Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2003-2004

Jérémie Szeftel

Réflexion des singularités pour l'équation de Schrödinger

Séminaire É. D. P. (2003-2004), Exposé n° XX, 11 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2003-2004____A20_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Réflexion des singularités pour l'équation de Schrödinger

Jérémie Szeftel

LAGA UMR 7539, Institut Galilée,
Université Paris 13,
99, avenue J.B.Clément 93430 Villetaneuse.
szeftel@math.univ-paris.13.fr

Résumé. Nous établissons un lien entre la solution de l'équation de Schrödinger avec conditions de Dirichlet et une équation hyperbolique pour laquelle on peut appliquer les résultats classiques de réflexion des singularités, ce qui nous permet de prouver des résultats de réflexion des singularités pour l'équation de Schrödinger.

1 Le résultat de réflexion des singularités

Dans tout ce qui suit, Ω est soit un ouvert borné régulier, soit un ouvert extérieur régulier. Nous prouvons un théorème de réflexion des singularités pour u solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + i\Delta u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \Omega, \\ u|_{\mathbb{R}_t \times \partial\Omega} = 0, \\ u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_t \times \Omega). \end{cases} \tag{1}$$

Pour cela, nous nous ramenons à l'équation $(\partial_s \partial_t - \Delta)v = 0$ grâce à une transformation introduite par G. Lebeau pour le contrôle de l'équation de Schrödinger [4]. Nous pouvons alors utiliser le théorème classique de réflexion des singularités dû à R. B. Melrose et J. Sjöstrand [5].

Remarque. Pour la simplicité de l'exposé, nous prenons le Laplacien plat. Notre théorème est valable pour un Laplacien à coefficients variables C^∞. De plus, nous nous contentons d'esquisser les preuves. Pour des preuves détaillées dans un cadre plus général, nous renvoyons le lecteur à [10].

Pour énoncer notre théorème, nous devons définir un front d'onde au bord pour u solution de (1), et les bicaractéristiques brisées de l'opérateur de Schrödinger selon lesquelles se propage ce front d'onde au bord. Nous commençons par rappeler la définition de l'algèbre pseudodifférentielle inhomogène S^m_{Sch} introduite par R. Lascar et adaptée à l'équation de Schrödinger.

Définition 1. *$p(t,x,\tau,\xi)$ appartient à $S^m_{Sch}(\mathbb{R}_t \times \Omega)$ si p est dans $C^\infty(\mathbb{R}_t \times \Omega \times \mathbb{R}^{d+1})$ et pour tout compact $K \subset\subset \Omega$ et tout (k,α,l,β) dans $\mathbb{N}^{2d+2}$:*

$$|\partial_t^k \partial_x^\alpha \partial_\tau^l \partial_\xi^\beta p(t,x,\tau,\xi)| \leq C_{Kk\alpha l\beta}(1 + \tau^2 + |\xi|^4)^{\frac{m-|\beta|-2l}{4}}, (t,x,\tau,\xi) \in \mathbb{R}_t \times K \times \mathbb{R}^{d+1}.$$

Un ensemble V de $T^*(\mathbb{R}_t \times \Omega) \setminus \{0\}$ est dit S-conique si $(t,x,\tau,\xi) \in V$ implique $(t,x,\lambda^2\tau,\lambda\xi) \in V$ pour tout $\lambda > 0$.

Soit A un opérateur de symbole $a \in S^m_{Sch}(\mathbb{R}_t \times \Omega)$, l'ensemble caractéristique de A est le fermé S-conique défini par:

$$\mathrm{car}_{Sch} A = \left\{ (t,x,\tau,\xi) \in T^*(\mathbb{R}_t \times \Omega) \setminus \{0\} \,/\, \liminf_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-m} |a(t,x,\lambda^2\tau,\lambda\xi)| = 0 \right\}.$$

Pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \Omega)$, le S-front d'onde $WF^{Sch}(u)$ est alors défini par:

$$WF^{Sch}(u) = \bigcap_{Au \in C^\infty} \mathrm{car}_{Sch}(A), A \in OpS^0_{Sch}(\mathbb{R}_t \times \Omega).$$

Remarque. $WF^{Sch}(u)$ est un fermé S-conique. C'est l'équivalent dans le cadre de l'équation de Schrödinger du front d'onde usuel.

Nous pouvons maintenant définir un S-front d'onde au bord pour u:

Définition 2. *Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \overline{\Omega})$, et m_0 appartenant à l'ensemble $T^*(\mathbb{R}_t \times \Omega) \cup T^*(\mathbb{R}_t \times \partial\Omega) \setminus \{0\}$.*

Si $m_0 \in T^*(\mathbb{R}_t \times \Omega) \setminus \{0\}$, nous disons que $m_0 \notin WF_b^{Sch}(u)$ si $m_0 \notin WF^{Sch}(u)$.

Si $m_0 \in T^*(\mathbb{R}_t \times \partial\Omega) \setminus \{0\}$, nous notons $(x',x_d) \in \mathbb{R}^d$ un système de coordonnées locales au voisinage de m_0 tel que $\partial\Omega = \{x_d = 0\}$ et $\Omega = \{x_d > 0\}$ localement. Nous disons que $m_0 \notin WF_b^{Sch}(u)$ si il existe $A \in Op(S^0_{Sch}(\mathbb{R}^d))$ elliptique en m_0 et $\varepsilon > 0$ tels que:

$$A(t,x',D_{t,x'})u(t,x',x_d) \in C^\infty(\mathbb{R}^d_{tx'} \times [0,\varepsilon]_{x_d}). \tag{2}$$

Remarque. $WF_b^{Sch}(u)$ est un fermé S-conique. C'est l'équivalent dans le cadre de l'équation de Schrödinger du front d'onde au bord usuel.

En général, la définition 2 n'est pas indépendante du choix des coordonnées. Cependant, nous sommes intéressés par les solutions de $(\partial_t + i\Delta)u = 0$.

Proposition 1. *Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \overline{\Omega})$ solution de $(\partial_t + i\Delta)u = 0$. Si (2) est vérifiée par un opérateur $A_1 \in Op(S^0_{Sch}(\mathbb{R}^d))$ elliptique dans un voisinage conique V de m_0, alors (2) est vérifiée dans tout autre système de coordonnées et pour tout opérateur $A \in Op(S^0_{Sch}(\mathbb{R}^d))$ tel que le support du symbole de A est inclus dans V.*

L'ensemble caractéristique au bord pour Schrödinger est défini par

$$\begin{aligned} \widetilde{\Sigma}_b \;=\; & \{(t,x,\tau,\xi) \in T^*(\mathbb{R}_t \times \Omega) \setminus \{0\} \,/ \tau - |\xi|^2 = 0\} \\ & \cup \{(t,(x',0),\tau,\xi') \in T^*(\mathbb{R}_t \times \partial\Omega) \setminus \{0\} \,/ \tau - |\xi'|^2 \geq 0\}. \end{aligned} \tag{3}$$

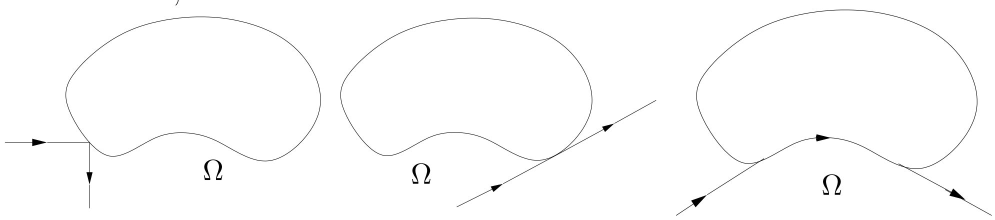
Soit $\widetilde{G}$ défini par

$$\widetilde{G} = \{(t,(x',0),\tau,\xi') \in T^*(\mathbb{R}_t \times \partial\Omega) \setminus \{0\} \,/ \tau - |\xi'|^2 = 0\},$$

alors $\widetilde{\Sigma}_b^\infty$ est défini par

$$\widetilde{\Sigma}_b^\infty = \{(t,(x',0),\tau,\xi') \in \tilde{G} \,/\, H^j_\Delta x_d = 0, \forall j \text{ en } (t,(x',0),\tau,\xi',0)\}, \tag{4}$$

où H_Δ désigne l'Hamiltonien de Δ. Nous définissons le flot de $\partial_t + i\Delta$ dans $\widetilde{\Sigma}_b \setminus \widetilde{\Sigma}_b^\infty$ comme l'ensemble des courbes de la forme $(T,x(\alpha),\tau_0,\xi(\alpha))$ où $(x(\alpha),\xi(\alpha))$ décrit le flot brisé du Laplacien. Le flot brisé du Laplacien est une droite dans $T^*(\Omega) \setminus \{0\}$, et proche de $\partial\Omega$, nous avons l'une des trois situations suivantes:



rayon transverse rayon rasant rayon glissant

Remarque. t est constant le long du flot brisé de $\partial_t + i\Delta$ ce qui correspond à la propagation à vitesse infinie de Schrödinger.

Nous avons le théorème suivant de réflexion des singularités pour l'équation de Schrödinger.

Théorème 1. *Soit u solution de (1). $WF_b^{Sch}(u)$ est inclus dans $\widetilde{\Sigma}_b$, et est invariant sous l'action du flot brisé de $\partial_t + i\Delta$ dans $\widetilde{\Sigma}_b \setminus \widetilde{\Sigma}_b^{\infty}$.*

Remarques.

- Le théorème 1 pour les points de $T^*(\mathbb{R}_t \times \Omega) \setminus \{0\}$ (i.e. lorsque l'on s'intéresse uniquement à la propagation des singularités) redonne le théorème de R. Lascar [3] et L. Boutet de Monvel [2].
- Le théorème 1 est l'analogue pour Schrödinger (propagation à vitesse infinie) du théorème de R. B. Melrose et J. Sjöstrand (propagation à vitesse finie).
- Le théorème 1 nous a permis de calculer l'opérateur de Dirichlet-Neumann pour l'opérateur de Schrödinger dans l'extérieur d'un compact convexe (voir [10]).

Avant de passer à la preuve du théorème 1, nous établissons un lien avec l'effet régularisant pour Schrödinger (voir par exemple [11], [6] et [7]). Dans le cas du problème libre, L. Robbiano et C. Zuily [6] définissent un front d'onde $\widetilde{WF}(u(T,.))$ en (x,ξ) uniforme par rapport à t dans un voisinage de T. Ils montrent que si la condition initiale u_0 est à décroissance rapide le long de la bicaractéristique rétrograde issue de $(x_0,\xi_0) \in T^*(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$, alors $(x_0,\xi_0) \notin \widetilde{WF}(u(T,.))$ (en fait, le résultat est obtenu lorsque u_0 est à décroissance exponentielle dans le cas des singularités analytiques, mais la même construction implique le résultat pour u_0 à décroissance rapide dans le cas des singularités C^∞). Or, dans [10], nous prouvons l'équivalence suivante entre $WF^{Sch}(u)$ et $\widetilde{WF}(u(T,.))$:

$$\widetilde{WF}(u(T,.)) = \big\{(x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\} \,/ (T,x,\tau,\xi) \in WF^{Sch}(u) \text{ où } \tau \text{ vérifie } \tau - |\xi|^2 = 0\big\}, \tag{5}$$

lorsque u est une solution de $\partial_t u + i\Delta u$. Par conséquent, si Ω est un ouvert extérieur régulier et si u est solution de (1) avec condition initiale u_0, le théorème de L. Robbiano et C. Zuily, le théorème 1 et (5) impliquent que si u_0 est à décroissance rapide le long de la bicaractéristique brisée rétrograde issue de (x_0,ξ_0), alors $(x_0,\xi_0) \notin WF_b^{Sch}(u)$. Nous obtenons ainsi un résultat d'effet régularisant dans le cas d'un ouvert extérieur. Ce résultat est résumé par la figure 1.

Remarque. Dans le cas d'un Laplacien à coefficients variables Δ_g, il faut également supposer que Δ_g est asymptotique au Laplacien plat quand $|x| \to +\infty$ en un certain sens pour pouvoir appliquer les résultats de [6].

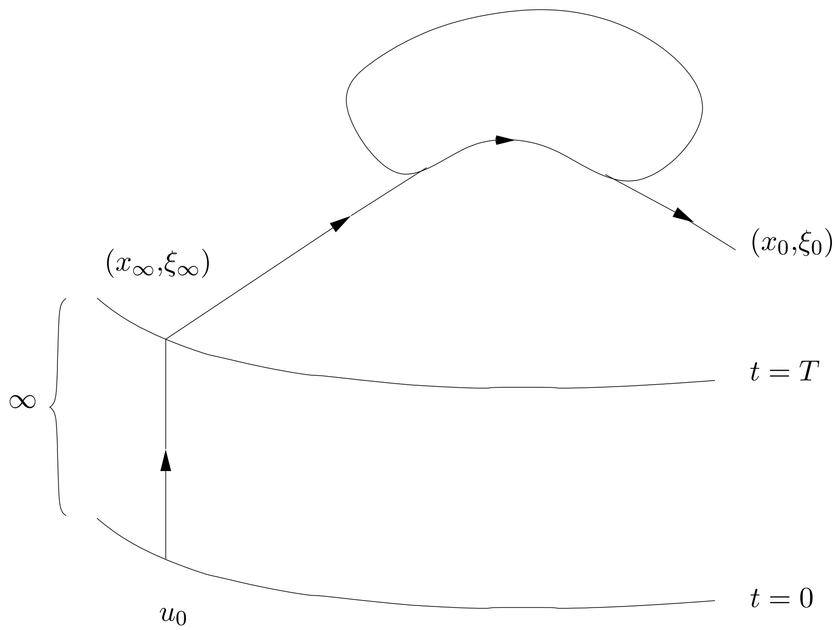


FIG. 1 – *Effet régularisant pour un ouvert extérieur*

2 Preuve du théorème 1

Nous voulons établir un lien entre l'équation de Schrödinger et l'opérateur hyperbolique $P = \partial_s\partial_t - \Delta$. Pour P, on peut définir un ensemble caractéristique au bord de manière usuelle:

$$\begin{aligned}\Sigma_b = &\{(s,t,x,\sigma,\tau,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^2 \times \Omega) \setminus \{0\} \,/ \sigma\tau - |\xi|^2 = 0\} \\ &\cup\{(s,t,(x',0),\sigma,\tau,\xi') \in T^*(\mathbb{R}^2 \times \partial\Omega) \setminus \{0\} \,/ \sigma\tau - |\xi'|^2 \geq 0\}.\end{aligned}$$

Soit G défini par

$$G = \{(s,t,(x',0),\sigma,\tau,\xi') \in T^*(\mathbb{R}^2 \times \partial\Omega) \setminus \{0\} \,/ \sigma\tau - |\xi'|^2 = 0\},$$

alors Σ_b^∞ est défini par

$$\Sigma_b^\infty = \{(s,t,(x',0),\sigma,\tau,\xi') \in G \,/\; H_\Delta^j x_d = 0, \forall j \text{ en } (s,t,(x',0),\sigma,\tau,\xi',0)\}.$$

Le flot de P dans $\Sigma_b \setminus \Sigma_b^\infty$ au sens de R. B. Melrose et J. Sjöstrand est l'ensemble des courbes de la forme $(s_0 + \tau_0\alpha, t_0 + \sigma_0\alpha, x(\alpha), \sigma_0, \tau_0, \xi(\alpha))$ où $(x(\alpha),\xi(\alpha))$ décrit le flot brisé du Laplacien. Par conséquent, pour T réel, soit Π_T l'application de $T^*(\mathbb{R}^2 \times \Omega) \cup T^*(\mathbb{R}^2 \times \partial\Omega) \setminus \{0\}$ dans $T^*(\mathbb{R}_t \times \Omega) \cup T^*(\mathbb{R}_t \times \partial\Omega) \setminus \{0\}$ définie par $\Pi_T(s,t,x,\sigma,\tau,\xi) = (T,x,\tau,\xi)$ et $\Pi_T(s,t,x,\sigma,\tau,\xi') = (T,x,\tau,\xi')$, alors Π_T envoie

$\Sigma_b \cap \{\sigma = 1\}$ sur $\widetilde{\Sigma}_b$ et les bicaractéristiques de P contenues dans $\{\sigma = 1\}$ sur celles de Schrödinger.

Nous établissons un lien entre la solution de l'équation de Schrödinger u et une solution U de $PU = 0$ en deux étapes. Nous établissons d'abord un lien entre u et une suite $(w_k)_{k\geq 0}$, puis un lien entre $(w_k)_{k\geq 0}$ et U.

Soit une fonction de Littlewood-Paley χ dans $C_0^\infty(]1/4,4[)$ telle que

$$\sum_{k\geq 0} \chi(h_k^2 r) = 1 \, \forall r \geq 1, \text{ où } h_k = 2^{-k}. \tag{6}$$

Les bicaractéristiques de Schrödinger se propageant à t constant, nous notons T le temps au voisinage duquel nous étudions u. Soit

$$w_k^T(t,x) = (\chi(h_k^2(1-\Delta))u(T + h_k t,.))(x). \tag{7}$$

Nous remarquons en particulier que

$$u(T,x) = \sum_{k\geq 0} w_k^T(0,x). \tag{8}$$

Nous voulons déduire des propriétés pour w_k^T (resp. u) à partir de u (resp. w_k^T) grâce à (7) (resp. (8)). Nous ramenons ainsi l'étude de u au voisinage de $t = T$ à l'étude de (w_k^T) au voisinage de $t = 0$. Pour cela, nous définissons un front d'onde au bord pour la suite w^T, et nous établissons un lien entre ce front d'onde au bord et $WF_b^{Sch}(u)$.

Définition 3. *Soit $\rho_0 \in T^*(\mathbb{R}_t \times \Omega) \cup T^*(\mathbb{R}_t \times \partial\Omega) \setminus \{0\}$ et $T \in \mathbb{R}$. $\rho_0 \notin \widetilde{WF}_b(w^T)$ si il existe un opérateur h-pseudodifférentiel (ou h-pseudodifférentiel tangentiel si $\rho_0 \in T^*(\mathbb{R}_t \times \partial\Omega) \setminus \{0\}$) Q_h dont le symbole est à support compact, elliptique en ρ_0, et $\delta > 0$ tel que pour tout N et $|T' - T| < \delta$:*

$$\|Q_{h_k} w_k^{T'}\|_{L^2(\mathbb{R}_t\times\Omega)} = \mathcal{O}(h_k^N), \forall k \geq 1.$$

Lemme 1. *Soit $T \in \mathbb{R}$ et (T,x_0,τ_0,ξ_0) dans $T^*(\mathbb{R}_t \times \Omega) \setminus \{0\}$ (resp. (T,x_0,τ_0,ξ_0') dans $T^*(\mathbb{R}_t \times \partial\Omega) \setminus \{0\}$). Si $(T,x_0,\tau_0,\xi_0) \notin WF_b^{Sch}(u)$ (resp. $(T,x_0,\tau_0,\xi_0') \notin WF_b^{Sch}(u)$), alors $(0,x_0,\lambda^2\tau_0,\lambda\xi_0) \notin \widetilde{WF}_b(w^T)$ (resp. $(0,x_0,\lambda^2\tau_0,\lambda\xi_0') \notin \widetilde{WF}_b(w^T)$) pour tout $\lambda > 0$. Réciproquement, si il existe un réel t_0 tel que $(t_0,x_0,\lambda^2\tau_0,\lambda\xi_0) \notin \widetilde{WF}_b(w^T)$ (resp. $(t_0,x_0,\lambda^2\tau_0,\lambda\xi_0') \notin \widetilde{WF}_b(w^T)$) pour tout $\lambda > 0$, alors $(T,x_0,\tau_0,\xi_0) \notin WF_b^{Sch}(u)$ (resp. $(T,x_0,\tau_0,\xi_0') \notin WF_b^{Sch}(u)$).*

La preuve du lemme 1 fait l'objet de la section suivante. Avant de passer au lien entre w^T et une solution U^T de $PU^T = 0$, remarquons que

$$\widetilde{WF}_b(w^T) \subset \{1/4 \leq \tau \leq 4\}. \tag{9}$$

En effet, soit $\varphi \in S^0(\mathbb{R})$ nulle sur $[1/4,4]$ et $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors

$$\varphi(h_k D_t)\psi w_k^T = e^{-iT\Delta}\varphi(h_k D_t)(\psi(t)\chi(h_k^2(1-\Delta))e^{-ih_k t\Delta})u_0,$$

et il suffit de montrer que

$$\|\varphi(hD_t)(\psi(t)\chi(h^2(1-\Delta))e^{-iht\Delta})\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \mathcal{O}(h^N). \tag{10}$$

Or

$$\varphi(hD_t)(\psi(t)\chi(h^2(1-\Delta))e^{-iht\Delta}) = \int_1^{+\infty} \varphi(hD_t)(\psi(t)e^{ith(\lambda-1)})\chi(h^2\lambda)dE(\lambda), \quad (11)$$

où E est la résolution de l'identité associée à $1-\Delta$ avec conditions de Dirichlet. Comme $\mathcal{F}\psi(\tau)$ est à décroissance rapide, et grâce aux propriétés des supports de χ et φ, on a pour tout entier N

$$|\varphi(hD_t)(\psi(t)e^{ith(\lambda-1)})\chi(h^2\lambda)| \leq C_N h^N,$$

ce qui joint à (11) implique (10), et donc (9).

Nous définissons U^T à partir de w^T par

$$U^T(s,t,x) = \sum_{k\geq 0} e^{i2^k s} w_k^T(t,x). \quad (12)$$

On déduit de (1) et (7) que w_k^T vérifie

$$\begin{cases} h_k \dfrac{\partial w_k^T}{\partial t} + ih_k^2 \Delta w_k^T = 0, \\ w_k^T|_{\mathbb{R}\times\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

ce qui implique

$$\begin{cases} PU^T = \dfrac{\partial^2 U^T}{\partial s \partial t} - \Delta U^T = 0, \\ U^T|_{\mathbb{R}_s\times\mathbb{R}_t\times\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Nous définissons un front d'onde au bord pour U^T, et nous établissons un lien entre ce front d'onde au bord et $\widetilde{WF}_b(w^T)$. Le front d'onde au bord pour U^T est le front d'onde au bord usuel auquel on ajoute de l'uniformité par rapport au paramètre T.

Définition 4. *Soit $\varrho_0 \in T^*(\mathbb{R}^2\times\Omega)\cup T^*(\mathbb{R}^2\times\partial\Omega)\setminus\{0\}$ et $T\in\mathbb{R}$. $\varrho_0 \notin \widetilde{\widetilde{WF}}_b(U^T)$ si il existe un opérateur pseudodifférentiel (ou pseudodifférentiel tangentiel si $\varrho_0 \in T^*(\mathbb{R}^2\times\partial\Omega)\setminus\{0\}$) Q d'ordre 0 elliptique en ϱ_0 et $\delta>0$ tel que $QU^{T'}$ est dans $C^\infty(\mathbb{R}^2\times\overline{\Omega})$ avec des semi-normes bornées indépendamment de T' dans $]T-\delta,T+\delta[$.*

A un réel s et à un point ρ de $T^*(\mathbb{R}_t\times\Omega)\cup T^*(\mathbb{R}_t\times\partial\Omega)\setminus\{0\}$, nous associons un point $\theta(s,\rho)$ de $T^*(\mathbb{R}^2\times\Omega)\cup T^*(\mathbb{R}^2\times\partial\Omega)\setminus\{0\}$. Si $\rho=(t,x,\tau,\xi)\in T^*(\mathbb{R}_t\times\Omega)\setminus\{0\}$ (resp. $\rho=(t,x,\tau,\xi')\in T^*(\mathbb{R}_t\times\partial\Omega)\setminus\{0\}$), nous lui associons $\theta(s,\rho)=(s,t,x,1,\tau,\xi)$ (resp. $\theta(s,\rho)=(s,t,x,1,\tau,\xi')$).

Lemme 2. *Pour tout $s_0\in\mathbb{R}$, $T\in\mathbb{R}$ et $\rho_0\in T^*(\mathbb{R}_t\times\Omega)\cup T^*(\mathbb{R}_t\times\partial\Omega)\setminus\{0\}$:*

$$\rho_0 \in \widetilde{WF}_b(w^T) \iff \theta(s_0,\rho_0)\in \widetilde{\widetilde{WF}}_b(U^T).$$

G. Lebeau [4] démontre le lemme 2 dans le cas où $w^{T'}$ et $U^{T'}$ ne dépendent pas de T'. Il reste alors à voir que sa preuve s'étend au cas où la dépendance par rapport à T' vérifie des estimations uniformes dans un voisinage de T.

Nous pouvons maintenant prouver le théorème 1. Par le théorème de R. B. Melrose et J. Sjöstrand:

$$\widetilde{\widetilde{WF}}_b(U^T) \subset \Sigma_b = \{\sigma\tau - |\xi|^2 = 0\} \cup \{\sigma\tau - |\xi'|^2 \geq 0\}.$$

Le lemme 2 implique:

$$\widetilde{WF}_b(w^T) \subset \{\tau - |\xi|^2 = 0\} \cup \{\tau - |\xi'|^2 \geq 0\} = \widetilde{\Sigma}_b.$$

Le lemme 1 implique alors $WF_b^{Sch}(u) \subset \widetilde{\Sigma}_b$.

Il reste à montrer que $WF_b^{Sch}(u)$ est invariant sous l'action du flot brisé de $\partial_t + i\Delta$ dans $\widetilde{\Sigma}_b \setminus \widetilde{\Sigma}_b^{\infty}$. Soient m_1 et m_2 deux points de $\widetilde{\Sigma}_b \setminus \widetilde{\Sigma}_b^{\infty}$ sur la même bicaractéristique brisée de $\partial_t + i\Delta$. On suppose que l'arc de bicaractéristique compris entre m_1 inclus et m_2 exclus a une intersection vide avec $WF_b^{Sch}(u)$. Comme $WF_b^{Sch}(u)$ est fermé, il suffit par un argument de connexité de montrer que $m_2 \notin WF_b^{Sch}(u)$ pour conclure. Dans la suite, on note $m_1 = (T, x_1, \tau_0, \xi_1)$ et $m_2 = (T, x_2, \tau_0, \xi_2)$ ($m_1 = (T, x_1, \tau_0, \xi_1')$ ou $m_2 = (T, x_2, \tau_0, \xi_2')$ si m_1 ou m_2 est dans $T^*(\mathbb{R}_t \times \partial\Omega) \setminus \{0\}$, mais nous ne le précisons pas car les lemmes 1 et 2 sont valables pour les points intérieurs comme pour les points du bord).

Par l'absurde, on suppose que

$$(T, x_2, \tau_0, \xi_2) \in WF_b^{Sch}(u).$$

Soit $t_0 > 0$ petit qui sera fixé plus tard. Le lemme 1 implique:

$$\exists \lambda > 0 \,/\, (t_0, x_2, \lambda^2\tau_0, \lambda\xi_2) \in \widetilde{WF}_b(w^T).$$

Le lemme 2 implique:

$$(0, t_0, x_2, 1, \lambda^2\tau_0, \lambda\xi_2) \in \widetilde{\widetilde{WF}}_b(U^T).$$

Il existe (x_λ, ξ_λ) dans $T^*(\Omega) \cup T^*(\partial\Omega)$ tel que les points $(0, t_0, x_2, 1, \lambda^2\tau_0, \lambda\xi_2)$ et $(-\lambda^2\tau_0 t_0, 0, x_\lambda, 1, \lambda^2\tau_0, \lambda\xi_\lambda)$ sont sur la même bicaractéristique brisée de P. Comme $(0, t_0, x_2, 1, \lambda^2\tau_0, \lambda\xi_2) \in \widetilde{\widetilde{WF}}_b(U^T)$, le théorème de R. B. Melrose et J. Sjöstrand implique:

$$(-\lambda^2\tau_0 t_0, 0, x_\lambda, 1, \lambda^2\tau_0, \lambda\xi_\lambda) \in \widetilde{\widetilde{WF}}_b(U^T).$$

Le lemme 2 implique:

$$(0, x_\lambda, \lambda^2\tau_0, \lambda\xi_\lambda) \in \widetilde{WF}_b(w^T).$$

Le lemme 1 implique:

$$(T, x_\lambda, \tau_0, \xi_\lambda) \in WF_b^{Sch}(u).$$

Comme $(0, t_0, x_2, 1, \lambda^2\tau_0, \lambda\xi_2)$ et $(-\lambda^2\tau_0 t_0, 0, x_\lambda, 1, \lambda^2\tau_0, \lambda\xi_\lambda)$ sont sur la même bicaractéristique brisée de P, (T, x_2, τ_0, ξ_2) et $(T, x_\lambda, \tau_0, \xi_\lambda)$ sont sur la même bicaractéristique brisée de $\partial_t + i\Delta$ grâce à la correspondance induite par l'application Π_T entre les bicaractéristiques de P et de $\partial_t + i\Delta$.

Comme l'arc de bicaractéristique compris entre (T,x_1,τ_0,ξ_1) inclus et (T,x_2,τ_0,ξ_2) exclus a une intersection vide avec $WF_b^{Sch}(u)$, et comme $(T,x_\lambda,\tau_0,\xi_\lambda) \in WF_b^{Sch}(u)$, il suffit pour conclure de montrer que $(T,x_\lambda,\tau_0,\xi_\lambda)$ est entre (T,x_2,τ_0,ξ_2) et (T,x_1,τ_0,ξ_1). La distance entre (T,x_2,τ_0,ξ_2) et $(T,x_\lambda,\tau_0,\xi_\lambda)$ est $t_0\lambda$: il suffit donc que $t_0\lambda$ soit suffisamment petit. Comme $(t_0,x_2,\lambda^2\tau_0,\lambda\xi_2) \in \widetilde{WF}_b(w^T)$, (9) implique:

$$\lambda \in \left[\frac{1}{2\sqrt{\tau_0}},\frac{2}{\sqrt{\tau_0}}\right].$$

Par conséquent, il suffit de choisir $t_0 > 0$ tel que $t_0/\sqrt{\tau_0}$ est assez petit pour conclure.

3 Preuve du lemme 1

Nous nous contentons de montrer le sens direct, le sens réciproque reposant sur le même type d'idées. De plus, nous nous plaçons sur le bord de Ω, le cas intérieur étant analogue. Nous supposons donc que $(T,x_0,\tau_0,\xi_0') \notin WF_b^{Sch}(u)$, et nous voulons montrer que $(0,x_0,\lambda^2\tau_0,\lambda\xi_0') \notin \widetilde{WF}_b(w^T)$ pour tout $\lambda > 0$.

Nous fixons $\lambda > 0$. Soit Q_h^1 et Q_h^2 des opérateurs h-pseudodifférentiels tangentiels avec des symboles q_1 et q_2 elliptiques en $(0,x_0,\lambda^2\tau_0,\lambda\xi_0')$ et à support dans un petit voisinage de ce point avec $q_2 \equiv 1$ sur un voisinage du support de q_1. Nous voulons montrer l'existence de $\delta > 0$ tel que pour tout N et $|T'-T| < \delta$

$$\|Q_{h_k}^1 w_k^{T'}\|_{L^2} = \mathcal{O}(h_k^N), k \geq 1.$$

Or

$$\begin{aligned} Q_{h_k}^1 w_k^{T'} &= Q_{h_k}^1(\chi(h_k^2(1-\Delta))(Q_{h_k}^2 u(h_k.+T',.))) \\ &+ Q_{h_k}^1(\chi(h_k^2(1-\Delta))(1-Q_{h_k}^2)u(h_k.+T',.)). \end{aligned}$$

Comme $q_2 \equiv 1$ sur un voisinage du support de q_1:

$$\|Q_{h_k}^1 \chi(h_k^2(1-\Delta))(1-Q_{h_k}^2)\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \mathcal{O}(h_k^N) \tag{14}$$

à condition de montrer que $\chi(h^2(1-\Delta))$ se comporte "comme un opérateur h-pseudodifférentiel", ce qui fait l'objet du lemme 3.

Lemme 3. *Pour tout $N \geq 2$, il existe des opérateurs h-pseudodifférentiels Q_j, des opérateurs h-singuliers de Green G_j d'ordre $-1-j$, et un opérateur S_N, tels que:*

$$\chi(h^2(1-\Delta)) = \sum_{j=0}^{N-1} h^j(Q_{j\Omega} + G_j) + h^N S_N. \tag{15}$$

De plus, le symbole $q_j(x,\xi)$ de Q_j est à support compact en ξ et l'opérateur S_N vérifie pour tout $0 < h \leq 1$:

$$\|S_N\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq C_N. \tag{16}$$

Si Q est un opérateur h-pseudodifférentiel sur un voisinage de $\overline{\Omega}$, Q_Ω est défini pour $v \in L^2(\Omega)$ par $Q_\Omega v = (Q\tilde{v})|_\Omega$, où $\tilde{v}$ est le prolongement de v par 0 en dehors de Ω. Soit $g(x,\xi',y_d,h)$ une fonction C^∞ et $r \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $(k,l,m,n,\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^{2d+2}$:

$$|x_d^k y_d^l \partial_{x_d}^m \partial_{y_d}^n \partial_{x'}^\alpha \partial_{\xi'}^\beta g(x,\xi',y_d,h)| \leq C_{\alpha\beta klmn} h^{l+k-m-n}(1+|\xi'|)^{r-k-l+m+n-|\beta|}. \tag{17}$$

Nous associons à g l'opérateur h-singulier de Green d'ordre r:

$$Gv(x) = (2\pi h)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^d_+} e^{i(x'-y')(\xi'/h)} g(x,\xi',y_d,h)v(y)dyd\xi'. \tag{18}$$

Remarque. C'est la version semi-classique des opérateurs de Green de L. Boutet de Monvel [1].

Avant de démontrer le lemme 3, nous terminons la preuve du lemme 1. Comme $q_2 \equiv 1$ sur un voisinage du support de q_1, nous pouvons montrer grâce à des formules asymptotiques pour la composition analogues au cas h-pseudodifférentiel classique (voir [10]) que:

$$\left\| Q_h^1 \sum_{j=0}^{N-1} h^j (Q_{j\Omega} + G_j)(1 - Q_h^2) \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \mathcal{O}(h^N), \tag{19}$$

ce qui joint à (15) et (16) implique (14).

Il reste à montrer que

$$\|Q_{h_k}^1(\chi(h_k^2(1-\Delta))(Q_{h_k}^2 u(h_k. + T',.)))\|_{L^2} = \mathcal{O}(h_k^N).$$

Comme

$$\chi(h_k^2(1-\Delta)) = h_k^{2N} \left(\frac{\chi}{r^N}\right)(h_k^2(1-\Delta))(1-\Delta)^N,$$

il suffit de montrer que pour tout N

$$\|(1-\Delta)^N Q_{h_k}^2 u(h_k. + T',.)\|_{L^2} \leq C_N.$$

Or un calcul donne:

$$\begin{aligned} &Q_{h_k}^2 u(h_k. + T',.) \\ &= \left(q_2\left(\tfrac{t-T'}{h_k},x,h_k^2 D_t,h_k D_{x'}\right)u\right)(h_k t + T',x). \end{aligned}$$

On est donc ramené à montrer que pour tout N

$$\left\|(1-\Delta)^N q_2\left(\frac{t-T'}{h_k},x,h_k^2 D_t,h_k D_{x'}\right)u\right\|_{L^2} \leq C_N. \tag{20}$$

Comme q_2 est à support dans un petit voisinage de $(0,x_0,\lambda^2\tau_0,\lambda\xi_0')$, $q_2\left(\frac{t-T'}{h_k},x,h_k^2\tau,h_k\xi'\right)$ est à support dans un voisinage S-conique de (T,x_0,τ_0,ξ_0') indépendant de k. Or, par hypothèse, $(T,x_0,\tau_0,\xi_0') \notin WF_b^{Sch}(u)$, et il est alors aisé d'en déduire (20), ce qui achève la preuve du lemme 1.

Pour finir, nous donnons les grandes lignes de la preuve du lemme 3. Soit $\chi_1(x) = \chi(x-1)$, alors $\chi_1 \in C_0^\infty(]0,+\infty[)$ et $\chi(h^2(1-\Delta)) = \chi_1(1+h^2(1-\Delta))$. Nous suivons la méthode employée par B. Helffer et D. Robert (voir par exemple [8]) dans le cas de la construction de la paramétrix pour le problème libre. Pour tout $\varrho > 0$:

$$\chi_1(1+h^2(1-\Delta)) = \int_{\varrho-i\infty}^{\varrho+i\infty} \mathcal{M}[\chi_1](s)(1+h^2(1-\Delta))^{-s}ds, \tag{21}$$

où $\mathcal{M}[\chi_1]$ est la transformée de Mellin de χ_1. De plus,

$$(1+h^2(1-\Delta))^{-s} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Lambda_\theta} \lambda^{-s}(1+h^2(1-\Delta)-\lambda)^{-1}d\lambda, \tag{22}$$

où $0<\theta\leq\pi/2$ et Λ_θ est le contour défini par:

$$\Lambda_\theta = \left\{re^{-i\theta}, r\geq\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}e^{i\gamma},\ -\theta\leq\gamma\leq\theta\right\} \cup \left\{re^{i\theta}, r\geq\frac{1}{2}\right\}. \tag{23}$$

Aux vues de (21), (22) et (23), on est ramené à la construction d'une paramétrix à droite de $1+h^2(1-\Delta)-\lambda$ avec les conditions de Dirichlet pour λ dans

$$D = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{\lambda\,/\,\mathrm{Re}(\lambda)\geq 0,\ \mathrm{Im}(\lambda)\neq 0 \text{ et } |\lambda|\geq\frac{1}{2}\right\}. \tag{24}$$

Nous devons également obtenir pour cette paramétrix des estimations précises en fonction de λ afin d'assurer la convergence des intégrales de (21) et (22).

Pour la construction d'une paramétrix à droite de $1+h^2(1-\Delta)-\lambda$ avec les conditions de Dirichlet, nous adaptons l'étude de R. Seeley [9] au cadre semi-classique: on se ramène au demi-espace par cartes locales et on construit par récurrence q_j (données par des équations algébriques) et g_j (données par des équations différentielles en x_d/h). Il reste alors à obtenir des estimations précises des semi-normes de ces différents symboles en fonction de λ et h.

Remarque. $\sum_{j=0}^{N-1} h^j Q_{j\Omega}$ correspond à la restriction à Ω de la paramétrix du problème libre, et la correction $\sum_{j=0}^{N-1} h^j G_j$ permet d'assurer les conditions de Dirichlet sur $\partial\Omega$.

Références

[1] Boutet de Monvel, L. (1971): Boundary problems for pseudo-differential operators. Acta Math. **126**, 11-51.

[2] Boutet de Monvel, L. (1975): Propagation des singularités des solutions d'équations analogues à l'équation de Schrödinger *Fourier integral operators and partial differential equations.* Lecture Notes in Math. **459**, Springer-Verlag, Berlin, 1-14.

[3] Lascar, R. (1977): Propagation des singularités des solutions d'équations pseudodifférentielles quasi-homogènes. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **27**, 79-123.

[4] Lebeau, G. (1992): Contrôle de l'équation de Schrödinger. J. Math. Pures Appl. **71**, 267-291.

[5] Melrose, R. B., Sjöstrand, J. (1978): Singularities of boundary value problems I. Comm. Pure Appl. Math. **31**, 593-617.

[6] Robbiano, L., Zuily, C. (1999): Microlocal analytic smoothing effect for the Schrödinger equation. Duke Math. J. **100** (1), 93-129.

[7] Robbiano, L., Zuily, C. (2002): Analytic theory for the quadratic scattering wave front set and application to the Schrödinger equation. Astérisque **283**.

[8] Robert, D. (1987): *Autour de l'approximation semi-classique*. Progress in Mathematics, Birkhäuser, Vol. 68.

[9] Seeley, R. (1969): The resolvent of an elliptic boundary problem. Amer. J. Math. **91**, 889-920.

[10] Szeftel, J. (2003): Réflexion des singularités pour l'équation de Schrödinger. A paraître dans Comm. Partial Differential Equations.

[11] Wunsch, J. (1999): Propagation of singularities and growth for Schrödinger operators. Duke Math. J. **98** (1), 137-186.