Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE
Equations aux Dérivées Partielles
2002-2003

Éric Dumas

Existence globale pour les systèmes de Maxwell-Bloch

Séminaire É. D. P. (2002-2003), Exposé n° VI, 14 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2002-2003____A6_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Existence globale pour les systèmes de Maxwell-Bloch

Éric Dumas

Les équations de Maxwell-Bloch modélisent la propagation d'une onde électromagnétique (champ électrique E, champ magnétique H) dans un milieu matériel décrit par N niveaux quantiques grâce à la matrice densité ρ [10] :

$$\begin{cases} \mu\partial_t H + \operatorname{rot} E = 0, \\ \varepsilon\partial_t E - \operatorname{rot} H = -\partial_t P, \\ i\partial_t \rho = [\Omega - E\cdot\Gamma, \rho]. \end{cases} \tag{1}$$

Les variables d'espace-temps sont $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+3}$, les champs E et H sont à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Les constantes μ et ε, strictement positives, sont respectivement la perméabilité magnétique et la permittivité électrique. Le couplage s'effectue via la polarisation P du milieu, champ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ donné par la loi constitutive :

$$P = \operatorname{Tr}(\Gamma\rho),$$

où Γ, l'opérateur moment dipolaire électrique, est donné par le matériau, et est une matrice $N \times N$ hermitienne, à valeurs dans $\mathbb{C}^3$. La matrice Ω, de taille $N \times N$, hermitienne, à valeurs dans $\mathbb{C}$, représente le hamiltonien libre du système matériel (en l'absence de champ électromagnétique). La matrice densité ρ est hermitienne et positive, de taille $N \times N$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Dans la base des états propres du système, son $n$ième terme diagonal est la proportion d'états quantiques situés dans le $n$ième niveau d'énergie (ainsi, $\rho_{nn} \geq 0$, et $\sum_n \rho_{nn} = 1$ dans le matériau), et le terme extra-diagonal ρ_{jk} est lié à la probabilité de transition du niveau j vers le niveau k.

Enfin, il faut rajouter à ces équations les lois de conservation du courant et de la charge :

$$\operatorname{div} H = 0, \quad \operatorname{div}(\varepsilon E + P) = 0 \tag{2}$$

(qui sont –au moins formellement– satisfaites pour tout temps dès lors qu'elles le sont initialement).

Le système (1) est symétrique hyperbolique, si bien que, pour des données initiales assez régulières ($H^s(\mathbb{R}^3)$, pour $s > 3/2$), on a existence locale des solutions, sur un intervalle de temps dépendant *a priori* de la taille des données

initiales. Dès lors, deux questions se posent :
Q1) Y a-t-il existence globale de ces solutions ? Cette question est motivée en particulier par le fait que les échelles de temps pertinentes en optique sont "longues" [9].
Q2) Y a-t-il des solutions globales ayant la régularité "naturelle" donnée par la proposition 0.1 ci-dessous, qui indique la seule énergie $\mathcal{E}$ connue qui puisse être contrôlée pour ce système ?

Définition 0.1. *On note L_0 l'espace des $U = (E, B, \rho) \in L^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3) \times (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^3)$ vérifiant les conservations (2), et on appelle* solution d'énergie *tout $U \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L_0)$ solution de (1) au sens des distributions.*

Par des estimations d'énergie classiques, on obtient la

Proposition 0.1. *On suppose $\Gamma, \Omega \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$.*
Si $U = (E, B, \rho)$ est une solution d'énergie de (1), alors :
(i) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^3$, $|\rho(t,x)| := (\mathrm{Tr}\,(\rho(t,x)^2))^{1/2}$ est constante en t.
(ii) Il existe $C = C(\|\Omega\|_{L^\infty}, \|\Gamma\|_{L^\infty}, \|\rho\|_{L^\infty})$ telle que, pour tout temps t,

$$\mathcal{E}(t) := \|\sqrt{\varepsilon}E(t)\|_{L^2}^2 + \|\sqrt{\mu}H(t)\|_{L^2}^2 + \|\rho(t)\|_{L^2}^2 \leq e^{Ct}\mathcal{E}(0).$$

Remarque 0.1. *i) Question subsidiaire : les solutions d'énergie étant des solutions faibles, a-t-on unicité pour une telle classe de solutions ? Sinon, quelle régularité doit-on imposer aux données pour l'obtenir ?*
ii) Le choix de considérer que $\rho(t) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ peut paraî tre surprenant, compte tenu de $\mathrm{Tr}\,(\rho) = 1$, mais il faut bien penser que cette identité n'est valable que dans le matériau, et que si celui-ci est fini, le support de ρ doit être considéré comme compact.
iii) La proposition 0.1 reste valable lorsque $\varepsilon, \mu \in L^\infty_x(\mathbb{R}^3)$, mais nous ne savons pas prouver l'existence des solutions d'énergie dans ce cas.

Avant d'aller plus loin, rappelons quelques résultats sur ce problème :
• Pour les systèmes de Maxwell-Bloch à deux niveaux ($N = 2$), Donnat et Rauch [2] ont obtenu l'existence globale des solutions $H^s(\mathbb{R}^3)$, pour $s \geq 2$, par des estimations d'énergie et de type Yudovich, et des arguments usuels de prolongement (type EDO). La spécificité du cas à deux niveaux tient au fait que l'équation de Bloch sur la matrice densité peut être réécrite comme un système portant sur la polarisation P et sur $n := \rho_{11} - \rho_{22}$, la différence

de population entre les deux niveaux :

$$\begin{cases} \partial_t^2 P + \dfrac{1}{T_1}\partial_t P + \omega^2 P = C_1 n E, \\ \quad \partial_t n + \dfrac{n-n_0}{T_2} = -C_2 \partial_t P \cdot E. \end{cases}$$

La structure particulière des non-linéarités entraî ne des compensations, menant à la conservation (exacte) d'une énergie de type L^2, et au contrôle d'une énergie H^1.

• Pour le système de Maxwell dans un matériau ferromagnétique, où $M(t,x)$ est la magnétisation du milieu,

$$\begin{cases} \mu\partial_t H + \operatorname{rot} E = -\partial_t M, \\ \varepsilon\partial_t E - \operatorname{rot} H = 0, \\ \partial_t M = \alpha\left(M \wedge H + \dfrac{\beta}{|M|} M \wedge (M \wedge H)\right), \end{cases}$$

Joly, Métivier et Rauch [6] ont montré l'existence globale des solutions d'énergie (solutions faibles), ainsi que la propagation de la régularité H^s ($s > 0$) de la partie à divergence nulle des champs, et l'unicité dans le cas des solutions fortes (rotationnel L^2) en dimension trois d'espace, pour des coefficients constants. Haddar [5] a obtenu des résultats similaires en deux dimensions d'espace, avec une permittivité électrique $\varepsilon = \varepsilon(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ –μ joue un rôle analogue, mais est constant dans les matériaux “physiques”.

Ces démonstrations reposent sur la structure géométrique des non-linéarités ($M.\partial_t M = 0$), qui donne des estimations *a priori* (L^2 pour les champs E et H, ponctuelles pour M) analogues à celles de la proposition 0.1, et sur la compatibilité de ces non-linéarités avec la partie différentielle du système : le découpage des champs en partie à rotationnel nul et partie à divergence nulle permet d'utiliser la compacité par compensation. Enfin, l'unicité repose sur des estimations de Strichartz “précisées” pour l'équation des ondes, dans le cas limite $\Box u \in L^1_t(L^2_x)$.

Nous allons suivre la même stratégie avec les équations de Maxwell-Bloch à nombre de niveaux N quelconque (fini), en dimension trois d'espace, pour montrer :

Théorème 0.1. *Soit $\Omega, \Gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ ($\varepsilon, \mu =$ cstes). Si $U_0 \in L_0$, il existe une solution d'énergie (globale) U de (1) ayant U_0 pour donnée initiale.*

Théorème 0.2. *Si de plus* $\operatorname{rot} E_0, \operatorname{rot} H_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$*, alors* $\operatorname{rot} E, \operatorname{rot} H \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$*, et* U *est unique.*

Remarque 0.2. *i) On peut généraliser ces résultats à d'autres types de non-linéarités. Un cas simple, et physiquement pertinent, correspond à l'ajout de "relaxations transverses" [1] :* $i\partial_t\rho = [\Omega - E\cdot\Gamma, \rho] - i\gamma\rho_{nd}$*, où* ρ_{nd} *est la partie hors diagonale de* ρ*, et* γ *une constante positive. Dans ce cas, l'estimation ponctuelle de la proposition 0.1 est remplacée par* $|\rho(t,x)| \leq |\rho(0,x)|$*, suffisant pour tout ce qui suit.*
ii) Une extension intéressante consisterait à prendre ε *variable. On peut aussi s'intéresser au cas d'un nombre infini de niveaux (*$N = \infty$*), avec* $\rho(t,x) \in l^2(\mathbb{N}^2)$ *; nous ne savons pas écrire les estimations d'énergie correspondantes.*

Dans ce qui suit, on considèrera que $\varepsilon = \mu = 1$.

1 Preuve du théorème 0.1 : existence des solutions d'énergie

1.1 Régularisation

On utilise le multiplicateur de Fourier S^λ, de symbole $\chi_\lambda := \chi(./\lambda)$, où la fonction de troncature $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, [0,1])$ vaut 1 si $|\xi| \leq 1/2$, et 0 si $|\xi| \geq 1$. Ainsi, S^λ est continu de $L^2(\mathbb{R}^3)$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, de norme 1,
de $L^2(\mathbb{R}^3)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^3)$, de norme $\lambda^{3/2}$,
de $L^p(\mathbb{R}^3)$ dans $L^p(\mathbb{R}^3), 1 \leq p < \infty$, de norme $\|\hat{\chi}\|_{L^1}$.
Soit $L^2_\lambda(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des éléments de $L^2(\mathbb{R}^3)$ dont la transformée de Fourier a un support contenu dans $\{|\xi| \leq \lambda\}$.

On définit alors U^λ par $U^\lambda_{|t=0} = (S^\lambda E_{|t=0}, S^\lambda B_{|t=0}, \rho_{|t=0})$ et

$$\tag{3} \begin{cases} \partial_t H^\lambda + \operatorname{rot} E^\lambda = 0, \\ \partial_t E^\lambda - \operatorname{rot} H^\lambda = -\partial_t S^\lambda \operatorname{Tr}(\Gamma\rho^\lambda), \\ i\partial_t\rho^\lambda = [\Omega - E^\lambda\cdot\Gamma, \rho^\lambda], \end{cases}$$

que l'on peut écrire sous la forme d'une équation différentielle $\partial_t U^\lambda = G^\lambda(U^\lambda)$, avec G^λ continu sur $L^2_\lambda(\mathbb{R}^3) \times L^2_\lambda(\mathbb{R}^3) \times (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^3)$ (grâce à la troncature en fréquence et au fait que $L^2_\lambda(\mathbb{R}^3)$ s'injecte continuement dans $L^\infty(\mathbb{R}^3)$) et localement lipschitzien (car polynomial). La théorie classique des EDO sur les Banach et les estimations d'énergie usuelles donnent alors :

Proposition 1.1. *Pour tous $U_0 \in L_0$ et $\lambda \geq 1$, il existe un unique $U^\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, L^2_\lambda(\mathbb{R}^3) \times L^2_\lambda(\mathbb{R}^3) \times (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^3))$ solution de (3) et il existe une constante $C = C(\|\Omega, \Gamma, \rho_0\|_{L^\infty})$ telle que :*
(i) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^3$, $|\rho^\lambda(t,x)| = |\rho_0(x)|$ pour tout temps t.
(ii) Sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$, $\mathrm{div}\, H^\lambda = 0, \quad \mathrm{div}\, (E^\lambda + S^\lambda \mathrm{Tr}\,(\Gamma\rho^\lambda)) = 0$.
(iii) Pour tout temps t, $\mathcal{E}(U^\lambda(t)) \leq e^{Ct}\mathcal{E}(U_0)$.

Grâce à ces conservations, on peut extraire une suite de λ telle que U^λ converge vers un certain U^∞, faiblement dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$ (et faible-$\star$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$, pour ρ^λ). Dans ce qui suit, on notera $\Omega_T := [0,T] \times \mathbb{R}^3$.

1.2 Convergence forte

Pour passer à la limite dans les termes non linéaires, on montre que la convergence vers U^∞ s'effectue en fait dans $\mathcal{C}([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))$, pour tout $T \geq 0$. Pour la matrice densité, on forme la différence des équations de Bloch sur ρ^λ et ρ^μ, et on multiplie scalairement par $(\rho^\lambda - \rho^\mu)$:

$$i\partial_t(\rho^\lambda - \rho^\mu) = [(E^\infty - E^\lambda) \cdot \Gamma, \rho^\lambda] + [\Omega - E^\infty \cdot \Gamma, \rho^\lambda - \rho^\mu] + [(E^\mu - E^\infty) \cdot \Gamma, \rho^\mu],$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_t \mathrm{Tr}\,\big((\rho^\lambda - \rho^\mu)^2\big) = & -i\mathrm{Tr}\,\big([(E^\infty - E^\lambda) \cdot \Gamma, \rho^\lambda](\rho^\lambda - \rho^\mu)\big) \\ & + i\mathrm{Tr}\,\big([(E^\infty - E^\mu) \cdot \Gamma, \rho^\mu](\rho^\lambda - \rho^\mu)\big), \end{aligned} \tag{4}$$

en utilisant l'identité $\mathrm{Tr}\,(A[A,B]) = 0$ dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. On ne sait pas encore que E^λ converge fortement vers E^∞. Par contre, la proposition suivante –que l'on démontrera à la fin du paragraphe– donne une majoration des produits du membre de droite de (4) dans un espace à poids :

Proposition 1.2. *Il existe une constante $C = C(\|\Gamma\|_{L^\infty}, \|\rho_0\|_{L^\infty}, T)$ et, pour tout $\delta > 0$, un nombre $N = N(\delta, T)$, tels que, si $\lambda, \mu \geq N$, pour $t \in [0,T]$,*

$$\|e^{-|x|^2}(\rho^\lambda - \rho^\mu)(t)\|^2_{L^2} \leq C\left(\delta + \int_0^t \|e^{-|x|^2}(\rho^\lambda - \rho^\infty)(t')\|^2_{L^2} dt'\right).$$

On peut alors conclure sur la convergence de la matrice densité :
1) La convergence de $\rho^\mu(t)$ a lieu pour tout t dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ faible, par le théorème d'Ascoli, l'équicontinuité étant obtenue par l'équation de Bloch.
2) À t fixé, passant à la limite dans l'inégalité à poids de la proposition 1.2, et par le lemme de Gronwall, on obtient la convergence forte de ρ^λ vers ρ^∞ dans $L^2(\Omega_T, e^{-|x|^2}dtdx)$.
3) Ceci entraî ne (à extraction de sous-suite près) la convergence de ρ^λ presque partout sur Ω_T, et les estimations ponctuelles de la proposition 1.1 impliquent la convergence forte dans $L^2(\Omega_T)$, par convergence dominée. Grâce à l'équicontinuité de la suite, la convergence a en fait lieu dans $\mathcal{C}([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))$.

Concernant les champs E et H, en écrivant le système satisfait par la différence $\delta U := U^\lambda - U^\infty$, on a par estimation d'énergie :

$$\|\delta E, \delta H\|_{L^2}(t) \leq C \int_0^t \|\delta F(t')\|_{L^2} dt',$$

avec le second membre (obtenu en passant à la limite dans les termes non-linéaires grâce à la convergence forte de ρ^λ) :

$$\delta F = i\mathrm{Tr}\,(\Gamma[\Omega, \delta\rho]) - i\mathrm{Tr}\,(\Gamma[(E^\infty - E^\lambda)\cdot\Gamma, \rho^\lambda]) - i\mathrm{Tr}\,(\Gamma[E^\infty\cdot\Gamma, \delta\rho]).$$

1) Le premier terme converge vers 0 dans $\mathcal{C}([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))$, comme $\delta\rho$.
2) De même, le dernier terme converge vers 0 dans $L^1(\Omega_T)$, donc presque partout (à extraction d'une sous-suite près), et à nouveau, l'estimation L^∞ sur ρ^λ montre la convergence dans $L^2(\Omega_T)$, par convergence dominée.
3) Enfin, le deuxième terme est majoré par $C\|\rho\|_{L^\infty}\|\delta E(t')\|_{L^2}$.
On obtient finalement $\|\delta E, \delta H\|_{L^2}(t) \leq C(\int_0^t \|\delta E(t')\|_{L^2}dt' + o(1))$ quand $\lambda \to \infty$, et le lemme de Gronwall montre que $\delta E, \delta H \to 0$ dans $\mathcal{C}([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))$.

Preuve de la proposition 1.2 :

On multiplie (4) par $e^{-2|x|^2}$, et on intègre sur Ω_t :

$$\|e^{-|x|^2}(\rho^\lambda - \rho^\mu)(t)\|_{L^2}^2 = -i \iint e^{-2|x|^2}\big(\mathrm{Tr}\,\big([(E^\infty - E^\lambda)\cdot\Gamma, \rho^\lambda](\rho^\lambda - \rho^\mu)\big) + \mathrm{Tr}\,\big([(E^\infty - E^\mu)\cdot\Gamma, \rho^\mu](\rho^\lambda - \rho^\mu)\big)\big)dxdt'.$$

Introduisons alors les multiplicateurs de Fourier $\pi_\parallel$ et $\pi_\perp$, de symboles respectifs $(\xi/|\xi|, .)\xi/|\xi|$ et $(\xi/|\xi|\wedge .)\wedge\xi/|\xi|$, homogènes de degré zéro. Ces opérateurs sont donc continus de $L^p(\mathbb{R}^3)$ dans lui-même, pour tout p fini [11]. Ce sont les projecteurs orthogonaux (dans $L^2(\mathbb{R}^3)$) sur les champs de vecteurs à rotationnel nul et à divergence nulle, respectivement (décomposition de Hodge). La condition de divergence (2) entraî ne :

$$\pi_\parallel E^\nu = -\pi_\parallel S^\nu \mathrm{Tr}\,(\Gamma\rho^\nu), \text{ et } \pi_\parallel E^\infty = -\pi_\parallel \mathrm{Tr}\,(\Gamma\rho^\infty).$$

Quant à la partie sans divergence de E^ν, par les équations de Maxwell, elle est solution d'une équation d'onde :

$$(\partial_t^2 - \Delta)\pi_\perp E^\nu = -\partial_t^2 \pi_\perp S^\nu P^\nu.$$

On a alors la majoration de $\|e^{-|x|^2}(\rho^\lambda - \rho^\mu)(t)\|_{L^2}^2$ par la somme de deux termes ($\nu = \lambda$ ou μ) s'écrivant chacun, grâce à la décomposition de Hodge :

$$(5) \qquad \begin{aligned} &C(\Gamma,\rho) \iint_{\Omega_t} e^{-2|x|^2} |\rho^\lambda - \rho^\mu|\ |S^\nu \pi_\parallel \mathrm{Tr}\,(\Gamma(\rho^\nu - \rho^\infty))| dx dt' \\ &\qquad + \left| \iint_{\Omega_t} e^{-2|x|^2} Q(x,\rho^\lambda,\rho^\mu)\pi_\perp(E^\infty - E^\nu) dx dt' \right|. \end{aligned}$$

1) Dans le dernier terme, Q est quadratique en (ρ^λ, ρ^μ). Ainsi, $Q(\rho^\lambda, \rho^\mu)$ et $\pi_\perp(E^\infty - E^\nu)$ sont bornés dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$. La famille d'applications $t \mapsto \iint_{\Omega_t} e^{-2|x|^2} Q(x,\rho^\lambda,\rho^\mu)\pi_\perp(E^\infty - E^\nu) dx dt'$ est donc uniformément (en ν) équicontinue sur $[0,T]$, et il suffit de montrer l'inégalité de la proposition à t fixé. De plus, comme le poids $e^{-2|x|^2}$ tend vers zéro lorsque $|x| \to \infty$, pour $R = R(\delta)$,

$$\left| \iint_{[0,t]\times\{|x|>R\}} e^{-2|x|^2} Q(x,\rho^\lambda,\rho^\mu)\pi_\perp(E^\infty - E^\nu) dx dt' \right| \leq \delta.$$

Sur le compact $[0,t]\times\{|x| \leq R\}$, on utilise la compacité par compensation [3], [12] : comme les variétés caractéristiques

$$\mathcal{C}_{\partial_t} := \{\tau = 0\} \setminus \{0\} \text{ et } \mathcal{C}_\Box := \{\tau^2 - |\xi|^2 = 0\} \setminus \{0\}$$

sont disjointes, il suffit de vérifier que
- $e^{-|x|^2} Q(x,\rho^\lambda,\rho^\mu)$ et sa dérivée temporelle sont bornés dans $L^2(\Omega_T)$;
- $\pi_\perp(E^\nu - E^\infty)$ est borné dans $L^2(\Omega_T)$, et $(\partial_t^2 - \Delta)\pi_\perp E^\nu$, égal à $i\partial_t \pi_\perp S^\nu \mathrm{Tr}\,(\Gamma \cdot [\Omega - E^\nu.\Gamma, \rho^\nu])$, est borné dans $H^{-1}(\Omega_T)$. À la limite, cela est vrai aussi pour $(\partial_t^2 - \Delta)\pi_\perp E^\infty$, et donc finalement pour $(\partial_t^2 - \Delta)\pi_\perp(E^\nu - E^\infty)$. Par conséquent,

$$\iint_{[0,t]\times\{|x|\leq R\}} e^{-2|x|^2} Q(x,\rho^\lambda,\rho^\mu)\pi_\perp(E^\infty - E^\nu) dx dt' \underset{\lambda,\mu\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2) On majore le premier terme par

$$(6)\qquad \begin{aligned}&\iint_{\Omega_t} e^{-|x|^2}\big|\rho^\lambda-\rho^\mu\big|\,\big|[S^\nu\pi_\|,e^{-|x|^2}]\mathrm{Tr}\,(\Gamma(\rho^\nu-\rho^\infty))\big|dxdt'\\ &+\iint_{\Omega_t} e^{-|x|^2}\left|\rho^\lambda-\rho^\mu\right|\,\left|S^\nu\pi_\| e^{-|x|^2}\mathrm{Tr}\,(\Gamma(\rho^\nu-\rho^\infty))\right|dxdt'.\end{aligned}$$

La première intégrale tend vers zéro quand $\nu\to\infty$ grâce au lemme suivant ([6], lemme 4.3) :

Lemme 1.1. *Pour tout $p>2$, les opérateurs $[S^\nu\pi_\|,e^{-|x|^2}]$ sont compacts de $(L^2\cap L^p)(\mathbb{R}^3)$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, uniformément en ν :*
Si $u^\nu\rightharpoonup 0$ dans $(L^2\cap L^p)(\mathbb{R}^3)$ faible, $\quad [S^\nu\pi_\|,e^{-|x|^2}]u^\nu \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$.

On peut donc majorer (6) par

$$C\left(\int_0^t \|e^{-|x|^2}(\rho^\lambda-\rho^\mu)(t')\|_{L^2}^2dt'+\int_0^t \|e^{-|x|^2}(\rho^\nu-\rho^\infty)(t')\|_{L^2}^2dt'+o(1)\right).$$

3) Rassemblant les estimations de 1) et 2), on majore (5) par

$$C\left(\int_0^t \|e^{-|x|^2}(\rho^\lambda-\rho^\mu)(t')\|_{L^2}^2dt'+\int_0^t \|e^{-|x|^2}(\rho^\lambda-\rho^\infty)(t')\|_{L^2}^2dt'+o(1)\right),$$

et le lemme de Gronwall conclut la preuve de la proposition 1.2.

2 Preuve du théorème 0.2 : solutions régulières et unicité

2.1 Propagation de la régularité $H(rot)$

On va montrer que lorsque $\mathrm{rot}\,E$ et $\mathrm{rot}\,H$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ initialement, ils le restent pour tout temps. L'idée est d'utiliser les équations de Maxwell pour convertir les dérivées spatiales en dérivées temporelles : $\mathrm{rot}\,E=-\partial_t H$, et ce dernier est contrôlé par estimation d'énergie sur le système de Maxwell dérivé par rapport à t. Enfin, si $u\in L^2$, dire que $\mathrm{rot}\,u\in L^2$ équivaut à dire que la partie sans divergence $u_\perp$ de u est H^1, donc, ρ étant déjà connu, on écrit le système des équations de Maxwell comme un système linéaire portant sur $u:=(E_\perp,H_\perp)=(u_1,u_2)$:

$$(7)\qquad Lu=\Pi Bu+\Pi f,$$

$$\text{avec :}\quad L = \partial_t + \begin{pmatrix} 0 & -\pi_\perp \mathrm{rot} \\ \pi_\perp \mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix},\quad \Pi = \begin{pmatrix} \pi_\perp & 0 \\ 0 & \pi_\perp \end{pmatrix},$$

$$Bu = \begin{pmatrix} i\mathrm{Tr}\,(\Gamma[u_1\cdot\Gamma,\rho]) \\ 0 \end{pmatrix},\quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ i\mathrm{Tr}\,(\Gamma[\Omega + \pi_\parallel \mathrm{Tr}\,(\Gamma\rho)\cdot\Gamma,\rho]) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, B est une matrice 6×6 à coefficients $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, (L^2\cap L^\infty)(\mathbb{R}^3))$, ainsi que leur dérivée temporelle, et $f, \partial_t f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^3))$ pour tout $p<\infty$. De plus, L, restreint à $\mathrm{I}m\,\Pi$, est symétrique hyperbolique, donc le problème de Cauchy associé à (7) pour une donnée initiale $u_0 = \Pi u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ admet une unique solution $u = \Pi u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$.

Proposition 2.1. *Si $f, \partial_t f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$, et si les coefficients de B et $\partial_t B$ sont dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, (L^2\cap L^\infty)(\mathbb{R}^3))$, pour tout $u_0 = \Pi u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, la solution u du problème de Cauchy associé à (7) est dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^3))$.*

Preuve : Fixons $T>0$. On sait que u est la limite, dans $\mathcal{C}([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))$, de la suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u^0 = u_0$ et $u^{n+1} = \mathcal{T}u^n$, où $\mathcal{T}v =: w$ est la solution de $Lw = \Pi Bv + \Pi f$, $w_{|t=0} = u_0$.

Commençons par l'équation avec terme source, $Lw = \Pi f \in L^1([0,T], L^2)$. Par l'estimation d'énergie classique, on a

$$\|w(t)\|_{L^2} \le \|w(0)\|_{L^2} + 2\int_0^t \|f(t')\|_{L^2} dt'.$$

De plus, $L = \partial_t + iP(D_x)$, avec $P(D_x)$ un opérateur pseudo-différentiel de symbole ayant des valeurs propres $\pm|\xi|$ de multiplicité constante. Notant $\pi_\pm$ les projecteurs associés, on a la décomposition

$$w = w_+ + w_-,\quad \text{où}\ \ \widehat{w_\pm}(t,\xi) = e^{\pm it|\xi|}\pi_\pm \hat{w}_0(\xi) + \int_0^t e^{\pm i(t-t')|\xi|}\pi_\pm \hat{f}(t',\xi)dt'.$$

Lorsque $f\in\mathcal{C}([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))$ et $\partial_t f \in \mathcal{C}([0,T], L^2(\mathbb{R}^3))$, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\widehat{\partial_x w_\pm}(t,\xi) =& e^{\pm it|\xi|}\xi\pi_\pm\widehat{w_0}(\xi)\\ &\pm i\left[e^{\pm i(t-t')|\xi|}\pi_\pm \hat{f}(t',\xi)\right]_0^t \pm i\int_0^t e^{\pm i(t-t')|\xi|}\frac{\xi}{|\xi|}\pi_\pm\widehat{\partial_t f}(t',\xi)dt'.\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\|\partial_x w(t)\|_{L^2} \leq \|\partial_x w(0)\|_{L^2} + 2\|f\|_{\mathcal{C}(L^2)} + 2\int_0^t \|\partial_t f(t')\|_{L^2} dt'. \tag{8}$$

De plus, l'équation $\partial_t w = -iP(D_x)w + \Pi f$ implique

$$\|\partial_t w(t)\|_{L^2} \leq C\|\partial_x w(t)\|_{L^2} + \|f(t)\|_{L^2}. \tag{9}$$

Dans le cas où $Lw = \Pi Bv + \Pi f$ avec $v \in \mathcal{C}([0,T], H^1) \cap \mathcal{C}^1([0,T], L^2)$, d'après (8) et (9), pour assurer que w est dans le même espace, il suffit de contrôler $\partial_t(Bv)$ (on a bien $Bv \in L^1(L^2)$). Or, à t fixé,

$$\begin{aligned} \|\partial_t(Bv)\|_{L^2} &\leq \|(\partial_t B)v\|_{L^2} + \|B\partial_t v\|_{L^2} \\ &\leq \|\partial_t B\|_{L^3}\|v\|_{L^6} + \|B\|_{L^\infty}\|\partial_t v\|_{L^2} \\ &\leq C\|\partial_t B\|_{L^3}\|\partial_x v\|_{L^2} + \|B\|_{L^\infty}\|\partial_t v\|_{L^2}, \end{aligned} \tag{10}$$

par l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.

Les estimations (8), (9) et (10) prouvent que $\mathcal{T}$ est continu de $\mathcal{C}([0,T], H^1) \cap \mathcal{C}^1([0,T], L^2)$ dans lui-même. En procédant de même avec la différence $u^{n+1} - u^n$, on obtient, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \|\partial_{t,x}(u^{n+1} - u^n)(t)\|_{L^2} \leq C\Big(&\|u^n - u^{n-1}\|_{\mathcal{C}([0,T],L^2)} \\ &+ \int_0^t \|\partial_{t,x}(u^n - u^{n-1})(t')\|_{L^2} dt'\Big). \end{aligned}$$

Pour T_1 assez petit ($CT_1 < 1/2$, qui ne dépend pas de la donnée initiale, mais seulement de B), cette inégalité entraî ne que la suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0,T_1], H^1) \cap \mathcal{C}^1([0,T_1], L^2)$. En réitérant sur $[T_1, 2T_1]$, $[2T_1, 3T_1]$,..., on a la convergence sur tout $[0,T]$.

2.2 Unicité

Supposons que U_1 et U_2 sont deux solutions d'énergie de (1) pour la même donnée initiale, et telles que $\operatorname{rot} E_j, \operatorname{rot} H_j \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$, $j = 1, 2$. On peut écrire, par différence, le système satisfait par $\delta U := U_2 - U_1$ sous la forme synthétique

$$M(\delta U) = \begin{pmatrix} 0 \\ i\mathrm{Tr}\,(\Gamma\delta F) \\ \delta F \end{pmatrix}, \text{ avec } \delta F = i[(E_2 - E_1)\cdot\gamma, \rho_2] - i[\Omega - E_1\cdot\gamma, \rho_2 - \rho_1].$$

Lorsque les champs électriques E_j sont dans $L^\infty(\Omega_T)$, on a, par estimation d'énergie, $\|\delta U(t)\|_{L^2} \leq e^{Ct}\|\delta U(0)\|_{L^2}$, qui implique l'égalité de $U_1(t)$ et $U_2(t)$ pour $t \in [0,T]$ si $\delta U(0) = 0$ (et en fait, la propriété plus forte de stabilité dans L^2 ; voir [6]).

Pour de telles solutions d'énergie, on ne dispose cependant pas de l'estimation *a priori* $E \in L^\infty(\Omega_T)$. Elle est vraie lorsqu'on tronque E en fréquence. On estime donc l'erreur commise dans cette troncature, par un analogue du lemme 6.2 de [6] :

Lemme 2.1. *Soit U une solution d'énergie de (1) telle que* $\operatorname{rot} E, \operatorname{rot} H \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$*. Alors, pour tous $T > 0$, $\lambda \geq e$, il existe $E^\lambda \in L^\infty(\Omega_T)$, $\alpha_\lambda \in L^2(0,T)$, $\beta_\lambda \in L^\infty(0,T), C > 0$ tels que, pour tout $t \in [0,T]$:*

$$\|E^\lambda(t)\|_{L^\infty} \leq \alpha_\lambda + \beta_\lambda \quad \textit{et} \quad \|(E - E^\lambda)(t)\|_{L^2} \leq C/\lambda,$$
$$\textit{avec} \quad \|\alpha_\lambda\|_{L^2} \leq C\sqrt{\ln \lambda}, \quad \|\beta_\lambda\|_{L^\infty} \leq C \ln \lambda.$$

On a ainsi la majoration

$$\begin{aligned}\|\delta F(t)\|_{L^2} &\leq C(\Gamma,\Omega)\Big(\|\delta E(t)\|_{L^2} + \|\delta\rho(t)\|_{L^2} + (\alpha_\lambda + \beta_\lambda)\|\delta\rho(t)\|_{L^2} \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{\lambda}\|\delta\rho(t)\|_{L^\infty}\Big) \\ &\leq C(\Gamma,\Omega)\left((1 + \alpha_\lambda + \beta_\lambda)\|\delta U(t)\|_{L^2} + 1/\lambda\right),\end{aligned}$$

et l'estimation d'énergie, puis le lemme de Gronwall, donnent :

$$\|\delta U(t)\|_{L^2} \leq C\frac{t}{\lambda}e^{C\int_0^t (1+\alpha_\lambda+\beta_\lambda)(t')dt'}.$$

Comme $\int_0^t (1 + \alpha_\lambda + \beta_\lambda)(t')dt' \leq C(T)\ln\lambda$, avec $C(T) \underset{T\to 0}{\longrightarrow} 0$, on en déduit, en faisant tendre λ vers l'infini, que $\delta U(t)$ est nul sur $[0, T_0]$, pour T_0 assez petit. On conclut en répétant cette opération sur des intervalles de taille T_0.

Preuve du lemme 2.1 :

On veut extraire de E un terme L^∞, qui soit une bonne approximation de E dans L^2. Commençons par la décomposition de Hodge :

$$E = \pi_\perp E + \pi_\| E = \pi_\perp E - P_\|,$$

où la partie irrotationnelle de la polarisation s'écrit $P_\| = \pi_\| \mathrm{Tr}\,(\Gamma\rho)$.
1) Pour estimer $P_\|$, on utilise que pour p fini, $\pi_\|$ est continu de $L^p(\mathbb{R}^3)$ dans

lui-même, avec une norme majorée par $C_0 p$, pour une certaine constante C_0 (voir [11]). On en déduit la majoration :

$$\|P_\parallel(t)\|_{L^p} \leq C_0\ p\ \|\rho(t)\|_{L^2\cap L^\infty} \leq C_0\ p\ \|\rho(0)\|_{L^2\cap L^\infty},$$

grâce à la conservation ponctuelle de $|\rho|$. On définit alors $P_\parallel^\lambda$ par :

$$P_\parallel^\lambda(t,x) := \left| \begin{array}{l} P_\parallel(t,x) \text{ si } |P_\parallel(t,x)| \leq C\ln\lambda \text{ (où } C \text{ est une constante à choisir),} \\ 0 \text{ sinon,} \end{array} \right.$$

si bien qu'on a

$$\begin{aligned} \|(P_\parallel - P_\parallel^\lambda)(t)\|_{L^2}^2 &= \int_{\{|P_\parallel|\geq C\ln\lambda} |P_\parallel(t)|^2 dx \\ &\leq (C\ln\lambda)^{2-p} \|P_\parallel(t)\|_{L^p}^p \\ &\leq \frac{(C_0\ p\ \|\rho(0)\|_{L^2\cap L^\infty})^p}{(C\ln\lambda)^{p-2}} = \left(C\frac{\ln\lambda}{\lambda}\right)^2 \end{aligned}$$

en choisissant $C := 2eC_0\|\rho(0)\|_{L^2\cap L^\infty}$, $p := 2\ln\lambda$. Cette quantité est bien majorée par C'/λ, pour $\lambda \geq e$ (et on pose $\beta_\lambda(t) := \|P_\parallel^\lambda\|_{L^\infty} \leq C\ln\lambda$).
2) Concernant $\pi_\perp E$, il vérifie l'équation d'onde

$$(\partial_t^2 - \Delta)\pi_\perp E = i\pi_\perp \mathrm{Tr}\ (\Gamma \cdot (i[\Omega - E\cdot\Gamma, [\Omega - E\cdot\Gamma, \rho] - [\partial_t E\cdot\Gamma, \rho])) .$$

Le second membre est majoré, à une constante multiplicative près, par $|\rho| + |E| + |E|^2 + |\partial_t E|$. Or, $\partial_t E = \mathrm{rot}\, H - \partial_t P \in \mathcal{C}([0,T], L^2)$. Les deux premiers termes, ρ et E, sont également dans cet espace. Enfin, $|E|^2$ aussi, car $E = \pi_\perp E + \pi_\parallel E \in \mathcal{C}([0,T], H^1) + \mathcal{C}([0,T], L^4) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,T], L^4)$ par injection de Sobolev.

L'idée est alors d'utiliser une estimation de Strichartz pour contrôler $\|\pi_\perp E\|_{L^2(L^\infty)}$ par $\|\Box\pi_\perp E\|_{L^1(L^2)}$. C'est malheureusement le cas limite interdit : on ne peut contrôler les normes $L^r(L^p)$ que pour p fini [4], [8], [7]. On contourne cette difficulté en tronquant en fréquence ([6], proposition 6.3) :

Proposition 2.2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $\lambda, T > 0$ et $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^2(\mathbb{R}^3))$,*

$$\|S^\lambda u\|_{L^2([0,T],L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq C\sqrt{\ln(1+\lambda T)}\Big(\|\partial_{t,x} u(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Box u\|_{L^1([0,T],L^2(\mathbb{R}^3))}\Big).$$

On termine la preuve en posant $E^\lambda := S^\lambda \pi_\perp E + P_\parallel^\lambda$:
avec $\alpha_\lambda(t) := \|S^\lambda \pi_\perp E(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}$, on a $\|\alpha_\lambda\|_{L^2} \leq C\sqrt{\ln \lambda}$ par la proposition 2.2, et

$$\begin{aligned}
\|(\pi_\perp E - S^\lambda \pi_\perp E)(t)\|_{L^2} &\leq \|\mathbf{1}_{\{|\xi|\geq\lambda\}} \widehat{\pi_\perp E}(t)\|_{L^2} \\
&\leq \|\frac{(1+|\xi|^2)^{1/2}}{(1+\lambda^2)^{1/2}} \mathbf{1}_{\{|\xi|\geq\lambda\}} \widehat{\pi_\perp E}(t)\|_{L^2} \\
&\leq \frac{C}{(1+\lambda^2)^{1/2}} \|\mathrm{rot}\, E\|_{\mathcal{C}([0,T],L^2)}.
\end{aligned}$$

Références

[1] B. Bidégaray, A. Bourgeade and D. Reignier. *Introducing physical relaxation terms in Bloch equations.* Journal of Computational Physics, 170, 603-613, 2001.

[2] P. Donnat and J. Rauch. *Global solvability of the Maxwell-Bloch equations from nonlinear optics.* Arch. Ration. Mech. Anal., 136(3), 291-303, 1996.

[3] P. Gérard. *Microlocal defect measures.* Communications in Partial Differential Equations, 16, 1761–1794, 1991.

[4] J. Ginibre and G. Velo. *Generalized Strichartz inequalities for the wave equation.* Journal of Functional Analysis, 133, no. 1, 50–68, 1995.

[5] H. Haddar. *Modèles asymptotiques en ferromagnétisme : couches minces et homogénéisation.* Thèse INRIA-École Nationale des Ponts et Chaussées, 2000.

[6] J.-L. Joly, G. Métivier, and J. Rauch. *Global solutions to Maxwell equations in a ferromagnetic medium.* Annales Henri Poincaré, 1, no. 2, 307–340, 2000.

[7] H. Lindblad. *Counterexamples to local existence for semilinear wave equations.* American Journal of Mathematics, 118, no. 1, 1–16, 1996.

[8] H. Lindblad and C.D. Sogge. *On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equations.* Journal of Functional Analysis, 130, 357–426, 1995.

[9] A.C. Newell and J.V. Moloney. *Nonlinear optics.* Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1992.

[10] R. Pantell and H. Puthoff. *Fundamentals of quantum electronics.* Wiley and Sons Inc., N.Y., 1969.

[11] E. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton University Press, 1970.

[12] L. Tartar. *H-measures, a new approach for studying homogeneization, oscillations and concentrations effects in partial differential equations.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 115(A), 193–230, 1990.