose

$$\mathcal{H} = \frac{|p|^2}{2}, \qquad \mathcal{H}^c = c\frac{|p|^2}{2}. \tag{5.17}$$

Quand $c \neq 0$, on pourra poser $c = 1/T$. On a le résultat de [B04a, Theorem 3.4].

Theorem 5.2. *On a,*

$$L_{Y^{\mathcal{H}^c}} = \nabla_{Y^{\mathcal{H}^c}}^{\Lambda^{\cdot}(T^*T^*X)\otimes F} + c\widehat{e}_i i_{e_i} + c\left\langle R^{TX}(p, e_i) p, e_j\right\rangle e^i i_{\widehat{e}^j}. \tag{5.18}$$

De plus,

$$
\begin{aligned}
A^2_{\phi,\mathcal{H}^c} &= \frac{1}{4}\left(-\Delta^V + 2cL_{\widehat{p}} - \frac{1}{2}\left\langle R^{TX}\left(e_i,e_j\right)e_k,e_l\right\rangle e^i e^j i_{\widehat{e}^k} i_{\widehat{e}^l}\right)\\
&\quad - \frac{1}{2}\left(L_{Y^{\mathcal{H}^c}} + \frac{1}{2}e^i i_{\widehat{e}^j}\nabla^F_{e_i}\omega\left(\nabla^F,g^F\right)\left(e_j\right) + \frac{1}{2}\omega\left(\nabla^F,g^F\right)\left(e_i\right)\nabla_{\widehat{e}^i}\right),
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}^c} &= \frac{1}{4}\left(-\Delta^V + c^2\left|p\right|^2 + c\left(2\widehat{e}_i i_{\widehat{e}^i} - n\right) - \frac{1}{2}\left\langle R^{TX}\left(e_i,e_j\right)e_k,e_l\right\rangle e^i e^j i_{\widehat{e}^k} i_{\widehat{e}^l}\right)\\
&\quad - \frac{1}{2}\Bigg(L_{Y^{\mathcal{H}^c}} + \frac{1}{2}\omega\left(\nabla^F,g^F\right)\left(Y^{\mathcal{H}^c}\right) + \frac{1}{2}e^i i_{\widehat{e}^j}\nabla^F_{e_i}\omega\left(\nabla^F,g^F\right)\left(e_j\right)\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\omega\left(\nabla^F,g^F\right)\left(e_i\right)\nabla_{\widehat{e}^i}\Bigg).
\end{aligned}
$$

Pour $c \neq 0$, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial u} - A^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$, $\frac{\partial}{\partial u} - \mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$ sont hypoelliptiques.

Démonstration. Remarquons ici simplement que l'hypoellipticité des opérateurs considérés plus haut résulte du théorème de Hörmander [Hö67]. □

On vérifie alors que quand $F = \mathbf{R}, c = 1/T$, la restriction de l'opérateur $2\mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$ aux fonctions C^∞ sur T^*X coïncide exactement avec l'opérateur L_T dans (4.14). Nous avons donc répondu positivement à la première question de la section 4.

Nous allons maintenant répondre à la deuxième question. Pour $a \in \mathbf{R}$, soit $r_a : T^*X \to T^*X$ la dilatation $(x,p) \to (x,ap)$. On utilise la notation $r = r_{-1}$. On pose

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{a}_\pm &= \frac{1}{2}\left(-\Delta^V \pm 2L_{\widehat{p}} - \frac{1}{2}\left\langle R^{TX}\left(e_i,e_j\right)e_k,e_l\right\rangle e^i e^j i_{\widehat{e}^k} i_{\widehat{e}^l}\right),\\
\mathfrak{b}_\pm &= -\left(\pm L_{Y^{\mathcal{H}}} + \frac{1}{2}e^i i_{\widehat{e}^j}\nabla^F_{e_i}\omega\left(\nabla^F,g^F\right)\left(e_j\right) + \frac{1}{2}\omega\left(\nabla^F,g^F\right)\left(e_i\right)\nabla_{\widehat{e}^i}\right).
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

Notons que $\mathfrak{a}_\pm$ commute avec r^*, et que $\mathfrak{b}_\pm$ anticommute avec r^*.

De (5.19), on tire que pour $c > 0$,

$$
r^*_{1/\sqrt{c}} 2A^2_{\phi,\mathcal{H}^c} r^*_{\sqrt{c}} = c\mathfrak{a}_+ + \sqrt{c}\mathfrak{b}_+. \tag{5.21}
$$

Pour $c < 0$, on a une identité évidente du même type, où les indices $+$ sont remplacés par $-$.

Soit Φ^{T^*X} la forme de Thom de Mathai-Quillen [MQ86] associée à la métrique g^{TX} et à la connexion ∇^{TX}. Le forme Φ^{T^*X} est maintenant normalisée de telle manière que

$$
\Phi^{T^*X} = \exp\left(-\left|p\right|^2 + \dots\right). \tag{5.22}
$$

On vérifie que les opérateurs $\mathfrak{a}_\pm$ sont semi-simples. Le noyau de $\mathfrak{a}_+$ est engendrée par la fonction 1, et le projecteur $Q^{T^*X}_+$ sur le noyau est donné par $\alpha \to \pi_*\left(\alpha\Phi^{T^*X}\right)$. Le noyau de $\mathfrak{a}_-$ est engendré par Φ^{T^*X}, et le projecteur correspondant $Q^{T^*X}_-$ est donné par $\alpha \to (\pi_*\alpha) \wedge \Phi^{T^*X}$.

Soit $o(TX)$ le fibré d'orientation de TX. Soit d^X l'opérateur de de Rham agissant sur $\Omega^\cdot(X,F)$ ou sur $\Omega^\cdot(X, F\otimes o(TX))$, et soit d^{X*} son adjoint formel pour le produit Hermitien considéré en (1.1). On note $\square^X_\pm$ les Laplaciens correspondants.

Provisoirement, on n'impose plus de conditions de support sur $\Omega^{\cdot}(T^*X, \pi^*F)$. Alors les éléments de $\Omega^{\cdot}(X, F)$ se relèvent en éléments de $\Omega^{\cdot}(T^*X, \pi^*F)$, et Q_+ est un projecteur sur $\Omega^{\cdot}(X, F)$. On a aussi l'injection $\alpha \in \Omega^{\cdot}(X, F \otimes o(TX)) \to \pi^*\alpha \wedge \Phi^{T^*X} \in \Omega^{\cdot}(T^*X, \pi^*F)$, et $Q_-^{T^*X}$ est un projecteur sur l'image de cette injection.

Le résultat suivant est démontré dans démontré dans [B04a, Theorem 3.13]

Theorem 5.3. *On a l'identité,*

$$-Q_\pm^{T^*X} \mathfrak{b}_\pm \mathfrak{a}_\pm^{-1} \mathfrak{b}_\pm Q_\pm^{T^*X} = \frac{1}{2} \square_\pm^X. \tag{5.23}$$

Notons qu'une formule comparable à (5.23) joue un rôle clé dans l'article de Bismut et Lebeau [BL91], où on déforme la théorie de Hodge d'une variété compacte complexe X en la théorie de Hodge d'une sous-variété complexe Y. Les identités (5.21) et (5.23) suggèrent que la structure matricielle de notre opérateur est essentiellement la même que dans [BL91]. Remarquons qu'en degré 0, la formule (5.23) est équivalente à la formule

$$\int_{T^*X} \nabla_p \nabla_p e^{-|p|^2} \frac{dp}{\pi^{n/2}} = \frac{1}{2} \Delta^X, \tag{5.24}$$

qui, elle-même, est équivalente à l'identité

$$\sum_1^n \nabla_{e_i}^2 = \Delta^X. \tag{5.25}$$

La contribution de $\mathfrak{a}_\pm^{-1}$ à la formule (5.24) est en fait égale à 1.

Dans [BL04], l'identité (5.23) est l'identité algébrique clé qui permet de montrer qu'en un sens adéquat, quand $c \to \pm\infty$, $2A^2_{\phi,\mathcal{H}^c} \to \frac{1}{2}\square_\pm^X$. Indiquons ici comment cette identité doit être interprétée. Pour $t > 0$, l'opérateur $Q_\pm \exp\left(-t\square_\pm^X/2\right) Q_\pm$ est un opérateur agissant sur $\Omega^{\cdot}(T^*X, \pi^*F)$. On montre alors dans [BL04] que pour $t > 0$, quand $c \to \pm\infty$,

$$\exp\left(-2tA^2_{\phi,\mathcal{H}^c}\right) \to Q_\pm \exp\left(-t\square_\pm^X/2\right) Q_\pm, \tag{5.26}$$

par exemple dans l'espace des opérateurs à trace. Nous avons ainsi répondu positivement à la deuxième question de la section 4.

Supposons encore que $F = \mathbf{R}$. Soit $N^V = \sum_1^n \widehat{e}_i i_{\widehat{e}^i}$ l'opérateur de nombre vertical. Pour $c \in \mathbf{R}^*$, on a l'identité établie dans [B04a, eq. (3.79)],

$$\begin{aligned} r^*_{1/c} 2\mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}^c} r^*_c = \frac{1}{2}\left(-c^2\Delta^V + |p|^2 - cn\right) + cN^V \\ - \frac{c^2}{4}\left\langle R^{TX}(e_i, e_j) e_k, e_l\right\rangle e^i e^j i_{\widehat{e}^k} i_{\widehat{e}^l} - L_{Y^{\mathcal{H}}}, \end{aligned} \tag{5.27}$$

de telle sorte que quand $c \to 0$,

$$r^*_{1/c} \mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}^c} r^*_c \simeq \frac{1}{2}|p|^2 - L_{Y^{\mathcal{H}}}. \tag{5.28}$$

A droite de (5.28), on trouve essentiellement l'opérateur de dérivée de Lie associé au générateur du flot géodésique sur T^*X.

Un instant de réflexion devrait suffire à convaincre le lecteur que quand $c \to 0$, la trace du noyau de la chaleur $\exp\left(-tA^2_{\phi,\mathcal{H}^c}\right)$ devrait se localiser au voisinage des géodésiques fermées de X.

Considérons maintenant la quatrième question posée à la section 4. Comme nous l'avons indiqué au début de la section 4, l'opérateur $A^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$ n'est pas autoadjoint au sens classique. La forme bilinéaire qui a permis de construire $\overline{d}^{T^*X}_{\phi,2\mathcal{H}}$ n'étant pas Hermitienne, l'opérateur $A^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$ n'est même pas 'autoadjoint' relativement à cette forme. Notons toutefois que quand cet opérateur agit sur les formes de degré 0, il résulte du Théorème 5.2 que l'opérateur $\mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$ est autoadjoint relativement à la forme Hermitienne,

$$\langle s, s' \rangle' = \int_{T^*X} \langle r^* s, s' \rangle_{g^F} \, dv_{T^*X}. \tag{5.29}$$

Observons tout de suite que la forme Hermitienne (5.29) est de signature (∞, ∞). La forme même de (5.29) n'est que le reflet du fait expérimental bien connu qu'en inversant le sens de parcours d'une trajectoire, sa vitesse p est changée en $-p$. Incidemment, on peut se demander comment le Laplacien Δ^X est autoadjoint, alors même qu'il est 'limite' de nos opérateurs. Mais le mouvement Brownien a une vitesse infinie, dont le changement de signe n'est plus observable par retournement du temps. En réalité, l'interpolation entre $T = 0$ et $T = +\infty$ reflète le passage d'une dynamique la plus désordonnée possible–celle du mouvement Brownien–, à la dynamique 'stable' du flot géodésique. Naturellement, en courbure négative, le flot géodésique a en temps long un comportement ergodique, mais ceci est une autre histoire...

Il est montré dans [B04a] qu'on peut prolonger la forme Hermitienne (5.29) aux formes de degré arbitraire, de telle sorte que la propriété d'autoadjonction précédente s'étend en tout degré.

Il nous reste à évoquer le cas $X = S^1$, ou plus généralement le case où X est un tore plat. Dans le cas $X = S_1$, on montre que pour $c = 1/T$, $2A^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$ est isospectral à l'opérateur

$$\frac{1}{2T}\left(-\Delta^V + |p|^2 - 1\right) - \frac{\Delta^{S_1}}{2}, \tag{5.30}$$

qui est autoadjoint. La conjugaison permettant de passer de l'opérateur $2\mathfrak{A}^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$ écrit après changement d'échelle sous la forme (4.13) à l'opérateur (5.30) est obtenue à partir de l'opérateur $\exp\left(\frac{\partial^2}{\partial p \partial x}/\sqrt{T}\right)$. Cet opérateur est particulièrement désagréable. Il réalise dans l'espace des phases la translation $p \to p + \sqrt{T}\frac{\partial}{\partial x}$. Du point de vue microlocal, on a effectué la translation complexe $p \to p + \sqrt{-T}\xi$.

L'équation (5.30) permet de démontrer la formule de Poisson par un argument d'interpolation [B04a].

6. Des résultats d'analyse sur le Laplacien hypoelliptique

Nous allons maintenant décrire rapidement quelques résultats d'analyse obtenus avec Lebeau [BL04] sur le Laplacien hypoelliptique. Les arguments que l'on a exposés précédemment étaient essentiellement de nature algébrique. Dans [BL04], on donne les arguments d'analyse qui permettent de décrire de manière précise la théorie spectrale de l'opérateur $A^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$, et en particulier de donner une description uniforme du comportement du noyau de la chaleur associé aussi bien en temps grand qu'en temps petit quand $c \to \pm\infty$. L'une des motivations de [BL04] est en effet de calculer le comportement de la torsion analytique sous cette déformation.

Quand il agit sur un espace de Hilbert convenable, pour $c \neq 0$, l'opérateur $A^2_{\phi,\mathcal{H}^c}$ est à résolvante compacte, et donc à spectre discret. Par ailleurs le spectre est symétrique par rapport à l'axe réel. Par application du théorème de Hörmander [Hö67], on sait que pour $t > 0$, l'opérateur $\exp\left(-tA^2_{\phi,\mathcal{H}^c}\right)$ a un noyau C^∞. Le fait que l'espace T^*X soit non compact exige de contrôler convenablement les estimations d'hypoellipticité à l'infini.

Les résultats de [BL04] permettent de répondre à la cinquième question de la section 4. En effet les espaces caractéristiques relativement à une valeur propre λ sont de dimension finie. Pour $c > 0$, on désigne par $\mathfrak{H}^{\cdot}(X,F)$ la cohomologie absolue de T^*X à coefficients dans π^*F, et pour $c < 0$, on utilise la même notation pour la cohomologie à support de T^*X. De manière équivalente, $\mathfrak{H}^{\cdot}(X,F)$ est égal à $H^{\cdot}(X,F)$ pour $c > 0$, et à $H^{\cdot - n}(X, F \otimes o(TX))$ pour $c < 0$.

On montre dans [BL04] que le sous-complexe associé à la valeur caractéristique 0 calcule $\mathfrak{H}^{\cdot}(X,F)$. Ce complexe peut contenir strictement $\mathfrak{H}^{\cdot}(X,F)$. Le Théorème de Hodge n'est donc en principe pas vrai pour la théorie déformée. Ce type de situation ne se produit que pour une famille discrète de valeurs de $c = 1/T$. En particulier, pour $|c|$ assez grand, les résultats de la théorie de Hodge classique rappelés à la section 1 restent vrais pour la théorie déformée.

Références

[A85] M. F. Atiyah. Circular symmetry and stationary-phase approximation. *Astérisque*, (131) :43–59, 1985. Colloquium in honor of Laurent Schwartz, Vol. 1 (Palaiseau, 1983).

[BeGV92] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne. *Heat kernels and Dirac operators.* Grundl. Math. Wiss. Band 298. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[B04a] J.-M. Bismut. The hypoelliptic Laplacian on the cotangent bundle. *À paraître*, 2004.

[B04b] J.-M. Bismut. Une déformation de la théorie de Hodge sur le fibré cotangent. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I*, 338 :471–476, 2004.

[B04c] J.-M. Bismut. Le Laplacien hypoelliptique sur le fibré cotangent. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris Sér. I*, 338 :555–559, 2004.

[B04d] J.-M. Bismut. Une déformation en famille du complexe de de Rham-Hodge. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris Sér. I*, 338 :623–627, 2004.

[BL91] J.-M. Bismut, G. Lebeau. Complex immersions and Quillen metrics. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (74) :ii+298 pp. (1992), 1991.

[BL04] J.-M. Bismut, G. Lebeau. The hypoelliptic Laplacian and Ray-Singer metrics. *À paraître*, 2004.

[BZ92] J.-M. Bismut, W. Zhang. An extension of a theorem by Cheeger and Müller. *Astérisque*, (205) :235, 1992. With an appendix by François Laudenbach.

[BZ94] J.-M. Bismut, W. Zhang. Milnor and Ray-Singer metrics on the equivariant determinant of a flat vector bundle. *Geom. Funct. Anal.*, 4(2) :136–212, 1994.

[Bo59] R. Bott. The stable homotopy of the classical groups. *Ann. of Math. (2)*, 70 :313–337, 1959.

[C79] J. Cheeger. Analytic torsion and the heat equation. *Ann. of Math. (2)*, 109(2) :259–322, 1979.

[Ch44] S.S. Chern. A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 45 :747–752, 1944.

[HS85] B. Helffer, J. Sjöstrand. Puits multiples en mécanique semi-classique. IV. Étude du complexe de Witten. *Comm. Partial Differential Equations*, 10(3) :245–340, 1985.

[Hö67] L. Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.*, 119 :147–171, 1967.

[MQ86] V. Mathai, D. Quillen. Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms. *Topology*, 25(1) :85–110, 1986.

[McS67] H. P. McKean, Jr., I. M. Singer. Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. *J. Differential Geometry*, 1(1) :43–69, 1967.

[Mi65] J. Milnor. *Lectures on the h-cobordism theorem.* Notes by L. Siebenmann and J. Sondow. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1965.

[Mü78] W. Müller. Analytic torsion and R-torsion of Riemannian manifolds. *Adv. in Math.*, 28(3) :233–305, 1978.

[RS71] D. B. Ray, I. M. Singer. R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds. *Advances in Math.*, 7 :145–210, 1971.

[Rei35] K. Reidemeister. Homotopieringe und Linsenraüm. *Hamburger Abhandl.*, pages 102–109, 1935.

[Sm61] S. Smale. On gradient dynamical systems. *Ann. of Math. (2)*, 74 :199–206, 1961.

[Sm67] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 :747–817, 1967.

[T49] R. Thom. Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 228 :973–975, 1949.

[W82] E. Witten. Supersymmetry and Morse theory. *J. Differential Geom.*, 17(4) :661–692 (1983), 1982.

Département de Mathématique, Université Paris-Sud, Bâtiment 425, 91405 Orsay, France

E-mail address: Jean-Michel.Bismut@math.u-psud.fr