Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2002-2003

Pascal Auscher

Au-delà des opérateurs de Calderón-Zygmund : avancées récentes sur la théorie L^p

Séminaire É. D. P. (2002-2003), Exposé n° XX, 21 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2002-2003____A20_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Au-delà des opérateurs de Calderón-Zygmund : avancées récentes sur la théorie L^p

P. Auscher *

Cet exposé présente quelques méthodes nouvelles, reposant sur des idées parfois anciennes, pour obtenir des estimations L^p pour des opérateurs qui sortent de la classe des intégrales singulières de Calderón-Zygmund.

Les avancées sont de deux types : on s'affranchit d'hypothèses sur le noyau et on obtient des résultats L^p pour des intervalles de valeurs de p différents de $]1,+\infty[$ ou $]1,2[$ ou $]2,+\infty[$.

Les applications déjà obtenues sont les suivantes :

1) détermination du calcul fonctionnel holomorphe borné sur L^p.

2) étude des transformées de Riesz pour l'opérateur de Laplace-Beltrami sur des variétés Riemanniennes non-compactes, pour des opérateurs elliptiques généraux sur $\mathbb{R}^n$, ou des sous-Laplaciens sur des groupes de Lie,

3) problème de la régularité maximale pour des équations d'évolution parabolique.

Le champ des applications doit pouvoir s'enrichir vers les équations des ondes, l'étude des multiplicateurs de Bochner-Riesz. [1]

L'objectif de ce texte est de mettre à la disposition du plus large public ces nouveaux résultats (certains n'étant pas encore publiés). On s'est appuyé pour cela sur les travaux de Hebisch [He], Duong et Robinson [DR], Duong et McIntosch [DMc], Coulhon et Duong ([CD1, CD2]), Hieber-Prüss [HP], Blunck et Kuntsmann [BK1, BK2], Hofmann et Martell [HM] et Auscher-Coulhon-Duong-Hofmann [ACDH].

*Université de Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France

[1] Après avoir donné cet exposé, S. Blunck nous informait qu'il avait obtenu des résultats dans cette direction.

1 Les opérateurs à noyaux singuliers

§1. Les opérateurs de Calderón-Zygmund aujourd'hui.

Ce qu'on appelle aujourd'hui opérateur de Calderón-Zygmund suit la terminologie introduite dans les travaux de Coifman-Meyer et David-Journé. Cette terminologie englobe les opérateurs considérés par Calderón-Zygmund dans les années cinquante.

Il s'agissait à l'époque d'étudier les estimations L^p pour les équations elliptiques en dimension supérieure à 2 du type $\Delta u = f$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, et on cherche à montrer que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (u doit être nulle à l'infini en un certain sens, ceci pour éliminer les fonctions harmoniques). Cela passe par la continuité sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ des transformées de Riesz $R_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta)^{-1/2}, j = 1, \cdots, n$.

Les méthodes de variable réelle inventées par A. Calderón et A. Zygmund permettent d'établir ce fait pour toute dimension et *tout* p *entre* 1 *et* ∞.

La classe des transformées de Riesz s'est enrichie au cours des ans de multiplicateurs (Mikhlin, Hörmander), d'opérateurs obtenus par développement en harmonique sphérique (Giraud, Marcinkiewicz), des opérateurs pseudo-différentiels classiques d'ordre 0, puis d'opérateurs dont le noyau vérifie des hypothèses de régularité de plus en plus faible, suivant ainsi le programme de A. Calderón exposé lors de la conférence internationale d'Helsinski en 1978 ([C]).

Le “bon” cadre pour définir les opérateurs de Calderón-Zygmund est celui des espaces de nature homogène. Un espace métrique mesuré (Ω, d, μ) est dit homogène ([CW]) s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $x \in \Omega$, et $r > 0$

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r)) \qquad (D)$$

où $B(x, r)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r.

Sur ces espaces les propriétés classiques tel que continuité L^p de l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood, lemmes de recouvrements (Vitali, Besicovitch) et décomposition de Whitney pour les ouverts sont vraies. Voir Stein [St2], chapitre I. Signalons des travaux récents où (D) est remplacé par la condition plus faible

$$\mu(B(x, r)) \leq Cr^D \qquad (Dim)$$

où une partie de la théorie qui suit peut être développée. Nous ne considérons ici que la condition (D), le lecteur intéressé pouvant se reporter à la revue de J. Verdera ([V]).

Le nombre D s'appelle *dimension homogène* de Ω.

Un opérateur de Calderón-Zygmund est un opérateur linéaire T, continu sur $L^2(\Omega, \mu)$, et associè à un noyau $K(x, y)$ de la façon suivante :

$$Tf(x) = \int_\Omega K(x, y) f(y) d\mu y \tag{1}$$

pour toute f à support borné et intégrable et pour presque tout $x \notin \operatorname{supp} f$, et ce noyau vérifie pour une certaine constante c,

$$|K(x, y)| \leq \frac{c}{d(x, y)^D} \ , \tag{2}$$

$$\int_{d(x,y) \geq 2d(y,y')} |K(x, y) - K(x, y)| d\mu x \leq c \ , \tag{3}$$

$$\int_{d(x,y) \geq 2d(x,x')} |K(x, y) - K(x', y)| d\mu y \leq c \ . \tag{4}$$

La condition (3) - et sa duale (4) - est connue sous le nom de condition de Hörmander (introduite dans son article sur les opérateurs invariants par translation [Ho]) et généralisée à ce cadre dans [CW]. On a le résultat suivant.

Théorème 1 *Sous ces conditions (sauf (4)), T est de type faible* $(1, 1)$ *donc continu sur $L^p(\Omega, \mu)$ pour $1 < p < 2$. Si (4) remplace (3) alors T est continu sur $L^p(\Omega, \mu)$ pour $2 < p < +\infty$ par dualité. Les opérateurs de Calderón-Zygmund sont donc bornés sur $L^p(\Omega, \mu)$ pour $1 < p < +\infty$.*

Rappelons qu'un opérateur (linéaire ou non) est de type faible (p, p) s'il existe une constante c telle que pour toute $f \in L^p(\Omega, \mu)$ et tout $\lambda > 0$

$$\mu\{x \in \Omega; |Tf(x)| > \lambda\} \leq c \ \frac{\int_\Omega f^p d\mu}{\lambda^p} \ .$$

Noter que la continuité sur $L^2(\Omega, \mu)$ est contenue dans les hypothèses. Signalons d'ailleurs que le théorème T(1) de David et Journé de continuité sur L^2 des intégrales singulières est établi sous des conditions de régularité plus fortes que (3) et (4). A ce sujet, le théorème de David et Journé est toujours ouvert sous les conditions (2), (3) et (4) sur le noyau $K(x, y)$ (conditions qui suffisent à définir $T^*(1)$ et $T(1)$).

Lemme 1 *Soit $f \in L^p(\Omega, \mu)$ [2], $1 \leq p < +\infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$. On peut écrire*

$$f = g + \sum_i b_i$$

où les fonctions g et b_i vérifient les propriétés suivantes pour une certaine constante C :

(i) $g \in L^\infty(\Omega)$ et $\|g\|_\infty \leq C\lambda$

(ii) b_i est supporté dans une boule B_i et

$$\int_{B_i} |b_i|^p d\mu \leq C\lambda\mu(B_i)$$

(iii) les b_i sont oscillantes : $\int_{B_i} b_i d\mu = 0$

(iv) les boules B_i vérifient la propriété de recouvrement borné : tout point de $\mathbb{R}^n$ est contenu dans au plus N boules B_i, N indépendant du point choisi.

(v) la masse des boules est contrôlée : $\sum_i \mu(B_i) \leq C\dfrac{\int_\Omega |f|^p}{\lambda^p}$.

Une conséquence de la démonstration est que g appartient aux $L^q(\Omega), p \leq q \leq \infty$ et $\|g\|_q \leq C\lambda^{1-\frac{p}{q}}\|f\|_p^{p/q}$.

Pour démontrer le théorème 1, on part de $f \in L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ et on se donne $\lambda > 0$. On estime $\mu\{x \in \Omega; |Tf(x)| > \lambda\}$ en décomposant $f = g + \sum_i b_i$. On est ramené à contrôler $\mu\{x \in \Omega; |Tg(x)| > \frac{\lambda}{2}\}$ et $\mu\{x \in \Omega; |\sum_i Tb_i(x)| > \frac{\lambda}{2}\}$. Pour le premier terme, on utilise la continuité sur $L^2(\Omega)$ et les propriétés de g :

$$\begin{aligned} \mu\{x \in \Omega; |Tg(x)| > \frac{\lambda}{2}\} &\leq \frac{4}{\lambda^2}\int_\Omega |Tg(x)|^2 d\mu(x) \\ &\leq \frac{4}{\lambda^2}\int_\Omega |g(x)|^2 d\mu(x) \\ &\leq \frac{C}{\lambda}\int_\Omega |f(x)| d\mu(x)\ . \end{aligned}$$

Pour le deuxième terme, on met à part la contribution des $x \in \cup_i(4B_i)$ (cB désigne la boule de même centre que B et dilatée d'un facteur c) qui est majorée par

$$\mu(\cup_i 4B_i) \leq \sum_i \mu(4B_i) \leq c\sum_i \mu(B_i) \leq \frac{C}{\lambda}\int_\Omega |f(x)| d\mu(x),$$

[2]on a supposé $\mu(\Omega) = +\infty$. Dans le cas $\mu(\Omega) < +\infty$, on impose $\lambda < \|f\|_p(\mu(\Omega))^{-1/p}$.

en utilisant le doublement du volume et (v).

Enfin, il reste le terme

$$\mu\{x \in \Omega \backslash \cup_i (4B_i); |\sum_i Tb_i(x)| > \frac{\lambda}{2}\} \leq \frac{1}{\lambda} \sum_i \int_{\Omega \backslash 4B_i} |Tb_i(x)| d\mu(x) \ .$$

Puisque $\operatorname{Supp} b_i \subset B_i$, on peut utiliser la représentation (1) de Tb_i puis la propriété (iii) pour écrire si $x \notin 4B_i$,

$$Tb_i(x) = \int_{B_i} (K(x,y) - K(x,x_i)) b_i(y)\, d\mu(y)$$

avec x_i le centre de B_i. Il ne reste plus qu'à utiliser le théorème de Fubini et la condition de Hörmander pour obtenir

$$\int_{\Omega \backslash 4B_i} |Tb_i(x)| d\mu(x) \leq C \int_{B_i} |b_i(y)| d\mu(y) \ .$$

La conclusion suit en réutilisant le lemme.

Noter la corrélation entre la forme de la propriété de régularité (3) et l'oscillation des b_i données par (iii).

§2. Le théorème de Hebisch.

Considérons sur $\mathbb{R}^n$, l'opérateur auto-adjoint $H = -\Delta + V(x)$ où $V \in L^1_{loc}$, $V(x) \geq 0$ p.p.. Si $m \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_+)$ alors $m(H)$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$. Il est connu que le semi-groupe $(e^{-tH})_{t>0}$ est contrôlé par le semi groupe de la chaleur $(e^{+t\Delta})_{t>0}$. En particulier si $K_t^H(x,y)$ désigne le noyau-distribution de e^{-tH}, on a

$$K_t^H(x,y) \leq \frac{C}{t^{n/2}} e^{-\alpha \frac{|x-y|^2}{t}} \tag{G}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n, t > 0$ où les constantes C et α sont positives.

Cependant, si V n'est pas régulier $K_t^H(x,y)$ ne peut être régulier ni en x ni en y.

Néanmoins, Hebisch [He] démontre l'analogue suivant du théorème de Mikhlin-Hörmander [Ho] sur les multiplicateurs de Fourier.

Théorème 2 *Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ ne s'annulant pas sur l'intervalle $[1,2]$ et $s > \frac{n+1}{2}$ tels que $\sup_{t>0} \|\varphi m(t.)\|_{H^s(\mathbb{R})} < +\infty$. Alors $m(H)$ est de type faible $(1,1)$, puis borné sur $L^p(\mathbb{R}^n, dx), 1 < p < +\infty$.*

La démonstration repose encore une fois sur la décomposition de Calderón-Zygmund. Mais $m(H)$ n'est pas un opérateur de Calderón-Zygmund. Il vérifie (1) et (2), mais (3) et (4) font défaut. Ces dernières sont remplacées par des estimations sur le noyau de $m(H)(I-e^{-tH})$. Si on l'appelle $K_t^m(x,y)$ alors on peut montrer, sous l'hypothèse du théorème, que

$$\int_{|x-y|\geq c\sqrt{t}} |K_t^{m(H)}(x,y)|dx \leq C \tag{5}$$

et c'est cette propriété qui entraîne le type faible (1,1). On observe que la régularisation se fait à l'intérieur du calcul fonctionnel pour H via le semi-groupe e^{-tH}. *La condition d'oscillation (iii) sur les b_i ne sert plus à rien et il n'est pas nécessaire de l'imposer.*

Reformulons alors la condition (3) de Hörmander lorsque $\Omega=\mathbb{R}^n$. Ecrivons $y'=y+rw$ où $r>0$ et $|w|=1$. Alors $K(x,y)-K(x,y')$ est le noyau, $K_r(x,y)$, de $T(1-e^{r\partial})$ où ∂ est la dérivée partielle dans la direction w, et (3) se réécrit

$$\int_{|x-y|\geq 2r} |K_r(x,y)|dx \leq C$$

uniformément sur les directions et les rayons. On voit donc la similitude avec (5).

§3. La généralisation au calcul fonctionnel holomorphe de Duong et Robinson.

M. Cowling signala à X.T. Duong que la méthode de Hebisch pouvait permettre de s'affranchir de la régularité de Hörmander dans différentes situations. Duong et D. Robinson [DR] ont mis cela en œuvre dans le cadre des opérateurs non plus autoadjoints mais sectoriels.

On se donne le générateur $-L$, d'un semi-groupe continu sur $L^2(\Omega,\mu)$ et holomorphe dans un secteur $\Sigma_\theta=\{z\in\mathbb{C}; |\arg z|<\theta\}$ où $\theta\leq\pi/2$. Soit $\omega\in]\frac{\pi}{2}-\theta,\pi]$ et $m:\Sigma_\omega\to\mathbb{C}$ une fonction holomorphe et bornée et on suppose que $m(L)$ est continu sur $L^2(\Omega,\mu)$. On fait ensuite l'hypothèse que $K_z^L(x,y)$, le noyau de e^{-zL}, vérifie

$$|K_z^L(x,y)| \leq \frac{1}{\mu(B(x,r))} g(\frac{d(x,y)}{r}) \tag{G'}$$

où $r=|Rez|^{1/m}, m\in\mathbb{N}^*$ et $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ décroît suffisamment vite à l'infini (en fonction de la dimension D de Ω). Sous ces conditions, on a le

Théorème 3 *$m(L)$ est de type faible (1,1) et borné sur $L^p(\Omega,\mu), 1 < p < +\infty$. En particulier, si L admet un calcul fonctionnel $H^\infty(\Sigma_\omega)$ sur $L^2(\Omega,\mu)$ alors L admet un calcul fonctionnel $H^\infty(\Sigma_\omega)$ sur $L^p(\Omega,\mu), 1 < p < +\infty$.*

La preuve de ce résultat suit de près l'argument de Hebisch, la différence se situant dans le calcul fonctionnel utilisé. La régularisation de $m(L)$ se fait par l'action du semi-groupe et le noyau $K_t^{m(L)}(x,y)$ de $m(L)(I - e^{-tL})$ vérifie, grâce à (G'), l'estimation (5) où $\sqrt{t}$ devient $t^{1/m}$.

Les applications de ce résultat sont le calcul fonctionnel des opérateurs elliptiques $-\mathrm{div} A\nabla$ sur $\mathbb{R}^n$ ou des domaines réguliers.

§4. Le théorème de Duong et McIntosh.

Duong et McIntosh [DMc] font plusieurs observations importantes qui élargissent le champ des applications.

1) On peut sortir du cadre d'un calcul fonctionnel et il suffit de disposer d'une suite d'approximation de l'identité convenable et adoptée à l'opérateur.

2) On peut travailler dans des sous-ensembles d'espaces homogènes.

Bien que ce deuxième point soit important, nous resterons dans le cadre d'un espace de nature homogène.

Les applications principales en sont les transformées de Riesz et la régularité maximale.

Théorème 4 *Soit $T : L^2(\Omega,\mu) \to L^2(\Omega,\mu)$ un opérateur (linéaire ou sous-linéaire) continu. On suppose qu'il existe une suite $(A_r)_{r>0}$ d'approximation de l'identité avec*

(i) $A_r : L^2(\Omega,\mu) \to L^2(\Omega,\mu)$ borné avec une norme uniformément majorée.

(ii) A_r a un noyau $a_r(x,y)$ vérifiant

$$|a_r(x,y)| \leq \frac{c}{\mu(B(x,r))} g(\frac{d(x,y)}{r})$$

avec $\sup\limits_{r\geq 0}(1+r)^{D+N} g(r) < +\infty$ pour un $N > 0$ assez grand.

(iii) L'opérateur $T(1 - A_r)$ admet un noyau au sens où

$$T(1-A_r)f(x) = \int K_r(x,y) f(y) d\mu(y)$$

pour toute f intégrable à support borné et presque tout $x \notin$ Supp f et on a, pour des constantes $c > 1$ et $C > 0$,

$$\sup_{r>0, y\in\Omega} \int_{d(x,y)\geq cr} |K_r(x,y)| d\mu x \leq C \ . \tag{6}$$

Alors T est de type faible (1,1) et borné sur $L^p(\Omega,\mu), 1 < p < 2$.

Evidemment, il convient de s'apercevoir que ce théorème contient le théorème 1. En effet, si T vérifie (1), (2), (3) alors on choisit

$$A_r f(x) = \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) d\mu(y)$$

et un calcul élémentaire montre que (6) découle de (2) et (3).

§5. Applications.

1) Transformées de Riesz sur les variétés non-compactes ([CD1]).

Soit M une variété Riemannienne complète non-compacte. Soit Δ l'opérateur (positif) de Laplace-Beltrami. Un problème posé par Strichartz ([S]) est celui de déterminer sous quelles conditions (sur M) on a l'inégalité

$$\|\nabla \Delta^{-1/2} f\|_p \leq C_p \|f\|_p \tag{R_p}$$

pour $p \in]1, +\infty[$ et $f \in C_0^\infty(M)$. Cette inégalité permet en effet de comparer les espaces de Sobolev $W^{1,p}$ aux domaines du Laplacien fractionnaire $\Delta^{1/2}$ agissant comme opérateur non borné sur L^p. La réponse est différente dans les cas $p < 2$ et $p > 2$. Remarquer en effet que (R_p) n'implique en aucune façon immédiate $(R_{p'})$. D'autre part, le cas $p = 2$ découle trivialement de l'identité

$$(\nabla f, \nabla f) = (\Delta f, f) = \|\Delta^{1/2} f\|_2^2 \ .$$

Théorème 5 *On suppose que M, équipée de la distance géodésique et de la mesure de volume Riemannien, est un espace de nature homogène et que M vérifie l'inégalité de Poincaré (P) sur les boules*

$$\int_{B(x,r)} |f - m_{B(x,r)} f|^2 d\mu \leq C r^2 \int_{B(x,r)} |\nabla f|^2 d\mu$$

pour une certaine constante $C > 0$ et tous $x \in M, r > 0, f$ tel que f et ∇f soit localement de carré intégrable. Alors $\nabla \Delta^{-1/2}$ est de type faible (1,1) et borné sur $L^p(M,\mu), 1 < p < 2$.

On a noté $m_E f$ la moyenne de f sur E. Il est connu ([G], [G1], [SC1]) que (D) et (P) sont équivalents à l'encadrement Gaussien du noyau de la chaleur $p_t(x,y)$, *i.e.* le noyau de $e^{-t\Delta}$;

$$\frac{c_1}{V(x,\sqrt{t})}e^{-\alpha_2\frac{d(x,y)^2}{t}} \leq p_t(x,y) \leq \frac{c_2}{V(x,\sqrt{t})}e^{-\alpha_1\frac{d(x,y)^2}{t}}$$

pour tout $x, y \in M$, $t > 0$ pour des constantes $0 < c_1 \leq c_2$ et $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$. Ici, $V(x,r)$ désigne le volume de la boule de centre x et de rayon r. Le théorème découle alors de celui de Duong-McIntosh en prenant $A_r = e^{-t\Delta}, r = \sqrt{t}$.

Les applications concrètes sont les variétés à courbure de Ricci positive ou nulle. Dans ce cas la continuité $L^p(1 < p < +\infty)$ est due à Bakry [B], Coulhon et Duong observent que la méthode s'applique aux variétés munies d'un opérateur sous-elliptique (c'est à dire, ΣX_j^2 où les champs X_j vérifient la condition de Hörmander). Dans le cadre des groupes de Lie à croissance polynomiale du volume, le résultat est dû à L. Saloff-Coste pour $1 < p < 2$ ([SC2]). Observer aussi que, puisque (D) et (P) sont stables par quasi-isométrie, le résultat de Coulhon et Duong l'est aussi alors que les hypothèses sur la courbure seraient détruites.

2) Opérateurs elliptiques sur $\mathbb{R}^n$.

Considérons $L = -div(A(x)\nabla)$ un opérateur elliptique sur un domaine D de $\mathbb{R}^n, n \geq 2$. On suppose que $A(x)$ est une matrice mesurable et bornée, et vérifie la condition

$$ReA(x)\xi.\bar{\xi} \geq \delta|\xi|^2$$

presque partout pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n$ où $\delta > 0$. On suppose ou bien que $D = \mathbb{R}^n$ ou bien que $D \neq \mathbb{R}^n$ avec condition de Dirichlet ou de Neumann.

On sait que la transformée de Riesz vérifie

$$\nabla L^{-1/2} : L^2(D, dx) \to (L^2(D, dx))^n$$

dans les cas suivants :

a) $A = A^*$ (ce cas est trivial)

b) $A \neq A^*$ et $D = \mathbb{R}^n$ ([AHLMcT])

c) $A \neq A^*$ et D à bord lipschitzien ([AT2])

Les deux derniers cas correspondent à un problème posé par T. Kato.

Les inégalités L^p, $p \neq 2$, sont d'une toute autre nature. D'une part, si $p > 2$, il existe un opérateur auto-adjoint L comme ci-dessus tel que $\nabla L^{-1/2}$ est non borné sur $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ (cf. [AT1] pour un contre-exemple). Il n'y a donc pas de théorie L^p pour $p > 2$ pour cette classe d'opérateurs. Les transformées de Riesz ne sont pas non plus des opérateurs de Calderón-Zygmund. Néanmoins, la théorie de Duong-McIntosch fournit le

Théorème 6 *Plaçons-nous dans les cas a), b) ou c). Si, de plus, le noyau $K_t^L(x,y)$ du semi-groupe e^{-tL} vérifie l'estimation gaussienne*

$$|K_t^L(x,y)| \leq \frac{C}{t^{n/2}} e^{-\alpha \frac{|x-y|^2}{t}}$$

pour tous $x, y \in D$, $t > 0$ où $C > 0$ et $\alpha > 0$ alors $\nabla L^{-1/2}$ est de type faible (1,1) et borné sur $L^p(\Omega, dx), 1 < p < 2$.

Dans le cas a), on trouve tous les opérateurs réels symétriques avec condition de Dirichlet sur un ouvert *quelconque* ou avec condition de Neumann sur un ouvert avec la propriété du cône extérieur [DMc1]. Dans le cas b), on trouve tous les opérateurs réels (symétriques ou non). Dans le cas c), on trouve tous les opérateurs réels plus leur perturbation complexe dans L^∞ (Cependant, dans ce cas, on a aussi de la régularité höldérienne pour $K_t^L(x,y)$ et la théorie classique du théorème 1 s'applique alors).

3) Régularité maximale.

Le problème est le suivant : on se donne le générateur, $-L$, d'un semi-groupe analytique et borné sur un espace de Banach X. On cherche à savoir si la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) + Lu(t) = f(t), t > 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

vérifie pour un $p \in]1, +\infty[$,

$$\|u'\|_{L^p(X)} + \|Lu\|_{L^p(X)} \leq C_p \|f\|_{L^p(X)}. \qquad (MR_p)$$

Par exemple, lorsque $X = L^q(\mathbb{R}^n), 1 < q < \infty$ et $L = -\Delta$, on retrouve les estimations $L_t^p(L_x^q)$ pour le Laplacien.

Un travail de Hieber-Prüss [HP], complété par Coulhon-Duong [CD2] fournit une condition suffisante pour avoir (MR_p) lorsque $X = L^q(\Omega)$.

Théorème 7 *Si le noyau $K_t^L(x,y)$ du semi-groupe e^{-tL} vérifie une estimation du type*

$$|K_t^L(x,y)| \leq \frac{1}{t^{n/2}} g(\frac{d(x,y)^2}{t})$$

pour une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to R_+$ suffisamment décroissante à l'infini alors (MR_q) est vraie pour $X = L^q(\Omega)$ (et, en fait (MR_p) est vraie pour $X = L^q(\Omega)$ pour tout $p \in]1, +\infty[$) pour tout $q \in]1, +\infty[$. De plus, l'opérateur $f \mapsto Tf \equiv Lu$ est de type faible (1,1) sur $\Omega \times]0, +\infty[$.

L'énoncé du théorème suggère de travailler dans l'espace produit $\Omega \times]0, +\infty[$ muni d'une distance "parabolique"

$$d((x,t),(y,s)) \sim \sqrt{d(x,y)^2 + |t-s|}$$

et de la mesure produit donnée par, si A est μ-mesurable et I un borélien,

$$\nu(A \times I) = \mu(A)|I| \ .$$

Cet espace est en effet de nature homogène, de dimension $D+2$ si D est la dimension homogène de Ω, et l'opérateur T donné par

$$Tf(t) = \int_0^t Le^{(s-t)L} f(s)ds = Lu(t)$$

vérifie les hypothèses du théorème de Duong et McIntosh sur cet espace. On obtient donc le type faible (1,1) de T sur $\Omega \times]0, +\infty[$ et la continuité sur $L^q(\Omega \times]0, +\infty[, \nu)$ si $1 < q < 2$, grâce à la continuité automatique sur $L^2(\Omega \times]0, +\infty[, \nu)$. Les hypothèses s'appliquent à L^* et on a aussi (MR_q) pour $q > 2$.

On sait maintenant, grâce aux travaux de L. Weis [W], une condition nécessaire et suffisante pour que (MR_p) soit vrai pour un $p \in]1, +\infty[$ (donc pour tout $p \in]1, +\infty[$) lorsque $X = L^q(\Omega)$ ou plus généralement lorsque X est un espace UMD. Dans le cas $X = L^q(\Omega)$, il faut et il suffit que l'on ait l'inégalité vectorielle de type Littlewood-Paley

$$\left\| \left(\sum_{j \in F} |e^{-z_j L} f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \leq C \left\| \left(\sum_{j \in F} |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \qquad (W)$$

où $C \geq 0$ est une constante indépendante du choix des f_j, de l'ensemble fini F, et des nombres complexes z_j appartenant au secteur d'holomorphie du semi-groupe $(e^{-tL})_{t>0}$. Sous l'hypothèse du Théorème 7, le membre de gauche est dominé par

$$C \left\| \left(\sum_{j \in F} (M|f_j|)^2 \right)^{1/2} \right\|_q$$

où M est la fonction maximale de Hardy-Littlewood. L'inégalité (W) est alors une conséquence de l'inégalité maximale vectorielle de Fefferman et Stein (cf. [St2]).

§6. Le résultat de Martell.

Les méthodes présentées s'appliquent pour $1 \leq p \leq 2$. La borne supérieure provient du choix initial que nos opérateurs sont déjà bornés sur L^2 : ce choix est arbitraire pour faire de l'analyse réelle mais est souvent imposée par les applications.

Cela dit, comment obtenir des résultats pour $p > 2$?

Une première réponse est d'appliquer les méthodes précédentes aux adjoints. Au lieu de faire une régularisation "à droite" $T(1-A_r)$, on fait donc une régularisation "à gauche", $(1-A_r)T$, et dans le théorème de Duong-McIntosh (6) devient une intégrale par rapport à y.

Cela peut être problématique pour les applications. Dans le cas de la transformée de Riesz $\nabla\Delta^{-1/2}$ sur une variété non-compacte, A_r doit agir sur les champs gradients et y posséder de bonnes propriétés. Il n'est pas clair comment définir A_r.

Une deuxième réponse est de partir du travail de J.M. Martell ([M]) que nous détaillons maintenant. Pour cela, il nous faut rappeler la fonction maximale dièse de Fefferman-Stein. Si f est localement intégrable, on pose

$$M^\sharp f(x) = \sup \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y) - m_B f| d\mu(y), x \in \Omega \ ,$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les boules B contenant x. La condition $M^\sharp f \in L^\infty(\Omega)$ caractérise $BMO(\Omega)$. On a évidemment $M^\sharp f \leq 2Mf$ mais pas d'inégalité inverse. Fefferman et Stein ont établi que si $Mf \in L^p$ alors

$$\|Mf\|_p \leq C_p \|M^\sharp f\|_p$$

pour $0 < p < +\infty$ et C_p ne dépend pas de f ([St2]). Martell généralise ce résultat en remplaçant les prises de moyennes sur les boules par d'autres opérateurs. Sa construction est la suivante : on introduit

$$M_A^\sharp f(x) = \sup \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y) - A_{r(B)} f(y)| d\mu(y), x \in \Omega$$

où la borne supérieure est prise sur les boules B contenant x et $r(B)$ désigne le rayon de la boule B.

Théorème 8 *Soit $(A_r)_{r>0}$ une suite d'approximation de l'identité vérifiant les conditions (i) et (ii) du théorème de Duong et McIntosh (section 4). Si $\mu(\Omega) = +\infty$, et $0 < p < +\infty$ et $f \in L^1$ à support borné avec $Mf \in L^p(\Omega, \mu)$*

$$\|Mf\|_p \leq C_p \|M_A^\sharp f\|_p \ .$$

La stratégie de preuve est celle de Fefferman et Stein via l'utilisation d'*inégalités aux bons* λ. La preuve permet aussi de remplacer μ par n'importe quel poids ω dans la classe de Muckenhoupt $A^\infty(d\mu)$. Une remarque est que même si la terminologie "approximation de l'identité" est utilisée, il n'est pas nécessaire que $A_r(1) = 1$ pour démontrer ce résultat. On observe aussi que $M_A^\sharp f \leq CMf$ ponctuellement. Armé de ce résultat il revient au même, si $1 < p < +\infty$, de montrer que $Tf \in L^p(\Omega, \mu)$ ou que $M_A^\sharp(Tf) \in L^p(\Omega, \mu)$.

Corollaire 2 *Sous les hypothèses du théorème 8, si $T : L^2(\Omega, \mu) \to L^2(\Omega, \mu)$ est un opérateur continu tel que le noyau $K_r^T(x, y)$ de $(1 - A_r)T$ vérifie*

$$\sup_{x \in \Omega, r > 0} \int_{d(x,y) \geq r} |K_r^T(x, y)| d\mu(y) < +\infty \tag{7}$$

alors T est borné sur $L^p(\Omega, \mu)$ pour $2 < p < +\infty$.

Puisque (7) est la condition de (6) de Duong-McIntosh pour T^*, on voit que Martell propose une route différente pour le même résultat. Cela peut paraître décevant mais, et c'est la bonne nouvelle, cette méthode peut être modifiée pour permettre une régularisation à droite de T (section 9).

2 Les opérateurs sans noyau

§7. Exemples.

Il existe des opérateurs L du type $-\mathrm{div}(A(x)\nabla)$ avec des coefficients complexes tels que e^{-tL} soit non borné sur $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tout $t>0$. En particulier, le noyau de e^{-tL} ne peut être dominé par une fonction intégrable en la première variable. Dans ce cas, on ne peut espérer de type faible (1,1) pour les opérateurs suivants rencontrés dans les sections précédentes.

- $m(L), m \in H^\infty(\Sigma_\omega)$
- $\nabla L^{-1/2}$
- $f \mapsto \displaystyle\int_0^t Le^{(s-t)L} f(s)ds$

Néanmoins, ont été établis récemment des résultats de continuité L^p pour des valeurs de p proches de $p=2$. D'autres opérateurs étudiés sont les opérateurs de Schrödinger avec potentiel singulier.

On va s'intéresser aux extensions des théories précédentes dans les cas $p<2$ et $p>2$. Le premier cas est une adaptation d'un résultat de Blunck et Kuntsmann. Le second est dû à l'auteur, Coulhon, Duong et Hofmann.

§8. Le théorème de Blunck et Kuntsmann.

On se place toujours dans le cadre d'un espace (Ω, d, μ) de nature homogène. Si B est une boule, on désigne par λB la boule de même centre dilatée d'un facteur $\lambda>0$. On pose $c_1(B)=4B$ et $c_j(B)=2^{j+1}B\setminus 2^jB$ si $j\in\mathbb{N}, j\geq 2$.

Théorème 9 *Soit $T : L^2(\Omega,\mu) \to L^2(\Omega,\mu)$ un opérateur (sous-)linéaire continu. On suppose qu'il existe une famille $(A_r)_{r>0}$ d'approximation de l'identité et des constantes $c_j, j\geq 1$, telles que*

$$(i) \qquad \|A_r f\|_2 \leq c\|f\|_2 \quad \forall r>0\ ,$$

$$(ii) \quad \left(\frac{1}{\mu(2^{j+1}B)}\int_{c_j(B)} |A_{r(B)}f|^2 d\mu\right)^{1/2} \leq c_j \left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f|^p d\mu\right)^{1/p} \quad \forall j\geq 1\ ,$$

(iii)

$$\left(\frac{1}{\mu(2^{j+1}B)}\int_{c_j(B)}|T(I-A_{r(B)})f|^2d\mu\right)^{1/2}\le c_j\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B|f|^pd\mu\right)^{1/p}\quad\forall j\ge 2\ ,$$

où (ii) et (iii) sont valables pour les fonctions f à support dans une boule B et la suite $(c_j)_{j\geq 1}$ est indépendante de B et f. Si $\sum_{j\geq 1}c_j2^{jD}<+\infty$ alors T est de type faible (p,p), donc borné sur $L^q(\Omega,\mu), p<q<2$.

La propriété (ii) exprime la propension de la suite $(A_r)_{r>0}$ à régulariser de L^p dans L^2. Cette condition contient une estimation locale ($j=1$) et des estimations à longue portée ($j\geq 2$). La condition (iii) fournit des estimations à longue portée pour $T(1-A_r)$ et, évidemment, aucune estimation locale.

Si, dans (ii) et (iii), on remplace le couple d'exposants $(2,p)$ par $(\infty,1)$, on a une version légèrement plus faible (les hypothèses sont plus restrictives) du théorème de Duong-McIntosh. L'exposant 2 dans (iii) peut être changé en n'importe quel exposant $q>p$ sans affecter la conclusion du théorème.

Voici la preuve du théorème 9. Soit $f\in L^p(\Omega,\mu)$ et $\lambda>0$ (on suppose $\mu(\Omega)=+\infty$ pour simplifier). On décompose $f=g+\sum_i b_i$ comme dans le lemme de la section 1. On a donc $\mu\{x\in\Omega;|Tf(x)|>\lambda\}$ majoré par

$$\mu\{x\in\Omega;|Tg(x)|>\frac{\lambda}{2}\}+\mu\{x\in\Omega;|\sum_i Tb_i(x)|>\frac{\lambda}{2}\}.$$

Le terme où apparaît g se traite comme avant. Le terme où figurent les b_i se majore par : $A=\mu\{x\in\Omega;|\sum T(1-A_{r_i})b_i(x)|>\frac{\lambda}{4}\}$ plus $B=\mu\{x\in\Omega,|\sum TA_{ri}b_i(x)|>\frac{\lambda}{4}\}$ où r_i est le rayon de $4B_i$.

Par l'inégalité de Tchebytchev, et la continuité L^2 de T, on a

$$B\le\frac{1}{\lambda^2}\int_\Omega|\sum_i A_{ri}b_i(x)|^2d\mu(x)\ .$$

On estime cette intégrale par dualité. Soit $u\in L^2(\Omega,\mu)$ telle que $\|u\|_2=1$. On écrit

$$\int_\Omega\sum_i A_{ri}b_i(x)u(x)d\mu(x)=\sum_i\sum_{j\geq 1}B_{ij}\ ,$$

avec

$$B_{ij}=\int_{c_j(B_i)}A_{r_i}b_i(x)u(x)d\mu(x)\ .$$

D'après l'hypothèse (ii) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis la propriété (ii) pour les b_i, et le doublement du volume,

$$\begin{aligned}|B_{ij}| &\le c_j(\mu(2^{j+1}B_i))^{1/2}\left(\int_{B_i}|b_i|^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int_{C_j(B_i)}|u|^2 d\mu\right)^{1/2}\\ &\le c_j\mu(2^{j+1}B_i).C\lambda.\left(\frac{1}{\mu(2^{j+1}B_i)}\int_{2^{j+1}B_i}|u|^2 d\mu\right)^{1/2}\\ &\le c_j 2^{jD}\mu(B_i).C\lambda.(M|u|^2)^{1/2}(y)\end{aligned}$$

pour tout $y \in B_i$. En intégrant cette inégalité sur B_i, il vient

$$|\int_{c_j(B_i)} A_{r_i}b_i(x)u(x)d\mu x| \le c_j 2^{jD}.C\lambda.\int_{B_i}(M|u|^2)^{1/2}(y)d\mu(y)\ .$$

En sommant en i et j et avec la propriété de recouvrement borné

$$|\int_\Omega \sum_i A_{r_i}b_i(x)u(x)d\mu x| \le \left(\sum_{j\ge 1} c_j 2^{jD}\right).C\lambda.\int_{\cup_i B_i}(M|u|^2)^{1/2}(y)d\mu(y).$$

Or l'inégalité de Kolmogorov et le type faible (1,1) de M donne

$$\int_{\cup_i B_i}(M|u|^2)^{1/2}(g)d\mu(y) \le C\mu(\cup_i B_i)^{1/2}\||u|^2\|_1^{1/2} = C\mu(\cup_i B_i)^{1/2}\ .$$

On en déduit que

$$\frac{1}{\lambda^2}\int_\Omega |\sum_i A_{ri}b_i(x)|^2 d\mu(x) \le C\mu(\cup_i B_i) \le \frac{C}{\lambda^p}\int_\Omega |f|^p d\mu$$

ce qui achève le traitement de B.

Il reste à traiter A. On écrit

$$A \le \mu(\cup_i(4B_i)) + \mu\{x \in \Omega \setminus \cup_i(4B_i); |\sum_i T(1-A_{r_i})b_i(x)| > \frac{\lambda}{4}\}$$

Le terme $\mu(\cup_i(4B_i))$ est contrôlé par $\frac{C}{\lambda^p}\int_\Omega |f|^p d\mu$. On majore l'autre terme par

$$\frac{1}{\lambda^2}\int_\Omega \sum_i \mathbf{1}_{\Omega\setminus 4B_i}(x)|T(1-A_{r_i})b_i(x)|^2 d\mu(x)\ .$$

On recommence alors le traitement par dualité et on obtient grâce à l'hypothèse (iii) l'estimation souhaitée.

Les applications de ce résultat sont le calcul fonctionnel pour les opérateurs $-\mathrm{div}(A(x)\nabla)$ sur $\mathbb{R}^D$ *sans* hypothèse de régularité sur le noyau de e^{-tL}. Blunck et Kuntsmann établissent qu'il y a toujours un calcul fonctionnel H^∞ sur L^p pour $p \in]\frac{2D}{2+D}, \frac{2D}{D-2}[$ si $D \geq 3$ [BK1]. On note que $\frac{2D}{D-2}$ est l'exposant de Sobolev p pour l'inclusion $\dot{W}^{1,2}$ (=domaine de la forme associée à L) $\subset L^p$. Si $D = 1, 2$, on savait déjà que le calcul fonctionnel H^∞ est valable sur L^p pour $p \in]1, +\infty[$. Ils établissent aussi dans [BK2] que la transformée de Riesz $\nabla L^{-1/2}$ est de type faible $(\frac{2D}{2+D}, \frac{2D}{2+D})$ (ce résultat est obtenu indépendamment et par la même méthode par Hofmann et Martell [HM]). Enfin, le théorème 9 s'applique aux opérateurs sous-linéaires à valeurs vectorielles comme les fonctionnelles quadratiques.

noindent **§9. Les résultats pour** $p > 2$.

Le théorème qui suit est issu d'un travail de l'auteur en collaboration avec T. Coulhon, X. Duong, S. Hofmann ([ACDH]).

Théorème 10 *Soit* $p_0 \in]2, +\infty]$. *On suppose que* $T : L^2(\Omega, \mu) \to L^2(\Omega, \mu)$ *est un opérateur (sous-) linéaire borné. On suppose qu'il existe une suite d'approximation de l'identité* $(A_r)_{r>0}$ *telle que*

$$\text{(i)} \qquad \|A_r f\|_2 \leq c\|f\|_2, \qquad \forall r > 0$$

$$\text{(ii)} \qquad \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |TA_{r(B)} f|^{p_0}\right)^{1/p_0} \leq \big(M\big(|Tf|^2\big)\big)^{1/2}(x)$$

$$\text{(iii)} \qquad \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |T(1 - A_{r(B)}) f|^2\right)^{1/2} \leq \big(M\big(|f|^2\big)\big)^{1/2}(x)$$

pour toute boule B *et tout* $x \in B$. *Alors* T *est borné sur* $L^p(\Omega, \mu)$ *pour* $2 < p < p_0$.

Noter que dans (ii) et (iii), on impose dans le membre de droite un contrôle de Tf et de f sur toutes les boules contenant B. Le comportement de Tf et de f à l'infini influe donc sur le comportement local des régularisés TA_r et $T(1-A_r)$. Si $p_0 = +\infty$, le membre de gauche dans (ii) devient le sup essentiel sur B.

Voici 2 applications principales :

Corollaire 3 *On se donne une variété Riemannienne complète non-compacte M. On suppose que M vérifie le doublement du volume (D) et les inégalités de Poincaré sur les boules (P). Si, pour un $p_0 \in]2, +\infty]$ et une constante $C > 0$,*

$$\|\nabla e^{-t\Delta} f\|_{p_0} \leq C t^{-1/2} \|f\|_{p_0}$$

alors $\nabla \Delta^{-1/2}$ est borné sur $L^p(M)$ pour $2 < p < p_0$.

En particulier, une condition nécessaire et suffisante pour que $\nabla \Delta^{-1/2}$ soit borné sur $L^p(M)$ pour tout $p \in]1, +\infty[$ est que $\|\nabla e^{-t\Delta} f\|_p \leq C_p t^{-1/2} \|f\|_p$ pour tout $p \in]2, +\infty[$. La suite $(A_r)_{r>0}$ n'est autre que le semi-groupe $(e^{-t\Delta})_{t>0}$ avec la correspondance $t = \sqrt{r}$.

Ce résultat répond à une question de Strichartz dans [S].

On trouve dans les travaux de H.Q. Li [Li] des exemples de variétés coniques pour lesquelles la transformée de Riesz est bornée seulement pour $1 < p < p_0$ où p_0 dépend du spectre du Laplacien angulaire. Ses résultats découlent des nôtres une fois les estimations nécessaires sur le semi-groupe démontrées.

L'hypothèse sur le gradient du semi-groupe est immédiatement nécessaire :

$$\begin{aligned}
\|\nabla e^{-t\Delta} f\|_p &= \|\nabla \Delta^{-1/2} \Delta^{1/2} e^{-t\Delta} f\|_p \\
&\leq C \|\Delta^{1/2} e^{-t\Delta} f\|_p \\
&\leq C t^{-1/2} \|f\|_p
\end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant du caractère Markovien du semi-groupe et de la théorie de Stein [St1]. La suffisance est nouvelle. En pratique, on la vérifie via des estimations ponctuelles sur $\nabla_x p_t(x, y)$ qui dépendent de la géométrie de M. On retrouve alors le théorème de Bakry [B] pour les variétés à courbure de Ricci positive ou nulle. Ce théorème s'applique aussi aux sous-laplaciens sur un groupe de Lie à croissance polynomiale et on retrouve alors le résultat d'Alexopoulos pour $2 < p < +\infty$ [Al].

Le théorème 10 admet aussi une version locale qui permet de traiter le problème des transformées de Riesz sur des variétés à croissance exponentielle du volume avec trou spectral (variétés de Cartan-Hadamard avec trou spectral et des bornes sur le tenseur de courbure et ses dérivées jusqu'à l'ordre

2 [Lo1]) et les groupes de Lie non-moyennables ([Lo2]) en affaiblissant les hypothèses de ces travaux.

La deuxième application concerne les opérateurs $L = -\mathrm{div}(A(x)\nabla)$ de la section 5.

Corollaire 4 *Si* $\|\nabla e^{-tL} f\|_{p_0} \leq C_{p_0} t^{-1/2} \|f\|_{p_0}$ *pour un* $p_0 \in]2, +\infty]$ *alors* $\|\nabla L^{-1/2} f\|_p \leq C \|f\|_p$ *pour* $2 < p < p_0$.

L'intérêt du corollaire réside sur le fait que c'est un théorème individuel (pour un opérateur) et que la condition sur le semi-groupe peut se vérifier pour des raisons particulières sur cet opérateur. Nous renvoyons à la revue en préparation [A] pour plus de détails.

La preuve du théorème 10 utilise comme point de départ les idées de Martell exposées dans la section 6 avec quelques modifications dues à l'introduction de la condition (*ii*) qui permet une régularisation à droite. Nous renovoyons à [ACDH] pour la démonstration.

Références

[Al] Alexopoulos G., An application of homogenization theory to harmonic analysis : Harnack inequalities and Riesz transforms on Lie groups of polynomial growth, *Can. J. Math.*, 44, 4, 691-727, 1992.

[A] Auscher P., On necessary and sufficient conditions for L^p-estimates of Riesz transforms associated to elliptic operators on $\mathbb{R}^n$: a survey, en préparation.

[ACDH] Auscher P., Coulhon T., Duong X.T. & Hofmann S., Riesz transform on manifolds and heat kernel regularity, en préparation.

[AHLMcT] Auscher P., Hofmann S., Lacey M., M^c^Intosh A. & Tchamitchian Ph.. The solution of the Kato square root problem for second order elliptic operators on $\mathbb{R}^n$, *Ann. Math.* (2) **156** (2002) 633–654.

[AT1] Auscher P. & Tchamitchian P., *Square root problem for divergence operators and related topics*, Astérisque, 249, 1998.

[AT2] Auscher, P. & Tchamitchian Ph., Square roots of elliptic second order divergence operators on strongly Lipschitz domains : L^2 theory, à paraître dans Journal d'Analyse Mathématique.

[B] Bakry D., Etude des transformations de Riesz dans les variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée, in *Séminaire de Probabilités XXI*, Springer L.N. n^o 1247, 137-172, 1987.

[BK1] Blunck S. & Kunstmann P., Calderón-Zygmund theory for non-integral operators and the H^∞ functional calculus, *Rev. Mat. Iberoamericana*, to appear.

[BK2] Blunck S. & Kunstmann P., Weak type (p,p) estimates for Riesz transforms, preprint.

[C] Calderón, A. P., Commutators, singular integrals on Lipschitz curves and applications, *Proceedings of the I.C.M. Helsinki 1978* Acad. Sci. Fennica, Helsinki 1980, 85-96.

[CW] Coifman R. & Weiss G., *Extensions of Hardy spaces and their use in Analysis*, *Bull. A.M.S.* **83**, (1977), 569–645.

[CD1] Coulhon T. & Duong X.T., Riesz transforms for $1 \leq p \leq 2$, *T.A.M.S.*, 351, 1151-1169, 1999.

[CD2] Coulhon T. & Duong X.T., Maximal Regularity and kernel bounds : observations on a theorem by Hieber and Prüss, *Adv. in Diff. Eqs* 5, 343-368, 2000.

[DJ] David G. & Journé, J.-L. A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators. *Ann. Math.*, 120, 371–398, 1984.

[DMc] Duong X.T. & McIntosh A., Singular integral operators with non-smooth kernels on irregular domains, *Rev. Mat. Iberoamericana*, 15, 2, 233-265, 1999.

[DMc1] Duong X.T. & McIntosh A., The L^p boundedness of Riesz transforms associated with divergence form operators, in *Workshop on Analysis and Applications, Brisbane, 1997*, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, ANU Canberra 37 (1999), 15-25.

[DR] Duong X.T. & Robinson D., Semigroup kernels, Poisson bounds and holomorphic functional calculus, *J. Funct. Anal.*, 142, 1, 89-128, 1996.

[FS] Fefferman C. & Stein E., H^p spaces in several variables, *Acta Math.*, 129, 137-193, 1972.

[G] Grigor'yan A., The heat equation on non-compact Riemannian manifolds, in Russian : *Matem. Sbornik*, 182, 1, 55-87, 1991 ; English translation : *Math. USSR Sb.*, 72, 1, 47-77, 1992.

[G1] Grigor'yan A., Gaussian upper bounds for the heat kernel on arbitrary manifolds, *J. Diff. Geom.*, 45, 33-52, 1997.

[He] Hebisch, W., A multiplier theorem for Schrödinger operators, *Coll. Math.* 60/61, 659-664, 1990.

[HP] Hieber M. & Prüss, J., Heat kernels and maximal $L^p - L^q$ estimates for parabolic evolution equations, *C.P.D.E.* 2, 559-568, 2000.

[HM] Hofmann S. & Martell J.M., L^p bounds for Riesz transforms and square roots associated to second order elliptic operators, preprint.

[Ho] Hörmander L. Estimates for translation invariant operators in L^p spaces, *Acta Math.* 104, 93-140, 1960.

[Li] Li Hong Quan, La transformation de Riesz sur les variétés coniques, *J. Funct. Anal.*, 168, 145-238, 1999.

[Lo1] Lohoué N., Comparaison des champs de vecteurs et des puissances du laplacien sur une variété riemannienne à courbure non positive, *J. Funct. Anal.*, 61, 2, 164-201, 1985.

[Lo2] Lohoué N., Transformées de Riesz et fonctions de Littlewood-Paley sur les groupes non moyennables, *C.R.A.S Paris*, 306, I, 327-330, 1988.

[M] Martell J. M., Sharp maximal functions associated with approximations of the identity in spaces of homogeneous type and applications, preprint.

[SC1] Saloff-Coste L., A note on Poincaré, Sobolev and Harnack inequalities, *Duke J. Math.*, 65, I.R.M.N., 27-38, 1992.

[SC2] Saloff-Coste L., Analyse sur les groupes de Lie à croissance polynomiale, *Ark. Mat.*, 28, 315-331, 1990.

[St1] Stein E.M., *Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory*, Princeton U.P., 1970.

[St2] Stein E.M., *Harmonic Analysis, real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton U.P., 1993.

[S] Strichartz R., Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifold, *J. Funct. Anal.*, 52, 48-79, 1983.

[V] Verdera J., The fall of the doubling condition in harmonic analysis, à paraître dans Publicacions Matematiques.

[W] Weis L., A new approach to maximal regularity, Proc. of the 6^{th} International Conference on evolution equations and their applications in physical and life sciences in Bad Herrenbald 1998, G. Lumer & L weis eds, Marcel Dekker 2000.