SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2003-2004

Nicolas Lerner

Équations de transport dont les vitesses sont partiellement *BV*

Séminaire É. D. P. (2003-2004), Exposé n° X, 19 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2003-2004____A10_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

ÉQUATIONS DE TRANSPORT DONT LES VITESSES SONT PARTIELLEMENT BV

Nicolas Lerner

Université de Rennes 1

Résumé. Nous démontrons l'unicité des solutions faibles pour une classe d'équations de transport dont les vitesses sont partiellement à variations bornées. Nous nous intéressons à des champs de vecteurs du type

$$a_1(x_1)\cdot\partial_{x_1}+a_2(x_1,x_2)\cdot\partial_{x_2},\quad a_1\in BV(\mathbb{R}^{N_1}_{x_1}),\quad a_2\in L^1_{x_1}\big(BV(\mathbb{R}^{N_2}_{x_2})\big),$$

avec une borne sur la divergence de chacun des champs a_1, a_2. Ce modèle a été étudié récemment dans [LL] par C. Le Bris et P.-L. Lions avec une régularité $W^{1,1}$; nous montrons ici également que, dans le cas $W^{1,1}$, le contrôle L^∞ de la divergence totale du champ est suffisant. Notre méthode consiste à démontrer la propriété de renormalisation à partir de l'étude de la commutation d'un opérateur pseudo-différentiel avec une fonction BV.

1. Introduction

Nous examinons ici des champs de vecteurs du type suivant,

$$\begin{cases} X=a_1(x_1)\cdot\partial_{x_1}+a_2(x_1,x_2)\cdot\partial_{x_2}, & a_1\in BV(\mathbb{R}^{N_1}_{x_1}),\quad a_2\in L^1_{x_1}\big(BV(\mathbb{R}^{N_2}_{x_2})\big),\\ \operatorname{div}_1 a_1\in L^\infty(\mathbb{R}^{N_1}), & \operatorname{div}_2 a_2\in L^\infty(\mathbb{R}^{N_1+N_2}).\end{cases}\tag{1.1}$$

On peut noter que le champ a_1 est BV mais ne dépend que des variables x_1, tandis que le champ a_2 est seulement L^1 par rapport aux variables x_1 (et BV par rapport aux variables x_2). Notre condition sur la divergence est plus forte que $\operatorname{div} X\in L^\infty$, car nous imposons une hypothèse sur chacune des divergences de a_1 et a_2.

Néanmoins, pour des champs du type (1.1) où la régularité BV est remplacée par une hypothèse $W^{1,1}$, comme dans l'article récent de C. Le Bris and P.-L. Lions ([LL]), nous montrons que la condition $\operatorname{div} X\in L^\infty$ est suffisante pour obtenir l'unicité.

2000 *Mathematics Subject Classification* 35F05, 34A12, 26A45.

Key words and phrases. Vector fields, Transport equation, Weak solutions, BV.

Un bref survol des résultats connus sur ce sujet. En 1989, R. DiPerna et P.-L. Lions démontrent dans [DL] que la régularité $W^{1,1}$ d'un champ de vecteurs (ainsi qu'une borne L^∞ sur la divergence et une condition globale) assure l'unicité des solutions faibles. En 1998, P.-L. Lions introduit dans [Li] la notion de régularité $W^{1,1}$ par morceaux et étend à ce cadre les résultats de [DL]. In 2001, F. Bouchut étudie dans [Bo] des cas de régularité BV correspondant essentiellement à des singularités $W^{1,1}$ sur des hyperplans. Dans le papier [CL2], les auteurs introduisent la classe *conormal* BV, définie de manière invariante et plus large que la classe des fonctions $W^{1,1}$ par morceaux. Leur définition est simplifiée par la remarque que les fermés de mesure de Hausdorff $(N-1)$ dimensionnelle nulle ne jouent pas de rôle pour des champs localement bornés. Finalement, en 2003, L. Ambrosio démontre dans [Am] la conjecture formulée dans [DL] que les champs BV (avec une divergence bornée) ont un flot. Un ingrédient important de la démonstration d'Ambrosio est l'utilisation d'un résultat profond de structure des fonctions BV, le théorème de G. Alberti. Bien que la généralité de ce résultat ne soit pas requise pour l'unicité des solutions des équations de transport, l'examen détaillé de la structure des singularités d'un champ BV joue un rôle important dans cette preuve. Par ailleurs, le contre-exemple classique de M. Aizenman ([Ai]), les contre-exemples récents de N. Depauw ([De]) et de F. Colombini, T. Luo, J. Rauch ([CLR]) indiquent que la régularité BV est pertinente pour obtenir l'unicité.

La propriété de renormalisation. En suivant la méthode introduite dans [DL], l'outil principal de la démonstration des résultats d'unicité des solutions faibles est un lemme de commutation du champ de vecteur avec un opérateur de régularisation. On peut considérer finalement qu'un champ de vecteur X aura la propriété d'unicité s'il se comporte comme un champ ordinaire pour la formule de Leibniz. Ceci induit par exemple, que pour une fonction u bornée telle que $Xu = 0$, on aura $Xu^2 = 0$ et de manière plus générale

$$X\big(\beta(u)\big) = \beta'(u)Xu \tag{1.2}$$

pour une fonction β de classe C^1. On peut noter que cette propriété (1.2) peut être violée en dépit du fait que chaque membre de l'égalité ait un sens, comme cela a été démontré par N. Depauw dans [De]. Dans cet article, N. Depauw exhibe un champ de vecteur L^∞ à divergence nulle $a \in L^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2_x; \mathbb{R}^2)$ et une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2_x)$, supportée dans $\{t \geq 0\}$ tels que

$$\partial_t u + \partial_x \cdot (au) = 0, \quad u^2 = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t).$$

Pour ce champ $X_D = \partial_t + a(t,x) \cdot \partial_x$ et cette fonction u, on a $X_D(u^2) = \delta(t)$ et $2uX_D(u) = 0$, violant (1.2), bien que $X_D(u^2)$ et $2uX_D(u)$ aient tous les deux un sens. De manière essentiellement équivalente, on peut dire que les champs qui vérifient la formule de Leibniz possèdent la propriété d'unicité: si X est L^1_{loc} avec une divergence L^1_{loc} et u, v sont L^∞_{loc} telles que $X(u), X(v)$ soient L^1_{loc}, on doit vérifier

$$X(uv) = uX(v) + vX(u).$$

La vérification de (1.2) (ou bien de la formule précédente) peut être réduite à un problème de commutation de la manière suivante. Si X est un champ L^1_{loc} de divergence nulle et u est une fonction L^∞_{loc} telle que $Xu = 0$, vérifier $X(u^2) = 0$ revient à examiner le crochet de dualité (φ est une fonction test fonction C^1_c, $R_\epsilon u$ est C^1, bornée uniformément en ϵ, convergeant simplement p.p. vers u lorsque ϵ tend vers zero),

$$\langle Xu^2, \varphi\rangle = -\int u^2 X\varphi dx = -\lim_{\epsilon\to 0}\int u\ R_\epsilon u\ X\varphi dx = \lim_{\epsilon\to 0}\langle \overbrace{X(uR_\epsilon u)}^{=uXR_\epsilon u}, \varphi\rangle \ \text{(car } Xu=0, R_\epsilon u\in C^1\text{)}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int \varphi\ u\ XR_\epsilon u\ dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int \varphi\ u\ [X, R_\epsilon]u\ dx.$$

Il suffit donc de démontrer que le commutateur $[X, R_\epsilon]u$ tend vers zero dans L^1_{loc}.

$*$ Si le champ X est $W^{1,1}_{\text{loc}}$, on peut choisir pour R_ϵ n'importe quelle convolution par une fonction C^1_c du type $\rho(x/\epsilon)\epsilon^{-N}$ (d'intégrale 1).

$*$ Si le champ possède des singularités sur des sous-variétés affines, e.g. sur $\{x_1 = 0\}$, cette invariance par translation permet de continuer à choisir pour R_ϵ un opérateur de convolution, mais avec une structure anisotrope qui respecte la géométrie tel

$$\rho\Big(\frac{x_1}{\epsilon_1}, \frac{x_2}{\epsilon_2}\Big)\epsilon_1^{-N_1}\epsilon_2^{-N_2}, \quad 0 < \epsilon_1 \ll \epsilon_2.$$

$*$ Si le champ X possède un simple saut sur une hypersurface courbe, aucun opérateur de convolution ne convient, ce qui est finalement assez naturel, car l'invariance par translation a disparu. En fait, on doit alors chercher un noyau régularisant du type

$$(R_\epsilon u)(x) = \int \rho\big(x, \epsilon^{-1}(x-y)\big)\epsilon^{-N}u(y)dy. \tag{1.3}$$

Finalement, le calcul auquel nous aurons à procéder est bien celui de la commutation d'un opérateur pseudo-differentiel avec une fonction BV. L'approche que nous avons choisie consiste essentiellement à considérer le noyau ρ ci-dessus comme une inconnue et à examiner les contraintes auxquelles ρ doit être soumis pour assurer la commutation recherchée.

Le passage de la propriété (1.2) à l'unicité des solutions faibles pour le champ X est maintenant très standard, et par exemple en prenant $\beta(u) = u^2$, on obtient des solutions positives pour lesquelles on peut appliquer le *lemme 3.1* de [CL2] ou bien le *lemme 2.2* de [LL]. Nous nous abstiendrons donc de rentrer dans ces détails.

Un bref résumé du contenu de cette note. Nous nous fixons ici trois objectifs. Tout d'abord, nous examinons la démonstration du papier [LL] et nous montrons par un argument assez simple de convolution anisotrope que l'on peut se limiter à considérer une condition portant sur la divergence totale du champ considéré, et que la seconde ligne de (1.1) dans le cas $W^{1,1}$ peut être remplacée simplement par $\operatorname{div} X \in L^\infty$.

Secondement nous suivons en partie le papier d'Ambrosio [Am] à la lumière de l'approche esquissée ci-dessus, qui consiste à introduire un régularisateur dont le noyau est une inconnue du problème. Nous verrons en particulier que si X est notre champ de vecteurs BV, la décomposition canonique de sa dérivée, qui est une mesure à valeurs vectorielles, s'exprime comme suit

$$DX = DX^{ac} + DX^s, \quad |DX^{ac}| \ll m, \quad DX^s \perp m \quad (m \text{ est la mesure de Lebesgue sur } \mathbb{R}^N).$$

En utilisant la décomposition polaire de la partie singulière, on obtient $DX^s = M|DX^s|$, où $M(x)$ est une matrice $N \times N$. Un noyau ρ "idéal" devrait satisfaire l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial z}(x, z)M(x)z = 0, \tag{1.4}$$

i.e. une EDP simple dans les variables z, ceci $|DX^s|$-presque partout dans les variables x. De plus, le support de ρ dans les variables z doit être compact. Il est bien entendu nécessaire de clarifier ces contraintes, ne serait-ce que pour des questions de régularité de la fonction ρ. Néanmoins, on peut d'ores et déjà noter que si la matrice M est antisymétrique, il est possible de prendre ρ comme un noyau de convolution (i.e. indépendant de la variable x) dépendant uniquement de $|z|^2$, de sorte que l'équation (1.4) devienne ${}^t zMz = 0$, trivialement satisfaite pour une matrice antisymétrique ; nous retrouvons ici la remarque de l'article de I. Capuzzo Dolcetta et B. Perthame ([CP]), ce qui montre que l'équation (1.4) constitue une contrainte naturelle et déjà établie dans un cadre plus particulier. Par ailleurs, pour que (1.4) possède des solutions à support compact (en z), la matrice $M(x)$ doit satisfaire des conditions spectrales et notamment

$$\text{spectre } M(x) \subset i\mathbb{R},$$

condition satisfaite en particulier par une matrice antisymétrique. Nous verrons que le théorème de G. Alberti implique une condition beaucoup plus précise sur la matrice $M(x)$, qui est nilpotente d'ordre 2.

Notre troisième objectif est de montrer que cette approche constructive permet d'obtenir une généralisation à la régularité BV des résultats de [LL]. Notre résultat fournit aussi une réponse partielle à la *remark 3.8(3)* de [Am]. Dans le cadre (1.1), nous considérons un noyau du type $\rho(x_1, x_2, z_2)$, qui régularise uniquement dans les variables x_2, mais d'une manière qui dépend du point (x_1, x_2). Incidemment, nous avons à régler un autre problème de commutation entre le champ $a_1(x_1)\partial_{x_1}$ de (1.1) et notre régularisateur. Nous suivons la construction du régularisateur et utilisons la désintégration de la mesure $\partial a_2/\partial x_2$.

2. Enoncé des résultats

Nous considérons un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1}_{x_1} \times \mathbb{R}^{N_2}_{x_2}$ du type

$$X = a_1(x_1)\partial_{x_1} + a_2(x_1, x_2)\partial_{x_2}. \tag{2.1}$$

Théorème 2.1. *Soit X un champ de vecteurs du type* (2.1) *tel que*

$$a_1 \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{N_1}), \quad a_2 \in L^1_{\text{loc}}\big(\mathbb{R}^{N_1}, W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{N_2})\big), \tag{2.2}$$

$$\operatorname{div} X \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N). \tag{2.3}$$

Soit w une fonction $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ telle que $Xw \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Alors, pour toute fonction $\beta \in C^1(\mathbb{R})$,

$$X\big(\beta(w)\big) = \beta'(w)Xw. \tag{2.4}$$

La démonstration de ce théorème est donnée dans la première partie de la section 3.

Ce résultat est le point-clé pour l'obtention de l'unicité des solutions bornées pour des équations de transport $\partial_t + X$. Nous renvoyons le lecteur à l'article [LL] pour les énoncés de ces théorèmes d'unicité et remarquons ici simplement que nous pouvons affaiblir les hypothèses *(H3),(H6)* de [LL] en les remplaçant par $\operatorname{div} X \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ (pour la seule propriété de renormalisation comme dans le théorème 2.1, (2.2) et la régularité L^1_{loc} de la divergence suffisent). Bien que cette amélioration soit assez limitée, nous pensons que la preuve, utilisant un noyau anisotrope, n'est pas dénuée d'intérêt, d'autant plus que dans le théorème 2.3 ci-dessous sur la régularité BV, nous revenons à des hypothèses plus fortes sur chacune des divergences des champs a_j. Le théorème suivant est dû à L. Ambrosio ([Am]).

Théorème 2.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, X un champ de vecteur BV_{loc} sur Ω tel que $\operatorname{div} X \in L^1_{\text{loc}}$ et $w \in L^\infty_{\text{loc}}$ telle que $Xw \in L^1_{\text{loc}}$. Alors, pour $\beta \in C^1(\mathbb{R})$,*

$$X\big(\beta(w)\big) = \beta'(w)Xw.$$

Une démonstration de ce résultat, en suivant la méthode indiquée dans l'introduction est donnée dans la seconde partie de la section 3.

Remarque. Rappelons que pour obtenir (2.3) sur l'ouvert Ω, il suffit de le démontrer sur un ouvert $\Omega_0 \subset \Omega$ tel que

$$\mathcal{H}^{N-1}(\Omega \backslash \Omega_0) = 0,$$

pourvu que le champ X et sa divergence soient aussi localement bornés (ici $\mathcal{H}^{N-1}$ désigne la mesure de Hausdorff $N-1$ dimensionnelle). Rappelons également que pour un champ L^1_{loc}, $X = \sum a_j \partial_j$ de divergence L^1_{loc} et $w \in L^\infty_{\text{loc}}$, la distribution Xw est définie par

$$Xw = \sum_{1 \le j \le n} \partial_j(a_j w) - w \operatorname{div} X.$$

Théorème 2.3. *Soit X un champ de vecteurs du type* (2.1) *tel que*

$$a_1 \in BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{N_1}), \quad a_2 \in L^1_{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^{N_1}, BV_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{N_2})\big), \tag{2.5}$$

$$\operatorname{div}_1 a_1 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{N_1}), \quad \operatorname{div}_2 a_2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{N}). \tag{2.6}$$

Soit w une fonction $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ telle que $Xw \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Alors, pour toute fonction $\beta \in C^1(\mathbb{R})$,

$$X\big(\beta(w)\big) = \beta'(w)Xw.$$

La démonstration de ce résultat est donnée dans la section 4.

Remarque. Le lecteur aura noté que nous sommes revenus à une hypothèse portant sur chacune des divergences de a_1 et a_2, contrairement au cas $W^{1,1}$. Il est plausible que (2.3) puisse remplacer (2.6) dans l'énoncé du théorème 2.3, mais les complications techniques reliées à la combinaison des arguments des preuves des théorèmes 2.1 et 2.2 semblent réelles.

De manière analogue au théorème 2.1, on obtient facilement à partir de ce résultat l'unicité des solutions bornées pour des équations de transport $\partial_t + X$. A nouveau, nous renvoyons le lecteur à l'article [LL] pour l'énoncé de ces théorèmes d'unicité, que nous généralisons en remplaçant dans *(H1)* et *(H4)* de [LL] la régularité $W^{1,1}$ par la régularité BV.

Questions 2.4. Bien entendu, tous les champs considérés ici sont réels, i.e. les a_j sont à valeurs réelles. On sait que la pathologie des champs complexes est vaste, même si l'on se limite aux champs non nuls à coefficients C^∞. L'exemple de Hans Lewy est un champ non localement résoluble et celui de Paul Cohen fournit un contre-exemple à l'unicité de Cauchy. On pourra consulter l'article de X. Saint Raymond [Sa] et sa bibliographie pour une étude détaillée des champs complexes réguliers. On connaît maintenant une condition géométrique équivalente à la résolubilité locale pour des champs C^∞ non nuls, c'est la condition (P) de Nirenberg-Treves (voir e.g. [Sa]). Une question de formulation simple mérite l'attention: *un champ lipschitzien satisfaisant la condition (P) est-il localement résoluble ?* Une réponse positive à cette question est donnée par J. Hounie dans son article [Ho], mais dans un cadre utilisant un système particulier de coordonnées. La question de *l'unicité de Cauchy non caractéristique* pour ce type de champ est également pertinente.

3. Démonstration des théorèmes 2.1 et 2.2

Démonstration du théorème 2.1. On choisit un régularisateur $R_{\epsilon_1,\epsilon_2}$ dépendant de deux paramètres positifs, donné simplement dans ce paragraphe par une convolution

$$v_\epsilon(x) = R_{\epsilon_1,\epsilon_2}v(x) = \iint \rho\Big(\frac{x_1-y_1}{\epsilon_1}, \frac{x_2-y_2}{\epsilon_2}\Big)v(y_1,y_2)dy_1dy_2\epsilon_1^{-N_1}\epsilon_2^{-N_2}, \tag{3.1}$$

$$\epsilon_1,\epsilon_2>0, \iint \rho(z_1,z_2)dz_1dz_2 = 1,\ \rho\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}_+),\ \operatorname{supp}\rho\subset\{x\in\mathbb{R}^N, \|x\|\le 1\}.$$

Pour une fonction test $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, on doit examiner, avec X satisfaisant les hypothèses du théorème 2.1, $v \in L^\infty_{\text{comp}}$ et la matrice $N \times N$

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 I_{N_1} & 0 \\ 0 & \epsilon_2 I_{N_2} \end{pmatrix},$$

la quantité

$$\sigma(\epsilon_1, \epsilon_2) = \iint d\rho(z)\epsilon^{-1}\big(X(x) - X(x - \epsilon z)\big)\big(v(x - \epsilon z) - v(x)\big)\varphi(x)\beta'\big(v_\epsilon(x)\big)dxdz.$$

On a avec X satisfaisant les hypothèses du théorème 2.1, en notant

$$\Phi_\epsilon(x, z) = \big(v(x - \epsilon z) - v(x)\big)\varphi(x)\beta'\big(v_\epsilon(x)\big),$$

les identités

$$\begin{aligned}\sigma(\epsilon_1, \epsilon_2) = &\iiint_0^1 \frac{\partial \rho}{\partial z_1}(z) \cdot \frac{\partial a_1}{\partial x_1}(x - \epsilon\theta z) z_1 \Phi_\epsilon(x, z) dxdzd\theta \\ &+ \iiint_0^1 \frac{\partial \rho}{\partial z_2}(z) \cdot \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_1}(x - \epsilon\theta z) z_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}(x - \epsilon\theta z) z_2\right)\Phi_\epsilon(x, z) dxdzd\theta.\end{aligned}$$

On note que

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_1}(x - \epsilon\theta z) d\theta z_1 + \int_0^1 \frac{\partial a_2}{\partial x_2}(x - \epsilon\theta z) d\theta z_2 = -\epsilon_2^{-1}\big(a_2(x - \epsilon z) - a_2(x)\big) \\ &= -\epsilon_2^{-1}\big(a_2(x_1 - \epsilon_1 z_1, x_2 - \epsilon_2 z_2) - a_2(x_1, x_2 - \epsilon_2 z_2)\big) - \epsilon_2^{-1}\big(a_2(x_1, x_2 - \epsilon_2 z_2) - a_2(x_1, x_2)\big) \\ &\quad = -\epsilon_2^{-1}\big(a_2(x_1 - \epsilon_1 z_1, x_2 - \epsilon_2 z_2) - a_2(x_1, x_2 - \epsilon_2 z_2)\big) + \int_0^1 \frac{\partial a_2}{\partial x_2}(x_1, x_2 - \epsilon_2\theta z_2) d\theta z_2\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\sigma(\epsilon_1, \epsilon_2) = &\overbrace{\iiint_0^1 \frac{\partial \rho}{\partial z_1}(z) \cdot \frac{\partial a_1}{\partial x_1}(x - \epsilon\theta z) z_1 \Phi_\epsilon(x, z) dxdzd\theta}^{\sigma_1(\epsilon_1,\epsilon_2)} \\ &- \epsilon_2^{-1}\iint \frac{\partial \rho}{\partial z_2}(z) \cdot \Big(a_2(x_1 - \epsilon_1 z_1, x_2 - \epsilon_2 z_2) - a_2(x_1, x_2 - \epsilon_2 z_2)\Big)\Phi_\epsilon(x, z) dxdz \\ &+ \underbrace{\iiint_0^1 \frac{\partial \rho}{\partial z_2}(z) \cdot \frac{\partial a_2}{\partial x_2}(x_1, x_2 - \epsilon_2\theta z_2) z_2 \Phi_\epsilon(x, z) dxdzd\theta.}_{\sigma_3(\epsilon_1,\epsilon_2)}\end{aligned}$$

Comme nous avons supposé que $\partial a_1/\partial x_1, \partial a_2/\partial x_2$ appartiennent à L^1_{loc}, on obtient du Lemme 5.1 que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\sigma_1(\epsilon_1, \epsilon_2) = \lim_{\epsilon\to 0}\sigma_3(\epsilon_1, \epsilon_2) = 0.$$

Il nous reste à examiner

$$\sigma_2(\epsilon_1,\epsilon_2) = -\epsilon_2^{-1}\iint \frac{\partial\rho}{\partial z_2}(z)\cdot\Big(a_2(x_1-\epsilon_1 z_1, x_2-\epsilon_2 z_2) - a_2(x_1, x_2-\epsilon_2 z_2)\Big)\Phi_\epsilon(x,z)dxdz.$$

On a pour $0<\epsilon_2\le 1$, $C_0=\sup_{|s|\le\|v\|_{L^\infty}}|\beta'(s)|$,

$$\begin{aligned}
&|\sigma_2(\epsilon_1,\epsilon_2)|\le\\
&\le \epsilon_2^{-1}\iiint\left|\frac{\partial\rho}{\partial z_2}(z)\right||a_2(x_1-\epsilon_1 z_1,x_2)-a_2(x_1,x_2)||\varphi(x_1,x_2+\epsilon_2 z_2)|dx_1dx_2dz2\,\|v\|_{L^\infty}C_0\\
&\le \iiint\left|\frac{\partial\rho}{\partial z_2}(z)\right||a_2(x_1-\epsilon_1 z_1,x_2)-a_2(x_1,x_2)|\mathbf{1}(\|x-\operatorname{supp}\varphi\|\le 1)dxdz2\,\|\varphi\|_{L^\infty}\|v\|_{L^\infty}C_0\epsilon_2^{-1}\\
&\qquad\qquad= \theta(\epsilon_1)\epsilon_2^{-1}\le\frac{\theta(\epsilon_1)+\epsilon_1}{\epsilon_2},
\end{aligned}$$

où $\theta(\epsilon_1)\ge 0$ et $\lim_{\epsilon_1\to 0}\theta(\epsilon_1)=0$ (car $a_2\in L^1_{\text{loc}}$). Il suffit alors de choisir, pour $\eta>0$ donné

$$\epsilon_1=\eta,\quad \epsilon_2=\big(\theta(\eta)+\eta\big)^{1/2}$$

et l'on trouve

$$\lim_{\eta\to 0_+}\sigma(\epsilon_1,\epsilon_2)=0$$

ce qui est le résultat cherché et achève la démonstration du théorème 3.1.

Remarques. On peut penser a priori que $\theta(\eta)$ tend vers 0 très lentement avec η (en particulier $\eta\ll\theta(\eta)$) et donc que $\theta(\eta)+\eta\sim\theta(\eta)$ au voisinage de 0 et donc $\epsilon_2\sim\theta(\eta)^{1/2}$, ce qui donne $0<\epsilon_1\ll\epsilon_2$. L'anisotropie du régularisateur est naturellement issue de la très faible régularité en x_1 de a_2. Le lecteur vérifiera aisément que l'hypothèse $\partial a_1/\partial x_2\equiv 0$ est cruciale pour notre argumentaire : sans cette hypothèse, nous verrions apparaître dans la discussion ci-dessus un terme

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_2}$$

dont nous ne saurions nous débarrasser. Dans une veine voisine, il est tentant de faire tendre d'abord ϵ_1 vers 0, c'est à dire de régulariser uniquement dans les variables x_2, et c'est d'ailleurs la méthode utilisée dans [LL] ; si l'on argumente de cette manière, on a besoin d'une hypothèse sur chacune des divergences de a_1, a_2. Nous remarquons ici que l'on peut éviter ce type d'hypothèse, au prix d'une anisotropie dans le choix du régularisateur. On verra plus bas, que dans le cas du théorème 2.3, ce type d'approche n'est pas inenvisageable, mais se heurte à plusieurs complications techniques qui nous ont paru excessives.

Démonstration du théorème 2.2. On doit vérifier que pour toute fonction test $\varphi\in C^1_c(\Omega)$,

$$\int\beta(w)\big(X\varphi+\varphi\operatorname{div}X\big)dm+\int\beta'(w)(Xw)\varphi dm=0, \tag{3.2}$$

où dm est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$. Soit $\chi \in C_c^1(\Omega)$ égale à 1 sur le support de φ. Alors pour $x \in \operatorname{supp}\varphi$, $\beta\big(w(x)\big) = \beta\big(\chi(x)w(x)\big)$, de sorte que nous devons vérifier

$$-\int \beta(\chi w)\big(X\varphi + \varphi \operatorname{div} X\big)dm = \int \beta'(\chi w)\big(X(\chi w)\big)\varphi dm. \tag{3.3}$$

D'après les hypothèses du théorème 2.2, on a

$$v = \chi w \in L^\infty_{\text{comp}}, \quad Xv = wX\chi + \chi Xw \in L^1_{\text{comp}},$$

et on peut utiliser un régularisateur du type de celui du lemme 5.2 pour écrire

$$\begin{aligned}
-\int \beta(v)\big(X\varphi + \varphi \operatorname{div} X\big)dm &= -\lim_{\epsilon\to 0}\int \beta\big(R_\epsilon v\big)\big(X\varphi + \varphi \operatorname{div} X\big)dm \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int \beta'\big(R_\epsilon v\big)\big(X(R_\epsilon v) - R_\epsilon(Xv)\big)\varphi dm + \int \beta'\big(R_\epsilon v\big)R_\epsilon(Xv)\varphi dm\right\}.
\end{aligned}$$

Le lemme 5.2 montre que $R_\epsilon(Xv)$ converge vers Xv dans L^1 et comme $R_\epsilon v$ est borné indépendamment de ϵ, et converge p.p. vers v, il nous suffit de démontrer

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int \varphi\beta'\big(R_\epsilon v\big)[X, R_\epsilon]v dm = 0.$$

Du lemme 5.3, il vient

$$\int \varphi\beta'\big(R_\epsilon v\big)[X, R_\epsilon]v dm = \int \varphi\beta'\big(R_\epsilon v\big)T_{\epsilon,\rho}v dm + \int \overbrace{\beta'\big(R_\epsilon v\big)}^{\text{borné}}\ \overbrace{\varphi N_\epsilon v}^{\substack{\to 0 \\ \text{dans } L^1}}\ dm,$$

de sorte qu'il suffit d'obtenir

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int \varphi\beta'\big(R_\epsilon v\big)T_{\epsilon,\rho}v dm = 0, \tag{3.4}$$

i.e. en utilisant (5.3)

$$\lim_{\epsilon\to 0}\iint \partial_2\rho(x,z)\epsilon^{-1}\big(X(x) - X(x-\epsilon z)\big)\big(v(x-\epsilon z) - v(x)\big)\varphi(x)\beta'\big((R_\epsilon v)(x)\big)dxdz = 0.$$

Si $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions C_c^1 qui converge p.p. vers la fonction L^∞_{comp} v de sorte que $\|v_k\|_{L^\infty} \le \|v\|_{L^\infty}$, on pose

$$\begin{aligned}
\omega(\epsilon, k) &= \iint \partial_2\rho(x,z)\epsilon^{-1}\big(X(x) - X(x-\epsilon z)\big)\big(v_k(x-\epsilon z) - v_k(x)\big)\varphi(x)\beta'\big((R_\epsilon v)(x)\big)dxdz \\
&= \iiint_0^1 \partial_2\rho(x,z)DX(x-\epsilon\theta z)z\big(v_k(x-\epsilon z) - v_k(x)\big)\varphi(x)\beta'\big((R_\epsilon v)(x)\big)dxdzd\theta,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

ce qui a un sens comme crochet de dualité car la dérivée au sens des distributions DX est d'ordre ≤ 1. On doit démontrer

$$\lim_{\epsilon\to 0}\bigl(\lim_{k\to\infty}\omega(\epsilon,k)\bigr)=0. \tag{3.6}$$

Jusqu'à présent, nous avons simplement utilisé que X et $\operatorname{div} X$ appartiennent à $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Notre hypothèse sur X implique que DX est une mesure de Radon. On considère la décomposition canonique de cette mesure

$$DX = DX^a + DX^s, \quad |DX^a| \ll m, \quad |DX^s| \perp m,$$

où m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$. On remarque qu'en définissant

$$\omega_0(\epsilon,k)=\iiint_0^1 \partial_2\rho(x,z)DX^a(x-\epsilon\theta z)z\bigl(v_k(x-\epsilon z)-v_k(x)\bigr)\varphi(x)\beta'\bigl((R_\epsilon v)(x)\bigr)dxdzd\theta,$$

on obtient avec

$$C_0=\sup_{|s|\leq\|v\|_{L^\infty}}|\beta'(s)|, \tag{3.7}$$

utilisant $DX^a\in L^1$,

$$\limsup_{k\to\infty}|\omega_0(\epsilon,k)|\leq C_0\iiint_0^1 |DX^a(x-\epsilon\theta z)||(\tau_{\epsilon z}v-v)(x)||\varphi(x)|dx|z|\rho_0(z)dzd\theta$$

et le lemme 5.1 donne (3.6) pour ω_0. Nous devons traiter le crochet de dualité

$$\omega_1(\epsilon,k)=$$
$$\iiint_0^1\partial_2\rho(x+\epsilon\theta z,z)DX^s(x)z\bigl(\tau_{\epsilon z-\epsilon\theta z}v_k-\tau_{-\epsilon\theta z}v_k\bigr)(x)\tau_{-\epsilon\theta z}\varphi(x)\beta'\bigl((\tau_{-\epsilon\theta z}R_\epsilon v)(x)\bigr)dxdzd\theta,$$

de sorte qu'en utilisant la décomposition polaire de la mesure $DX^s = M|DX^s|$ avec la notation $\mu=|DX^s|$, on obtient

$$\omega_1(\epsilon,k)=\iiint_0^1 \partial_2\rho(x+\epsilon\theta z,z)M(x)z\bigl(\tau_{\epsilon z-\epsilon\theta z}v_k-\tau_{-\epsilon\theta z}v_k\bigr)(x)(\tau_{-\epsilon\theta z}\varphi)(x)$$
$$\beta'\bigl((\tau_{-\epsilon\theta z}R_\epsilon v)(x)\bigr)d\mu(x)dzd\theta.$$

En remarquant que $\sup_{k,x}|v_k(x)|\leq\|v\|_{L^\infty}$ et que la mesure μ est positive, on obtient

$$|\omega_1(\epsilon,k)|\leq C_0 2\,\|v\|_{L^\infty}\iiint_0^1 |\partial_2\rho(x+\epsilon\theta z,z)M(x)z||\varphi(x+\epsilon\theta z)|d\mu(x)\mathbf{1}_{\operatorname{supp}\rho_0}(z)dzd\theta.$$

Comme $\partial_2\rho$ and φ sont des fonctions continues, $|M(x)| \leq 1$, μ-p.p., le théorème de convergence dominée pour la mesure $d\mu dz d\theta$ donne

$$\limsup_{\epsilon\to 0}\big(\sup_k |\omega_1(\epsilon,k)|\big) \leq C_0 2\left\|v\right\|_{L^\infty} \iint |\partial_2\rho(x,z)M(x)z||\varphi(x)|d\mu(x)dz. \tag{3.8}$$

Nous arrivons maintenant au point-clé de notre démonstration qui consiste à choisir le régularisateur ρ de telle sorte que l'intégrale en z du produit scalaire $\partial_2\rho \cdot Mz$ dans (3.8) soit petite. Considérons la fonction

$$\rho(x,z) = F_0\big(U(x)z\big)|\det U(x)| \tag{3.9}$$

où, avec la notation $\mathbb{M}_N(\mathbb{R})$ pour les matrices $N\times N$, et C_b^1 pour les fonctions C^1 bornées ainsi que leurs dérivées premières,

$$U \in C_b^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{M}_N(\mathbb{R})), \quad {}^tU(x)U(x) \geq \mathrm{Id}, \tag{3.10}$$

et $F_0 \in C_c^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}_+)$, $\int F_0(\zeta)d\zeta = 1$. Notons que la fonction ρ donnée par (3.9) satisfait les hypothèses du lemme 5.2; pour vérifier (5.1), nous supposons $\operatorname{supp} F_0 \subset B(0,r_0)$ et nous obtenons, comme $|z| \leq |U(x)z|$,

$$\sup_x \rho(x,z) \leq \sup|F_0| \mathbf{1}_{B(0,r_0)}(z)\left\|\det U\right\|_{L^\infty}.$$

Des estimations analogues sont vérifiées pour $\sup_x |d_{x,z}\rho(x,z)|$. On obtient

$$\begin{aligned}\iint &|\partial_2\rho(x,z)M(x)z||\varphi(x)|d\mu(x)dz\\ &= \iint |F_0'(U(x)z)U(x)M(x)z||\det U(x)||\varphi(x)|d\mu(x)dz\\ &\qquad\leq \int \|U(x)M(x)U(x)^{-1}\||\varphi(x)|d\mu(x)\int |F_0'(\zeta)||\zeta|d\zeta,\end{aligned}$$

de sorte que de (3.8) nous devons seulement démontrer

$$0 = \inf_{\substack{U\\ \text{satisfying (3.10)}}} \int \|U(x)M(x)U(x)^{-1}\||\varphi(x)|d\mu(x). \tag{3.11}$$

On peut simplifier encore cette condition en éliminant les propriétés de continuité de U, U' requises dans (3.10). Tout d'abord (3.11) est une conséquence de

$$0 = \inf_{V\in C_c^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{M}_N(\mathbb{R}))} \int \|\big(\mathrm{Id} + {}^tV(x)V(x)\big)M(x)\big(\mathrm{Id}+{}^tV(x)V(x)\big)^{-1}\||\varphi(x)|d\mu(x), \tag{3.12}$$

car la matrice $U(x) = \mathrm{Id} + {}^tV(x)V(x)$ vérifie (3.10) pour $V \in C_c^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{M}_N(\mathbb{R}))$. Nous prétendons maintenant qu'il suffit d'obtenir

$$0 = \inf_{V \in L^\infty(|\varphi| d\mu)} \int \| \big(\mathrm{Id} + {}^tV(x)V(x)\big) M(x) \big(\mathrm{Id} + {}^tV(x)V(x)\big)^{-1} \| |\varphi(x)| d\mu(x). \tag{3.13}$$

Pour cela considérons $V \in L^\infty(|\varphi| d\mu)$; comme $|\varphi| d\mu$ est une mesure de Radon finie sur $\mathbb{R}^N$, on peut trouver une suite $(V_l) \in C_c^0(\mathbb{R}^N; \mathbb{M}_N(\mathbb{R}))$ convergeant vers V dans $L^1(|\varphi| d\mu)$ avec

$$\sup_x \|V_l(x)\| \leq \|V\|_{L^\infty(|\varphi| d\mu)} .$$

Comme on peut régulariser les matrices V_l par un noyau standard de convolution, on peut supposer qu'elles appartiennent à $C_c^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{M}_N(\mathbb{R}))$ et, extrayant une sous-suite, on peut aussi supposer qu'elles convergent simplement $|\varphi| d\mu$-p.p. vers V. On peut noter que $|\varphi| d\mu$-p.p.,

$$\| \big(\mathrm{Id} + {}^tV_l(x)V_l(x)\big) M(x) \big(\mathrm{Id} + {}^tV_l(x)V_l(x)\big)^{-1} \| \leq \| \mathrm{Id} + {}^tV_l(x)V_l(x) \| \leq 1 + \|V\|^2_{L^\infty(|\varphi| d\mu)} ,$$

de sorte que le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour la mesure de masse finie $|\varphi| d\mu$ donne

$$\begin{aligned} \lim_{l \to +\infty} \int \| \big(\mathrm{Id} + {}^tV_l(x)V_l(x)\big) M(x) \big(\mathrm{Id} + {}^tV_l(x)V_l(x)\big)^{-1} \| |\varphi(x)| d\mu(x) \\ = \int \| \big(\mathrm{Id} + {}^tV(x)V(x)\big) M(x) \big(\mathrm{Id} + {}^tV(x)V(x)\big)^{-1} \| |\varphi(x)| d\mu(x). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Par suite l'infimum dans le membre de droite de (3.13), a priori plus petit que le membre de droite de (3.12) est en fait le même, ce que nous voulions obtenir. Nous n'avons donc plus qu'à démontrer (3.13). Notre argument repose sur le

Theorem 3.1 (Théorème de rang 1 de G. Alberti [Al]**).** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $a \in BV(\Omega, \mathbb{R}^{N'})$ et soit $Da = M|Da|$ la décomposition polaire de sa dérivée. Alors $M(x)$ est de rang 1, i.e.*

$$M(x) = \xi(x) \otimes \eta(x), \quad |D^s a| \text{ presque partout.}$$

Le produit $\xi \otimes \eta$ est l'application linéaire définie par $\langle \xi, T \rangle \eta$ et si a est un champ de vecteurs sur Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^N, N' = N$), la divergence de a est $\langle \xi, \eta \rangle |Da|$. L'absolue continuité de la divergence par rapport à la mesure de Lebesgue équivaut à l'orthogonalité des vecteurs unitaires ξ, η, $|D^s a|$ presque partout. On applique ce théorème à la mesure $DX^s = M|DX^s|, \mu = |DX^s|$, et on utilise la notation $M = \xi \otimes \eta$, μ-p.p. On choisit alors la matrice $L^\infty(\mu)$ $V(x) = \gamma^{1/2} M(x)$, où $\gamma \geq 0$, et l'on remarque (lemme 5.4),

$$\| \big(\mathrm{Id} + {}^tV(x)V(x)\big) M(x) \big(\mathrm{Id} + {}^tV(x)V(x)\big)^{-1} \| \leq (1 + \gamma)^{-1}. \tag{3.15}$$

Comme γ est un nombre positif arbitraire et $|\varphi|d\mu$ est finie, on obtient (3.13) et le théorème 3.1.

Remarque 3.2. Notre démonstration semble indiquer que la précision de l'information donnée par le théorème de G. Alberti n'est pas nécessaire. Par exemple dans [CL2], l'argument important est que la matrice M soit triangulaire avec des zéros sur la diagonale. On pourra consulter également la *remark 3.7* de [Am] . L'analyse développée plus haut montre que pour x fixé, on souhaite obtenir une solution $\rho(x,z)$ à support compact en z de l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial z}(x,z)M(x)z = 0. \tag{3.16}$$

C'est un champ de vecteurs à coefficients linéaires en z (avec des paramètres x),

$$\sum_{1\le j\le N}\Big(\sum_{1\le k\le N} M_{kj}(x)z_j\Big)\frac{\partial \rho}{\partial z_k}(x,z) = 0.$$

La condition spectre$(M(x)) \subset i\mathbb{R}$ est donc nécessaire pour obtenir une solution à support compact.

4. Démonstration du théorème 2.3

Pour simplifier notre discussion, nous prouverons seulement que si $w \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ vérifie $Xw = 0$, alors $X(w^2) = 0$. Egalement nous supposerons que les deux divergences dans (2.6) sont nulles. Soit $\rho \in C^1(\mathbb{R}^{N_1}_{x_1} \times \mathbb{R}^{N_2}_{x_2} \times \mathbb{R}^{N_2}_{z_2}; \mathbb{R}_+)$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^{N_2}} \rho(x_1,x_2,z_2)dz_2 = 1, \tag{4.1}$$

$$\sup_{x_1,x_2}\big(|\rho(x_1,x_2,z_2)| + |d_{x_1,x_2,z_2}\rho(x_1,x_2,z_2)|\big) = \rho_0(z_2) \in L^\infty_{\mathrm{comp}}. \tag{4.2}$$

On définit pour $\epsilon > 0$ l'opérateur R_ϵ par

$$(R_\epsilon u)(x_1,x_2) = \int_{\mathbb{R}^{N_2}} \rho\big(x_1,x_2,\epsilon^{-1}(x_2-y_2)\big)\epsilon^{-N_2}u(x_1,y_2)dy_2. \tag{4.3}$$

On doit d'abord commuter R_ϵ avec $X_1 = a_1(x_1)\partial_{x_1}$.

Lemme 4.1. *Soit X_1, R_ϵ, w comme ci-dessus. Alors $X_1R_\epsilon w$ et $R_\epsilon X_1 w$ appartiennent à L^1_{loc} et $\lim_{\epsilon\to 0_+}[X_1,R_\epsilon]w = 0$ dans L^1_{loc}.*

Démonstration. Comme ρ est C^1 et X_1 est à divergence nulle, on a

$$
\begin{aligned}
X_1 R_\epsilon w &= \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \int a_1(x_1)\rho\big(x_1, x_2, \epsilon^{-1}(x_2 - y_2)\big)\epsilon^{-N_2} w(x_1, y_2) dy_2 \\
&= \int a_1(x_1) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_1}\big(x_1, x_2, \epsilon^{-1}(x_2 - y_2)\big)\epsilon^{-N_2} w(x_1, y_2) dy_2 \\
&\quad + \int \rho\big(x_1, x_2, \epsilon^{-1}(x_2 - y_2)\big)\epsilon^{-N_2} \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \big(a_1(x_1) w(x_1, y_2)\big) dy_2 \\
&= \int a_1(x_1) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_1}\big(x_1, x_2, z_2\big)\big(w(x_1, x_2 - \epsilon z_2) - w(x_1, x_2)\big) dz_2 \\
&\quad + a_1(x_1) \cdot \underbrace{\int \frac{\partial \rho}{\partial x_1}(x_1, x_2, z_2) dz_2}_{=0 \text{ from (4.1)}} w(x_1, x_2) + R_\epsilon X_1 w,
\end{aligned}
$$

ce qui donne $[X_1, R_\epsilon]w \in L^1_{\text{loc}}$ et du lemme 5.1 on obtient $\lim_{\epsilon \to 0}[X_1, R_\epsilon]w = 0$ dans L^1_{loc}. De plus, comme ρ est de classe C^1 et que l'on a $Xw = 0$, on obtient, avec la notation $X = X_1 + X_2$,

$$
\begin{aligned}
R_\epsilon X_1 w = -R_\epsilon X_2 w &= -\int \rho\big(x_1, x_2, \epsilon^{-1}(x_2 - y_2)\big)\epsilon^{-N_2}(\partial_2 \cdot a_2 w)(x_1, y_2) dy_2 \\
&= -\int \frac{\partial \rho}{\partial z_2}\big(x_1, x_2, \epsilon^{-1}(x_2 - y_2)\big)\epsilon^{-N_2 - 1} \cdot (a_2 w)(x_1, y_2) dy_2
\end{aligned}
$$

qui appartient à L^1_{loc}, ce qui donne le lemme. $\square$

En utilisant le théorème 2.2 et le lemme 4.1 (X_1 est leibnizien, $R_\epsilon w \in L^\infty_{\text{loc}}$, $X_1 R_\epsilon w \in L^1_{\text{loc}}$)

$$
X\big((R_\epsilon w)^2\big) = X_1\big((R_\epsilon w)^2\big) + X_2\big((R_\epsilon w)^2\big) = 2(R_\epsilon w)(X_1 R_\epsilon w) + X_2\big((R_\epsilon w)^2\big).
$$

La fonction R_ϵ est C^1 par rapport à x_2, et la formule de Leibniz standard donne

$$
X_2\big((R_\epsilon w)^2\big) = 2(R_\epsilon w)(X_2 R_\epsilon w).
$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
X\big((R_\epsilon w)^2\big) &= 2(R_\epsilon w)([X_1, R_\epsilon]w) + 2(R_\epsilon w)(R_\epsilon X_1 w) + 2(R_\epsilon w)([X_2, R_\epsilon]w) + 2(R_\epsilon w) R_\epsilon X_2 w \\
&= 2(R_\epsilon w)([X_1, R_\epsilon]w) + 2(R_\epsilon w)(R_\epsilon X w) + 2(R_\epsilon w)([X_2, R_\epsilon]w)
\end{aligned}
$$

ce qui donne, car $Xw = 0$,

$$
X\big((R_\epsilon w)^2\big) = 2(R_\epsilon w)([X_1, R_\epsilon]w) + 2(R_\epsilon w)([X_2, R_\epsilon]w). \tag{4.4}
$$

Comme le terme $[X_1, R_\epsilon]w$ tend vers zero dans $L^1_{\rm loc}$ d'après le lemme 4.1 et que la fonction $R_\epsilon w$ est uniformément bornée d'après le lemme 5.2, on doit seulement examiner le crochet $[X_2, R_\epsilon]w$. Rappelons que avec $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned}\langle (X_1+X_2)(w^2), \varphi\rangle_{\mathcal{D}'^{(1)}, C^1_c} &= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}(R_\epsilon w)^2(X\varphi)dm \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} X\big((R_\epsilon w)^2\big)\varphi dm = 2\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}(R_\epsilon w)([X_2,R_\epsilon]w)\varphi dm.\end{aligned}$$

On doit seulement démontrer que le dernier terme ci-dessus est 0. On définit

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}(\epsilon) &= \int_{\mathbb{R}^N}(R_\epsilon w)([X_2,R_\epsilon]w)\varphi dm = \\ &= \iiint (R_\epsilon w)(x_1,x_2)\varphi(x_1,x_2)\frac{\partial\rho}{\partial z_2}(x_1,x_2,z_2)\epsilon^{-1}\big(X_2(x_1,x_2)-X_2(x_1,x_2-\epsilon z_2)\big) \\ &\qquad \big(w(x_1,x_2-\epsilon z_2)-w(x_1,x_2)\big)dx_2dz_2dx_1.\end{aligned}$$

On considère une suite de fonctions continues w_k bornées par $\|w\|_{L^\infty}$ convergeant simplement p.p. vers w et on définit

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}(\epsilon,k) &= \iiint (R_\epsilon w)(x_1,x_2)\varphi(x_1,x_2)\frac{\partial\rho}{\partial z_2}(x_1,x_2,z_2)\epsilon^{-1}\big(X_2(x_1,x_2)-X_2(x_1,x_2-\epsilon z_2)\big) \\ &\qquad \big(w_k(x_1,x_2-\epsilon z_2)-w_k(x_1,x_2)\big)dx_1dx_2dz_2.\end{aligned}$$

On doit prouver que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\big(\lim_{k\to\infty}\widetilde{\omega}(\epsilon,k)\big) = 0. \tag{4.5}$$

On a

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}(\epsilon,k) &= \int_0^1\iiint (R_\epsilon w)(x_1,x_2)\varphi(x_1,x_2)\frac{\partial\rho}{\partial z_2}(x_1,x_2,z_2)\frac{\partial a_2}{\partial x_2}(x_1,x_2-\epsilon\theta z_2)z_2 \\ &\qquad \big(w_k(x_1,x_2-\epsilon z_2)-w_k(x_1,x_2)\big)d\theta dx_1dx_2dz_2 \\ &= \int_0^1\iiint (R_\epsilon w)(x_1,x_2+\epsilon\theta z_2)\varphi(x_1,x_2+\epsilon\theta z_2)\frac{\partial\rho}{\partial z_2}(x_1,x_2+\epsilon\theta z_2,z_2)\frac{\partial a_2}{\partial x_2}(x_1,x_2)z_2 \\ &\qquad \big(w_k(x_1,x_2+\epsilon\theta z_2-\epsilon z_2)-w_k(x_1,x_2+\epsilon\theta z_2)\big)d\theta dx_1dx_2dz_2.\end{aligned}$$

De notre hypothèse $L^1(\mathbb{R}^N)$ sur la fonction a_2, (que nous ferons globalement pour simplifier) il vient que pour m_{N_1}-p.t. x_1 dans $\mathbb{R}^{N_1}$, la fonction $\mathbb{R}^{N_2}\ni x_2\mapsto a_2(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^{N_2}$ est dans $BV(\mathbb{R}^{N_2})$ avec une divergence L^1 et

$$\int\Big[\|a_2(x_1,\cdot)\|_{BV(\mathbb{R}^{N_2})}+\|\operatorname{div} a_2(x_1,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^{N_2})}\Big]dx_1<\infty. \tag{4.6}$$

Par conséquent, de la décomposition canonique de $D_2a_2(x_1,\cdot)$, la décomposition polaire de $D_2a_2(x_1,\cdot)^s$, et du théorème 3.1 et du lemme 5.4, il vient que m_{N_1}-p.p. en x_1 dans $\mathbb{R}^{N_1}$,

$$D_2a_2(x_1,\cdot) = (D_2a_2(x_1,\cdot))^{ac} + (D_2a_2(x_1,\cdot))^s, \tag{4.7}$$

$$(D_2a_2(x_1,\cdot))^s = M_{x_1}(x_2)\mu_{x_1}(x_2),\ \mu_{x_1} = |\,(D_2a_2(x_1,\cdot))^s\,| \tag{4.8}$$

et

$$\|\big(\mathrm{Id} + \gamma^t M_{x_1}(x_2)M_{x_1}(x_2)\big)M_{x_1}(x_2)\big(\mathrm{Id} + \gamma^t M_{x_1}(x_2)M_{x_1}(x_2)\big)^{-1}\| \leq (1+\gamma)^{-1}, \tag{4.9}$$

avec

$$\int_{\mathbb{R}^{N_1}} \Big[\|D_2a_2(x_1,\cdot)^{ac}\|_{L^1(\mathbb{R}^{N_2})} + \|D_2a_2(x_1,\cdot)^s\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^{N_2})}\Big] dx_1 < \infty. \tag{4.10}$$

En particulier en définissant $k_{x_1}(x_2) = (D_2a_2(x_1,\cdot))^{ac}$ on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}^{N_1}} \|k_{x_1}\|_{L^1(\mathbb{R}^{N_2})}\, dx_1 < \infty$$

et donc la fonction $(x_1,x_2) \mapsto k_{x_1}(x_2)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. Rappelons maintenant (voir e.g. *theorem 2.28* dans [AFP])

Lemme 4.3 (désintégration de la mesure $\partial a_2/\partial x_2$). *Soit N, N_1, N_2 comme ci-dessus et $a_2 \in L^1\big(\mathbb{R}^{N_1}_{x_1}; BV(\mathbb{R}^{N_2}_{x_2})\big)$. On note par π_1 the projection $\mathbb{R}^{N_1}\times\mathbb{R}^{N_2} \to \mathbb{R}^{N_1}$, par ν la mesure $\partial a_2/\partial x_2$ et on pose $\lambda = \pi_{1*}(|\nu|)$. Notre hypothèse implique que $|\nu|(\mathbb{R}^N) < \infty$. le théorème de désintégration implique que*

$$\nu = \lambda \otimes \nu_{x_1}$$

où pour λ-p.t. $x_1 \in \mathbb{R}^{N_1}$, la $\mathbb{M}_{N_2}$ mesure ν_{x_1} est telle que

$$|\nu_{x_1}|(\mathbb{R}^{N_2}) = 1.$$

Cela signifie que pour $F(x_1,x_2) \in L^1(\mathbb{R}^N, d\nu)$, on a, pour λ-p.t. $x_1 \in \mathbb{R}^{N_1}$, $F(x_1,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^{N_2}, d|\nu_{x_1}|)$, $x_1 \mapsto \int_{\mathbb{R}^{N_2}} F(x_1,x_2)d\nu_{x_1}(x_2)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^{N_1}, d\lambda)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^{N_1}\times\mathbb{R}^{N_2}} F(x_1,x_2)d\nu(x_1,x_2) = \int_{\mathbb{R}^{N_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{N_2}} F(x_1,x_2)d\nu_{x_1}(x_2)\right) d\lambda(x_1).$$

La mesure λ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue : soit A un borélien de $\mathbb{R}^{N_1}$ de mesure de Lebesgue nulle. De (4.6) il vient

$$\lambda(A) = |\nu|(A\times\mathbb{R}^{N_2}) \leq \int_A \underbrace{\||D_2a_2|(x_1,\cdot)\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^{N_2})}}_{\in L^1(\mathbb{R}^{N_1})} dx_1 = 0.$$

On obtient donc que, avec $h \in L^1(\mathbb{R}^{N_1})$, $\nu = \lambda \otimes \nu_{x_1} = h m_{N_1} \otimes \nu_{x_1}$, et donc les formules de désintégration

$$\frac{\partial a_2}{\partial x_2} = \nu = m_{N_1} \otimes h(x_1)\nu_{x_1} = m_{N_1} \otimes M_{x_1}\mu_{x_1} + L^1(\mathbb{R}^N). \tag{4.11}$$

En fait pour $F \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$, on a avec les notations (4.7–10)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{N_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{N_2}} F(x_1,x_2) M_{x_1}(x_2) d\mu_{x_1}(x_2) \right) dx_1 + \int_{\mathbb{R}^{N_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{N_2}} F(x_1,x_2) k_{x_1}(x_2) dx_2 \right) dx_1 \\ = \int_{\mathbb{R}^{N_1}\times\mathbb{R}^{N_2}} F(x_1,x_2) d\nu(x_1,x_2) \\ = \int_{\mathbb{R}^{N_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{N_2}} F(x_1,x_2) d\nu_{x_1}(x_2) \right) h(x_1) dx_1.\end{aligned}$$

Le terme de $L^1(\mathbb{R}^N)$ in (4.11) se traite comme DX^a dans la section 3 et le même méthode avec (4.11) donne

$$\begin{aligned}&\limsup_{\epsilon\to 0} \widetilde{\omega}(\epsilon) \\ &\quad \le 2 \|w\|_{L^\infty}^2 \iint \left(\int |\varphi(x_1,x_2)| \left| \frac{\partial \rho}{\partial z_2}(x_1,x_2,z_2) M_{x_1}(x_2) z_2 \right| d\mu_{x_1}(x_2) \right) dz_2 dx_1.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Examinons les arguments de la section 3, entre (3.9) et (3.15). On considère une fonction

$$\rho(x_1,x_2,z_2) = F_0(U(x_1,x_2)z_2) |\det U(x_1,x_2)| \tag{4.13}$$

où $U \in C_b^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{M}_{N_2}(\mathbb{R}))$ est telle que ${}^tU(x)U(x) \ge \mathrm{Id}$, et $F_0 \in C_c^1(\mathbb{R}^{N_2}; \mathbb{R}_+)$ vérifie $\int_{\mathbb{R}^{N_2}} F_0(\zeta) d\zeta = 1$. On aimerait choisir

$$U(x) = \mathrm{Id} + \gamma^t M_{x_1}(x_2) M_{x_1}(x_2),$$

mais, comme dans la section 3, ce n'est pas directement possible car cette fonction n'est pas assez régulière. Les matrices $M_{x_1}(x_2)$ ont une norme ≤ 1. Pour tout x_1, on peut trouver une suite $(V_{x_1,l}(x_2))_{l\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $C_b^1(\mathbb{R}^{N_2})$ convergeant simplement vesr la matrice bornée $M_{x_1}(x_2)$. On peut aussi régulariser ces matrices par rapport à x_1 par une convolution, ce qui suffira car l'intégrale dans les variables x_1, z_2 se fait sur un compact fixe. On peut conclure comme dans la section 3 en utilisant (4.9).

5. Appendice

Lemme 5.1. *Soit $a \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Alors on a*

$$\lim_{t\to 0} \int |a(x)||v(x+t) - v(x)| dx = 0.$$

La démonstration est un simple exercice traité dans le lemme 5.1 de [CL2].

Lemme 5.2. *Soit* $\rho \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+)$ *tel que* $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x,z)dz = 1$ *et*

$$\rho_0(z) = \sup_x |\rho(x,z)| + \sup_x |d_{x,z}\rho(x,z)| \in L^\infty_{\text{comp}}. \tag{5.1}$$

Pour $\epsilon > 0$, *on considère l'opérateur* R_ϵ *de noyau* $\rho\big(x, \epsilon^{-1}(x-y)\big)\epsilon^{-N}$, *tel que pour* $u \in L^1_{\text{loc}}$,

$$(R_\epsilon u)(x) = \int \rho\big(x, \epsilon^{-1}(x-y)\big)\epsilon^{-N} u(y)dy. \tag{5.2}$$

Soit $1 \leq p < +\infty$ *et* $u \in L^p$; *alors* $\lim_{\epsilon\to 0} R_\epsilon u = u$ *dans* L^p. *Si* $u \in L^\infty$, $\|R_\epsilon u\|_{L^\infty} \leq \|u\|_{L^\infty}$. *Si* u *appartient à* L^1_{loc}, *la fonction* $R_\epsilon u$ *est dans* $C^1(\mathbb{R}^N)$ *et pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^N$, $\lim_{\epsilon\to 0}(R_\epsilon u)(x) = u(x)$.

C'est le lemma 5.2 à la page 15 de [Le].

Lemme 5.3. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et soit* X *un champ de vecteurs* L^1_{loc} *sur* Ω *tel que* $\operatorname{div} X \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. *Soit* $v \in L^\infty_{\text{comp}}(\Omega)$ *et* R_ϵ *donné par le lemme 5.2. Alors*

$$(XR_\epsilon v - R_\epsilon X v)(x) = (T_{\epsilon,\rho} v)(x) + (N_\epsilon v)(x)$$

avec $\lim_{\epsilon\to 0} N_\epsilon v = 0$ *dans* L^1_{loc} *et*

$$(T_{\epsilon,\rho} v)(x) = \int \partial_2\rho(x,z)\epsilon^{-1}\big(X(x) - X(x-\epsilon z)\big)\big(v(x-\epsilon z) - v(x)\big)dz. \tag{5.3}$$

C'est le lemma 5.3 à la page 16 de [Le].

Lemme 5.4. *Soit* E *un espace vectoriel réel euclidien de dimension finie. Soit* M *un endomorphisme de* E *tel que* $M = \xi \otimes \eta$ *avec* ξ, η *vecteurs unitaires orthogonaux. Alors pour tout* $\gamma \geq 0$,

$$\big\|(\operatorname{Id} + \gamma {}^t\! M M)M(\operatorname{Id} + \gamma {}^t\! M M)^{-1}\big\| \leq (1+\gamma)^{-1}. \tag{5.4}$$

C'est le lemma 5.4 à la page 18 de [Le].

Bibliographie

[Ai] M. Aizenman, *On vector fields as generators of flows: a counterexample to Nelson's conjecture*, Ann. Math. **107** (1978), 287–296.

[Al] G. Alberti, *Rank one properties for derivatives of functions with bounded varioations*, Pro. Roy. Soc. Edinburgh sect A **123** (1993), 239-274.

[Am] L. Ambrosio, *Transport equations and Cauchy problem for BV vector fields* (2003) (to appear).

[AFP] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara, *Functions of bounded variations and free discontinuity problems*, Oxford Mathematical monographs preprint, 2000.

[Bo] F. Bouchut, *Renormalized solutions to the Vlasov equation with coefficients of bounded variation*, Arch. Rational Mech. Anal. **157** (2001), 75-90.

[CP] I. Capuzzo Dolcetta, B. Perthame, *On some analogy between different approaches to first-order PDE's with non smooth coefficients*, Adv.Math.Sci.Appl. **6** (1996), 689-703.

[CL1] F. Colombini, N. Lerner, *Uniqueness of continuous solutions for BV vector fields*, Duke Math.J. **111** (2002), 357–384.

[CL2] F. Colombini, N. Lerner, *Uniqueness of L^∞ solutions for a class of conormal BV vector fields*, Contemporary Mathematics (2004) (to appear).

[CLR] F. Colombini, T. Luo, J. Rauch, *Uniqueness and nonuniqueness for nonsmooth divergence free transport*, Séminaire XEDP, Ecole Polytechnique (2003-04).

[De] N. Depauw, *Non unicité des solutions bornées pour un champ de vecteurs BV en dehors d'un hyperplan.*, C.R.Math.Acad.Sci.Paris **337** (2003), 4, 249-252.

[DL] R.J. DiPerna, P.-L. Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math. **98** (1989), 511–547.

[Ho] J. Hounie, *Local solvability of first order linear operators with Lipschitz coefficients*, Duke Math.J. **62** (1991), no.2, 467-477.

[LL] C. Le Bris, P.-L. Lions, *Renormalized solutions of some transport equations with partially $W^{1,1}$ velocities and applications*, Annali di Matematica pura ed applicata. **183** (2004), 97-130.

[Le] N. Lerner, *Transport equations with partially BV velocities*, http://perso.univ-rennes1.fr/nicolas.lerner.

[Li] P.-L. Lions, *Sur les équations différentielles ordinaires et les équations de transport*, C.R. Acad.Sc. Paris, Série I, **326** (1998), 833–838.

[Sa] X. Saint Raymond, *L'unicité pour les problèmes de Cauchy linéaires du premier ordre*, Enseign. Math. no. 1-2, (2), **32** (1986), 1–55.

[Vo] A.I. Vol'pert, *The space BV and quasi-linear equations*, Math.USSR Sbornik **2** (1967), 225–267.

[Zi] W.P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate texts in mathematics, vol. 120, Springer-Verlag, 1989.

Université de Rennes 1, Irmar, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France
E-mail address: `nicolas.lerner@univ-rennes1.fr`
Web-page: `http://perso.univ-rennes1.fr/nicolas.lerner/`