SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2002-2003

Guy Métivier et Kevin Zumbrun

Stabilité de couches limites multi-dimensionnelles

Séminaire É. D. P. (2002-2003), Exposé n° I, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2002-2003____A1_0>

Stabilité de couches limites multi-dimensionnelles

Guy Métivier , Kevin Zumbrun

1 Introduction

Considérons un système hyperbolique quasilinéaire du premier ordre :

$$L(u, \partial)u := \partial_t u + \sum_{j=1}^{d} A_j(u)\partial_{y_j} u + A_d(u)\partial_x u = F(u) \tag{1.1}$$

sur un domaine que l'on prendra ici égal à un demi espace. Les variables (t, y, x) sont dans $\mathbb{R}^{1+d}_+ := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$ où $\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$. On note $\partial_j = \partial_{y_j}$ pour $1 \le j \le d-1$ et $\partial_d = \partial_x$.

On considère ensuite une perturbation parabolique de (1.1) par un terme de viscosité

$$L(u, \partial)u - \varepsilon \sum_{1\le j,k\le d} \partial_j\big(B_{j,k}(u)\partial_k u\big) = F(u)\,. \tag{1.2}$$

à laquelle on adjoint des conditions aux limites de Dirichlet

$$u_{\,|x_d=0} = 0\,. \tag{1.3}$$

On s'attend à ce que les solutions u^ε de (1.2) convergent lorsque ε tend vers zéro vers une solution u^0 de (1.1). Cependant, les conditions aux limites de Dirichlet sont en général surdéterminées pour le problème hyperbolique et u^0 n'a pas de raison de vérifier (1.3). On s'attend donc à ce que les solutions u^ε présentent une transition rapide (*couche limite*) entre des valeurs proches de u^0 à l'intérieur (pour $x > 0$) et la valeur 0 sur le bord (pour $x = 0$).

Les questions posées sont les suivantes:

1) existence de solutions u^ε de (1.2) sur un domaine $[0, T] \times \mathbb{R}^d_+$ avec T indépendant de ε,

2) convergence de u^ε lorsque ε tend vers zéro vers une solution u^0 de (1.1),

3) détermination des conditions aux limites pour u^0.

Pour les équations linéaires, ce problème est étudié dans [BBB], [Ba-Ra], [Lio]. Le cas semi-linéaire est résolu dans [Gu], qui complète aussi les analyses précédentes en donnant des développements asymptotiques à tout ordre et en traitant le cas de bords caractéristiques. Dans le cas quasi-linéaire, une réponse partielle est donné dans [Gi-Se] en dimension un d'espace et dans [Gr-Gu] en multi-D. En fait, l'analyse de [Gr-Gu] comprend deux parties. D'abord, les auteurs construisent des solutions approchées à l'aide de développements en séries formelles par rapport à la viscosité ε. Ensuite, ils prouvent par une analyse de stabilité que la solution exacte est effectivement voisine de la solution approchée. Pour cela, ils utilisent de façon cruciale une *hypothèse de petitesse* (tout comme [Gi-Se]). Sur un exemple, ils montrent aussi que des instabilités peuvent exister. Cependant, la condition de petitesse n'et pas naturelle et ne permet pas de traiter le cas des grandes couches limites.

Dans [MZ], nous remplaçons l'hypothèse de petitesse par une condition basée sur l'analyse d'une *fonction d'Evans*. Les fonctions d'Evans ont été introduites dans l'étude de la stabilité des profils de chocs visqueux et des couches limites (cf [GZ], [ZH], [ZS], [Z], [S], [Rou] et leurs références). Cette méthode trouve son origine dans l'étude des équations de réaction-diffusion, voir par exemple [E1]-[E4], [J], [AGJ], [PW], [K]. Les fonctions d'Evans jouent le rôle des déterminants de Lopatinski dans le cas des problèmes aux limites à coefficients constants. Si elles ont un zéro dans le demi-plan ouvert, le problème est fortement instable et lorsque qu'elles ne s'annullent pas sur le demi-plan fermé, on s'attend à ce que le problème soit fortement stable. Ceci suggèrait que la bonne hypothèse de stabilité devait être formulée à l'aide d'une fonction d'Evans. Ceci a été démontré dans [Gr-Ro] en dimension un et étendu aux dimension supérieures dans [MZ].

L'analyse de [Gr-Ro] repose sur des intégrations le long des caractéristiques pour l'équation hyperbolique et des estimations ponctuelles du noyau de Green de la partie parabolique. En multi-D, ces deux ingrédients s'effondrent et la partie hyperbolique cantonne à l'emploi de méthodes d'énergie pour obtenir des estimations a-priori. La partie centrale de [MZ] concerne l'obtention d'estimations L^2 (puis de type Sobolev) pour les équations linéarisées. On les obtient d'abord par une réduction microlocale à une forme normale qui élimine la variation rapide des coefficients au voisinage du bord, puis par une extension appropriée aux problèmes paraboliques-hyperboliques de la construction des symétriseurs de Kreiss. La microlocalisation et la quantification des symétriseurs est faite à l'aide d'un calcul paradifférentiel adapté.

Les hypothèses sur les systèmes (1.1) (1.2) sont les suivantes:

Hypothèse 1.1. (H0) *Les A_j et $B_{j,k}$ sont des matrices réelles $N \times N$, fonctions C^∞ sur un ouvert $\mathcal{U}^* \subset \mathbb{R}^N$ qui contient l'origine; F est une fonction C^∞ de $\mathcal{U}^*$ dans $\mathbb{R}^N$.*

(H1) *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $u \in \mathcal{U}^*$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ les valeurs propres de $\sum_{j,k=1}^d \xi_j \xi_k B_{j,k}(u)$ vérifient $\operatorname{Re} \mu \geq c|\xi|^2$.*

(H2) *Pour u dans l'ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}^*$ et $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, les valeurs propres de $\sum \xi_j A_j(u)$ sont réelles, semi-simples et de multiplicité constante.*

(H3) *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $u \in \mathcal{U}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ les valeurs propres de $i \sum_{j=1}^d \xi_j A_j(u) + \sum_{j,k=1}^d \xi_j \xi_k B_{j,k}(u)$ vérifient $\operatorname{Re} \mu \geq c|\xi|^2$.*

(H4) *Pour tout $u \in \mathcal{U}$, on a $\det A_d(u) \neq 0$.*

Remarques 1.2. 1. (H1) dit que la perturbation $B(u, \partial)$ est uniformément parabolique. Cela exclut les viscosités partielles, comme dans Navier-Stokes.

2. (H2) dit que L est hyperbolique lorsque u est dans $\mathcal{U}$. Pour les applications, il est effectivement important de permettre au domaine d'hyperbolicité $\mathcal{U}$ d'être plus petit que le domaine de définition $\mathcal{U}^*$: penser aux équations d'Euler avec des lois d'état non partout convexes. En particulier, il n'est pas demandé que $0 \in \mathcal{U}$.

3. (H3) est une hypothèse de compatibilité entre L and B. Par exemple, si $B = \Delta_{x,y}\mathrm{Id}$, (H1) est triviale et (H3) est satisfaite dès que (H2) l'est.

4. (H4) signifie que le bord $\{x = 0\}$ n'est pas caractéristique pour L. Cela exclut les équations d'Euler avec les conditions aux limites habituelles de vitesse normale nulle au bord. Cette hypothèse est absolument fondamentale dans l'analyse. Dans le cas de bords caractéristiques, la nature du problème change radicalement: la couche limite est d'ordre

$\sqrt{\varepsilon}$ au lieu de ε, les équations internes à la couche sont des edp au lieu d'une edo, cf [Gu]. Dans le cas d'Euler, ces équations internes sont les équation de Prandtl qui donnent lieu à des instabilités fortes, cf [Gr].

5. Un exemple important de problème aux limites hyperbolique non caractéristique est celui des chocs. Ce problème a la difficulté supplémentaire que la frontière est libre. L'analyse ci-dessous est donc une étape préliminaire à l'étude de la stabilité des profils de chocs visqueux multi-D, cf les travaux en cours [GMWZ1] [GMWZ2].

2 La couche limite et les conditions aux limites pour le problème hyperbolique

On cherche des solutions asymptotiques de (1.2) de la forme

$$u^\varepsilon(t,y,x) = U_0(t,y,x,x/\varepsilon) + \varepsilon U_1(t,y,x,x/\varepsilon) + \varepsilon^2 U_2 + \cdots \tag{2.1}$$

avec

$$U_k(t,y,x,z) = u_k(t,y,x) + U_k^*(t,y,z)\,, \tag{2.2}$$

$$\lim_{z\to+\infty} U_k^*(t,y,z) \to 0\,, \tag{2.3}$$

$$u_k(t,y,0) + U_k^*(t,y,0) = 0\,. \tag{2.4}$$

La condition (2.3) implique que pour $x > 0$ $U_k(t,y,x,x/\varepsilon)$ tend vers $u_k(t,y,x)$ quand ε tend vers zéro. La condition (2.4) implique que $U_k(t,y,0,0) = 0$. En particulier, u^ε vérifie la condition de Dirichlet (1.3) et tend vers u_0 dans $\{x > 0\}$. Reportant (2.1) dans (1.2), le terme en ε^{-1} conduit à l'équation suivante pour U_0:

$$A_d(U)\partial_z U - \partial_z(B_{d,d}(U)\partial_z U) = 0\,. \tag{2.5}$$

En $x = 0$, $U(z) = u_0(t,y,0) + U_0^*(t,y,z)$ doit aussi vérifier

$$U(0) = 0\,. \tag{2.6}$$

Donc, $u_0(t,y,0)$, la valeur au bord de u_0, est la limite en $z = +\infty$ d'une solution de (2.5) (2.6). Définissons:

$$\mathcal{C} = \big\{p \in \mathcal{U} : \begin{array}{l}(2.5)(2.6) \text{ admet une solution} \\ U \in C^\infty([0,\infty[;\mathcal{U}^*) \text{ telle que } p = \lim\limits_{z\to+\infty} U(z)\big\}\end{array} \tag{2.7}$$

La discussion formelle ci-dessus suggère que les conditions aux limites appropriées pour le problème hyperboliques sont

$$u_{|x=0} \in \mathcal{C}\,. \tag{2.8}$$

cf [Gr-Gu](voir aussi [Gi-Se], [Rou]). Pour démarrer la discussion nous supposons donnée une famille de solutions de (2.5) qui relient 0 à un ensemble de valeurs limites en $z = +\infty$:

Hypothèse 2.1. (H5) *On se donne une variété lisse $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$ et une application $W \in C^\infty(\mathcal{C} \times [0,\infty[;\mathbb{R}^N)$ telles que pour tout $p \in \mathcal{C}$, $W(p,\cdot)$ est une solution de (2.5)(2.6) qui converge vers p en $z = +\infty$. En outre, il existe $\delta > 0$ et C tels que pour tout $(p,z) \in \mathcal{C}\times\mathbb{R}_+$ on a $|W(p,z) - p| \le Ce^{-\delta z}$.*

Dans [Gr-Gu], il est montré que si $\mathcal{U}$ contient 0, il existe au voisinage de 0 une unique varité $\mathcal{C}$ et une unique connection W vérifiant l'Hypothèse 2.1. En outre, les conditions (2.8) sont maximales dissipatives, pour u petit. Dans le cas général, pour permettre des couches limites de grande amplitude, on doit partir d'une connexion W. Nous remplaçons alors la condition de dissipativité par une condition de type Kreiss-Lopatinski.

3 La condition de Evans-Kreiss-Lopatinski

La condition de stabilité uniforme pour les problèmes mixtes hyperboliques s'obtient de la façon suivante: on fixe un état $p \in \mathcal{C}$ et on linéarise l'équation (1.1) autour de la solution constante $u(t, y, x) = p$. On obtient ainsi un système à coefficients constants, qui après transformation de Fourier-Laplace en (y, t) devient problème aux limites pour un système différentiel en x, à coefficients constants dépendant des paramètres d'état p et de fréquence $\eta \in \mathbb{R}^{d-1}$ et $\lambda = \gamma + i\tau \in \mathbb{C}$, avec $\gamma = \operatorname{Re} \lambda > 0$:

$$\partial_x \hat{u} - G(p, \eta, \lambda)\hat{u} = \hat{f}\,, \qquad C(p, \eta, \lambda)\hat{u}(0) = 0 \tag{3.1}$$

L'hyperbolicité implique que les valeurs propres de G ne sont pas imaginaires pures lorsque $\gamma > 0$. Les solutions bornées de l'équation homogène sont de la forme

$$\hat{u} = e^{xG(p,\eta,\lambda)}\hat{a}\,, \qquad \hat{a} \in \mathbb{E}_-(p, \eta, \lambda)$$

où $\mathbb{E}_-(p, \eta, \lambda)$ est l'espace engendré par les vecteurs propres généralisés associés aux valeurs propres de $G(p, \eta, \lambda)$ situées dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} \mu < 0\}$. La condition de stabilité consiste à imposer que les problèmes (3.1) soient bien posés, "uniformément" par rapport aux paramètres. Plus précisément le *déterminant de Lopatinski* est la fonction

$$D_0(p, \eta, \lambda) := \det\big(\mathbb{E}_-(p, \eta, \lambda), \ker C(p, \eta, \lambda)\big) \tag{3.2}$$

où le déterminant est nul par convention si $\dim \mathbb{E}_- + \dim \ker C \neq N$ et est obtenu en prenant des bases orthonormées dans chaque espace dans le cas contraire. Le problème (3.1) est bien posé si et seulement si $D_0(p, \eta, \lambda) \neq 0$, et la condition de stabilité uniforme de Kreiss-Lopatinski s'écrit

$$\inf_{|\eta|^2+|\lambda|^2=1,\, \gamma>0} |D_0(p, \eta, \lambda)| \;> 0\,. \tag{3.3}$$

On procède de façon similaire pour le problème (1.2)(1.3). Pour $p \in \mathcal{C}$, ce qui joue le rôle de la solution constante p dans le cas hyperbolique est le *profil de couche limite*

$$w^\varepsilon(t, y, x) = W(p, x/\varepsilon) \tag{3.4}$$

qui interpole entre la valeur 0 sur le bord $x = 0$ et l'état constant p à l'intérieur. En négligeant le terme $F(u)$, l'équation linéarisée de l'équation (1.2) autour de w^ε s'écrit

$$\Big(\partial_t + \sum_{j=1}^{d} A_j^\sharp \partial_j - \varepsilon \sum_{j,k=1}^{d} B_{j,k}^\sharp \partial_{j,k}^2 + \frac{1}{\varepsilon} E^\sharp\Big)\dot{u} = \dot{f}\,, \qquad \dot{u}_{|x=0} = 0\,, \tag{3.5}$$

où les coefficients $A_j^\sharp$, $B_{j,k}^\sharp$ et $E^\sharp$ sont des fonctions régulières de W, $\partial_z W$ et $\partial_z^2 W$. Ce sont donc des fonctions C^∞ de p et de la variable $z = x/\varepsilon$. Le terme en ε^{-1} vient des dérivations appliquées à w^ε. On peut donc à nouveau opérer une transformation de Fourier-Laplace en (t,y). En notant $\widehat{u}(\hat\gamma + i\hat\tau, \hat\eta, x)$ [resp. $\widehat{f}(\hat\gamma + i\hat\tau, \hat\eta, x)$] la transformée de Fourier Laplace de $\dot u$ [resp. $\dot f$] et $\hat\zeta = (\hat\tau, \hat\eta, \hat\gamma)$ les fréquences, (3.5) donne l'équation

$$\Big(- \varepsilon B^\sharp_{d,d}(p, x/\varepsilon)\partial_x^2 + A(p, x/\varepsilon, \varepsilon\hat\eta)\partial_x + \frac{1}{\varepsilon} M(p, x/\varepsilon, \varepsilon\hat\zeta)\Big)\hat u = \hat f$$

où A et M sont des fonctions lisses de p, z et $\zeta = (\tau, \eta, \gamma)$ données par

$$\begin{aligned} M(z,p,\zeta) &= (i\tau + \gamma)\mathrm{Id} + \sum_{j=1}^{d-1} i\eta_j A^\sharp_j + \sum_{j,k=1}^{d-1} \eta_j\eta_k B^\sharp_{j,k} + E^\sharp\,, \\ A(z,p,\zeta) &= A^\sharp_d - \sum_{j=1}^{d-1} i\eta_j (B^\sharp_{j,d} + B^\sharp_{d,j})\,. \end{aligned}$$

On note que A est d'ordre 1 en η alors que M est d'ordre 1 en (τ,γ) et d'ordre 2 en η. Dans les variables

$$z := x/\varepsilon\,, \qquad \zeta = \varepsilon\hat\zeta \tag{3.6}$$

l'équation pour $u = \hat u$ s'écrit

$$\mathcal{L}u := \big(- B^\sharp_{d,d}\partial_z^2 + A\partial_z + M\big)u = f\,, \qquad u_{|z=0} = 0\,, \tag{3.7}$$

avec $f = \varepsilon\hat f$. C'est un système différentiel ordinaire, dépendant des paramètres p et ζ comme dans le cas hyperbolique, mais qui est maintenant à coefficients variables.

La condition de *stabilité faible* consiste à demander que pour tout $(p,\zeta) \in \mathcal{C} \times \mathbb{R}^{d+1}\backslash\{0\}$ avec $\gamma \geq 0$, le problème $\mathcal{L}u = 0$, $u(0) = 0$ n'a pas de solution non triviale bornée. En notant $\mathbb{E}_-(p,\zeta)$ l'espace des données initiales $(u(0), \partial_z u(0)) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ telles que la solution correspondante de $\mathcal{L}u = 0$ est bornée pour $z \in \mathbb{R}_+$ et Γ l'application $(\dot u, \dot v) \mapsto \dot u$ de $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^N$, la condition de stabilité faible revient à demander que $\mathbb{C}^{2N} = \mathbb{E}_- \oplus \ker\Gamma$. Cette condition est clairement nécessaire pour la stabilité du linéarisé (3.5): sa violation implique l'existence de modes à croissance exponentielle.

La condition de *stabilité uniforme* demande en outre une uniformité du comportement en ζ. À la différence du cas hyperbolique, $\mathcal{L}$ n'est pas homogène en ζ. On doit donc tenir compte non seulement du comportement lorsque γ tend vers 0 mais aussi des comportments lorsque ζ tend vers 0 et l'infini. En particulier, le comportement en 0 est crucial: il faut se souvenir que dans les variables originales, $\zeta = \varepsilon\hat\zeta$, cf (3.6).

On définit

$$D(p,\zeta) = \det\big(\mathbb{E}_-(p,\zeta), \ker\Gamma\big)\,. \tag{3.8}$$

C'est la *fonction d'Evans* du problème $(\mathcal{L},\Gamma)$ (cf [Z], [S]). Pour traiter convenablement les hautes fréquences, il faut tenir compte de la quasihomogénéité parabolique. Notant $\Lambda(\zeta) = (1 + \tau^2 + \gamma^2 + |\eta|^4)^{\frac14}$, et J_Λ l'application $(u,v) \mapsto (u, \Lambda^{-1}v)$ dans $\mathbb{C}^{2N}$, on introduit l'espace $\widetilde{\mathbb{E}}_-(u,\zeta) = J_\Lambda\mathbb{E}_-(u,\zeta)$. La fonction d'Evans modifiée est alors

$$\widetilde{D}(u,\zeta) = \det\big(\widetilde{\mathbb{E}}_-(u,\zeta), \ker\Gamma\big)\,. \tag{3.9}$$

Comme $\ker\Gamma$ est invariant par J_Λ, les zéros de D sont ceux de $\widetilde{D}$. De plus, lorsque ζ reste borné, il existe une constante C telle que $\frac{1}{C}|D| \leq |\widetilde{D}| \leq C|D|$, puisque dans le calcul des déterminants, l'introduction de J_Λ revient à un changement de produit scalaire dans $\mathbb{C}^{2N}$.

Hypothèse 3.1 (Condition de stabilité uniforme). *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour $u \in \mathcal{C}$ et $\zeta = (\tau, \gamma, \eta) \neq 0$ avec $\gamma \geq 0$ on a :*

$$|\widetilde{D}(u, \zeta)| \geq c \tag{3.10}$$

On renvoie à [MZ] pour des remarques et commentaires sur cette condition. La fonction d'Evans D pour (1.2) (1.3) et le déterminant de Lopatisnski D_0 du problème hyperbolique (1.1) (2.8) sont reliés. Pour $|\hat{\zeta}| = 1$ on a

$$D(p, \varepsilon\hat{\zeta}) = \alpha(p) D_0(p, \hat{\zeta}) + O(\varepsilon) \tag{3.11}$$

où $\alpha(u) \neq 0$ (cf [Rou], [MZ], [ZS] et la discussion après (4.12)). On en déduit:

Théorème 3.2. *Sous les Hypothèses* 1.1, 2.1, *l'Hypothèse* 3.1 *implique que le problème hyperbolique* (1.1) (2.8) *vérifie la condition de stabilité uniforme de Kreiss-Lopatinski.*

4 Analyse symbolique

Le point suivant de l'analyse est de traduire les conditions de stabilité en estimations. Dans le cas hyperbolique, on obtient des estimations des solutions de (3.1) à l'aide de symétriseurs de Kreiss (cf [Kr], [Ch-P]), qui sont des multiplicateurs de Fourier. On se propose ici d'esquisser la construction similaire pour les solutions de (3.7) qui est détaillée dans [MZ]. Pour fixer les idées, disons que le but est de prouver les estimations suivantes:

Théorème 4.1. *Sous les Hypothèses* 1.1, 2.1 *et* 3.1*, il existe C tel que pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^{d+1}$ avec $\gamma > 0$, tout $u \in H^2(\mathbb{R}_+)$ et f dans $L^2(\mathbb{R}_+)$ vérifiant* (3.7)*, on a*

$$h^2 \|u\| + h \|\partial_z u\| \leq C \|f\| \,. \tag{4.1}$$

Dans cet énoncé le poids $h(\zeta)$ vérifie

$$h(\zeta) \approx \begin{cases} (\gamma + |\zeta|^2)^{1/2} & \text{quand } \; |\zeta| \leq 1\,, \\ \langle \zeta \rangle & \text{quand } \; |\zeta| \geq 1\,. \end{cases}$$

où $\langle \zeta \rangle = (\tau^2 + \gamma^2 + |\eta|^4)^{1/4}$ est le poids parabolique.

Il est commode d'écrire (3.7) comme un système du premier ordre pour $U = {}^t(u, \partial_z u)$:

$$\partial_z U = \mathcal{G}(z, p, \zeta) U + F \,, \qquad \Gamma U(0) = 0 \,, \tag{4.2}$$

avec

$$\mathcal{G}(z, p, \zeta) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ (B^\sharp_{d,d})^{-1} M & (B^\sharp_{d,d})^{-1} A \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \quad \Gamma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u \,.$$

Comme $W(p, z)$ converge vers p lorsque z tend vers $+\infty$, les coefficients de $\mathcal{G}$ ont eux aussi des limites:

$$M^\infty(p, \zeta) = (i\tau + \gamma)\mathrm{Id} + \sum_{j=1}^{d-1} i\eta_j A_j(p) + \sum_{j,k=1}^{d-1} \eta_j \eta_k B_{j,k}(p)$$

$$A^\infty(p, \zeta) = A_d(p) - \sum_{j=1}^{d-1} i\eta_j (B_{j,d}(p) + B_{d,j}(p)) \,.$$

L'Hypothèse 2.1 implique alors, avec une notation évidente, que l'on a:

$$|\mathcal{G}(z,p,\zeta) - \mathcal{G}^\infty(p,\zeta)| \leq Ce^{-\delta z}\,,$$

avec $\delta > 0$ et une constante C uniforme pour ζ borné.

Un ingrédient fondamental de [MZ] est d'utiliser cette information pour conjuguer le sytème (4.2) à un système à coefficients constants.

Lemme 4.2 (Réduction aux coefficients constants). *Sous l'Hypothèse* 2.1*, pour tout* $(\underline{p},\underline{\zeta}) \in \mathcal{C}\times\mathbb{R}^{d+1}$ *il existe un voisinage* ω *de* $(\underline{p},\underline{\zeta})$ *et une matrice* $\mathcal{W}(z,p,\zeta)$ C^∞ *sur* $[0,\infty[\times\omega$ *tels que*

i) $\mathcal{W}$ *et* $\mathcal{W}^{-1}$ *sont bornées et il existe* $\theta > 0$ *tel que*

$$|\mathcal{W}(z,p,\zeta) - \mathrm{Id}| \leq Ce^{-\theta z}$$

ii) pour tout $(p,\zeta) \in \omega$*,* $\mathcal{W}(\cdot,p,\zeta)$ *vérifie*

$$\partial_z\mathcal{W} = \mathcal{G}(z)\mathcal{W}(z) - \mathcal{W}(z)\mathcal{G}^\infty.$$

Par la transformation

$$U_1(z) = \mathcal{W}^{-1}(z,p,\zeta)U(z)\,, \qquad F_1(z) = \mathcal{W}^{-1}(z,p,\zeta)F(z) \tag{4.3}$$

le système (4.2) est alors équivalent au système à coefficients constants

$$\partial_z U_1 = \mathcal{G}^\infty(p,\zeta)U_1 + F_1\,, \qquad \Gamma_1(p,\zeta)U_1(0) = 0\,, \tag{4.4}$$

où $\Gamma_1(\zeta) := \Gamma\mathcal{W}^{-1}(0,p,\zeta)$.

Le comportement asymptotique en z des solutions de (3.7) est donc donné par celui des solutions de (4.4), donc par l'analyse spectrale de $\mathcal{G}^\infty$. Les solutions bornées de l'équation homogène sont de la forme

$$U_1(z) = e^{z\mathcal{G}^\infty(p,\zeta)}U_1(0)\,, \qquad U_1(0) \in \mathbb{F}_-(p,\zeta)$$

où $\mathbb{F}_-(p,\zeta)$ est l'espace engendré par les vecteurs propres généralisés associés aux valeurs propres de $\mathcal{G}^\infty(p,\zeta)$ situées dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}\,\mu < 0\}$. L'Hypothèse (H3) implique que pour $\zeta \neq 0$ avec $\gamma \geq 0$, $\mathcal{G}^\infty$ a exactement N valeurs propres dans $\{\mathrm{Re}\,\mu < 0\}$. On a donc

$$\mathbb{E}_-(p,\zeta) = \mathcal{W}(0,p,\zeta)\mathbb{F}_-(p,\zeta) \tag{4.5}$$

et (cf [Rou], [MZ]):

Lemme 4.3. *Sous les Hypothèses* 1.1 *et* 2.1*, pour* $p \in \mathcal{C}$ *et* $\zeta = (\tau,\eta,\gamma) \neq 0$ *avec* $\gamma \geq 0$*,* $\mathbb{E}_-(p,\zeta)$ *est de dimension* N *et dépend de façon* C^∞ *des paramètres* (p,ζ)*.*

En particulier, cela dit que l'on a le bon nombre de conditions aux limites dans le problème (3.7).

Rappelons maintenant l'essence de la “méthode des symétriseurs” pour une équation de la forme:

$$\partial_x u = G(x)u + f\,, \quad \Gamma u(0) = 0\,. \tag{4.6}$$

Un symétriseur est une famille C^1 de fonctions $x \mapsto S(x)$ telle qu'il existe des constantes C_0, $h > 0$, $c > 0$, et C_1 telles que

$$\begin{aligned} &\forall x\,, \quad S(x) = S(x)^* \quad \text{et} \quad |S(x)| \le C_0\,,\\ &\forall x\,, \quad 2\mathrm{Re}\, S(x)G(x) + \partial_x S(x) \ge 2h\mathrm{Id}\,,\\ &S(0) \ge cId - C_1\Gamma^*\Gamma\,. \end{aligned}$$

On a alors:

Lemme 4.4. *Si S est un symétriseur, alors pour tout u de classe C^1 et à support compact dans* $[0, \infty[$.

$$h\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} + c|u(0)|^2 \le \frac{C_0^2}{h}\|\partial_x u - Gu\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} + C_1|\Gamma u(0)|^2\,. \tag{4.7}$$

La preuve des estimations (5.3) repose sur la construction de symétriseurs pour $\mathcal{G}$. La construction est différente selon la taille des fréquences ζ.

1) Hautes fréquences. Dans ce cas, c'est le comportement parabolique qui domine. Introduisons les “coordonnées polaires paraboliques à l'infini”:

$$\zeta = (\tau, \eta, \gamma) = (\lambda^{-2}\hat\tau, \lambda^{-1}\hat\eta, \lambda^{-2}\hat\gamma) \quad \text{avec} \quad \lambda = (\tau^2 + \gamma^2 + |\eta|^4)^{-\frac{1}{4}}.$$

de sorte que $\hat\zeta = (\hat\tau, \hat\eta, \hat\gamma)$ appartient à la “sphère” $\hat S^d := \{(\hat\tau^2 + \hat\gamma^2 + |\hat\eta|^4) = 1\}$. On a

$$M(z,p,\zeta) = \lambda^{-2}\hat M(z,p,\hat\zeta,\lambda) \quad A(z,p,\zeta) = \lambda^{-1}\hat A(z,p,\hat\zeta,\lambda)$$

où $\hat M$ et $\hat A$ sont C^∞ en $(z, p, \check\zeta, \lambda)$ pour λ petit. On réduit $\mathcal{G}$ au “premier ordre” en posant

$$u_2 = \lambda^{-1}u, \quad v_1 = v.$$

Alors (4.2) est équivalent à

$$\partial_z U_2 = \lambda^{-1}\hat{\mathcal{G}}_2(z)U_2 + F\,, \quad \Gamma U_2(0) = u_2(0) = 0\,, \tag{4.8}$$

$$\hat{\mathcal{G}}_2(z,p,\hat\zeta,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ (B^\sharp_{d,d})^{-1}\hat{\mathcal{M}} & (B^\sharp_{d,d})^{-1}\hat{\mathcal{A}} \end{pmatrix}.$$

En $\lambda = 0$, $\hat{\mathcal{G}}_2$ se déduit uniquement de la partie parabolique $B_{j,k}\partial_j\partial_k$ de l'équation. Par ailleurs, les coefficients de $\hat{\mathcal{M}}$ et $\hat{\mathcal{A}}$ sont des fonctions lisses de $W(p,z)$ et on a

$$\hat{\mathcal{G}}_2(z,p,\hat\zeta,\lambda) = \widetilde{\mathcal{G}}_2(W(p,z),\hat\zeta,\lambda).$$

De plus $w(p,\cdot)$ prend ses valeurs dans un compact de $\mathcal{U}^*$. L'Hypothèse (H1) implique que le spectre de $\widetilde{\mathcal{G}}_2(w,z,0)$ reste dans un compact qui ne coupe pas l'axe imaginaire pur. Ceci reste vrai pour λ petit et il existe une matrice $\mathcal{V}(w,\hat\zeta,\lambda)$, fonction C^∞ de ses arguments et telle que

$$\mathcal{V}^{-1}\widetilde{\mathcal{G}}_2\mathcal{V} = \begin{pmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & P_- \end{pmatrix}$$

où les blocs $P_\pm$ sont de taille N et ont leur spectre dans un compact de $\{\pm\mathrm{Re}\,\mu > 0\}$. On construit alors un symétriseur $\widetilde{\mathcal{S}}(w, \hat\zeta, \lambda)$ de $\widetilde{\mathcal{G}}_2$ sous la forme

$$\widetilde{\mathcal{S}} = (\mathcal{V}^{-1})^* \begin{pmatrix} \kappa_+ S_+ & 0 \\ 0 & -\kappa_- S_- \end{pmatrix} \mathcal{V}^{-1}$$

avec $S_\pm$ symétriques, définies positives et vérifiant

$$\mathrm{Re}\,(S_+ G_+) \geq \mathrm{Id}\,, \quad -\mathrm{Re}\,(S_- G_-) \geq \mathrm{Id}\,.$$

En utilisant l'Hypothèse 3.1 pour les hautes fréquences ζ, on montre qu'on peut choisir $\kappa+ > 0$ et $\kappa_- > 0$ et C tels que

$$\mathrm{Re}\,\widetilde{\mathcal{S}}(0, \hat\zeta, 0) + C\Gamma^*\Gamma \geq \mathrm{Id}$$

On construit alors un symétriseur de $\lambda^{-1}\hat{\mathcal{G}}_2$ sous la forme

$$\hat{S}(z, p, \hat\zeta, \lambda) = \widetilde{\mathcal{S}}(w(z, p), \hat\zeta, \lambda) \tag{4.9}$$

Il vérifie

$$2\mathrm{Re}\,(\hat{\mathcal{S}}\lambda^{-1}\hat{\mathcal{G}}_2) + \partial_z\mathcal{S} \geq 2\lambda^{-1}\mathrm{Id} - |\partial_z\mathcal{S}| \geq \lambda^{-1}\mathrm{Id} \tag{4.10}$$

$$\hat{\mathcal{S}}_{|z=0} \geq \mathrm{Id} - C\Gamma^*\Gamma\,, \tag{4.11}$$

la seconde inegalité dans (4.10) étant satisfaite pour λ petit. En utilisant le Lemme 4.4 et en remontant à U, on obtient l'estimation (5.3) pour λ petit, c'est-à-dire pour $|\zeta|$ grand.

2) Moyennes fréquences. Autour d'un point $\underline{\zeta} \neq 0$, avec $\gamma \geq 0$, on utilise d'abord le Lemme 4.2 et la conjugaison (4.3) pour se ramener à montrer les estimations (5.3) pour les solutions de (4.4). L'équation est à coefficients constants et on construit les symétriseurs comme simples multiplicateurs de Fourier.

L'Hypothèse (H3) implique que pour ζ dans un voisinage de $\underline{\zeta}$, le spectre de $\mathcal{G}^\infty(w, \zeta)$ ne rencontre pas l'axe imaginaire pur. Il existe $\mathcal{V}(w, \hat\zeta, \lambda)$ telle que

$$\mathcal{V}^{-1}\widetilde{\mathcal{G}}^\infty\mathcal{V} = \begin{pmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & P_- \end{pmatrix}$$

où les blocs $P_\pm$ sont de taille N et ont leur spectre dans un compact de $\{\pm\mathrm{Re}\,\mu > 0\}$. En utlisant l'Hypothèse 3.1, on construit un symétriseur $\mathcal{S}(p, \zeta)$ pour $\mathcal{G}^\infty(p, \zeta)$ qui vérifie

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\,(\hat{\mathcal{S}}\mathcal{G}^\infty) \geq \mathrm{Id} \\ &\hat{\mathcal{S}}_{|z=0} \geq \mathrm{Id} - C\Gamma_1^*\Gamma_1. \end{aligned}$$

La réduction aux coefficients constants a éliminé le terme incontrôlable $\partial_z\mathcal{S}$. En utilisant le Lemme 4.4 et en remontant à U, on obtient l'estimation (5.3) au voisinage de tout point $\underline{\zeta} \neq 0$ tel que $\underline{\gamma} \geq 0$.

3) Basses fréquences. Habituellement, on néglige les basses fréquences. Ici il faut se souvenir que l'on a fait la mise à l'échelle $\zeta = \varepsilon\hat\zeta$ (cf (3.6)) et donc le régime basse fréquence en ζ est en fait le régime primordial. On applique d'abord le Lemme 4.4 autour de $\underline{\zeta} = 0$ et la conjugaison (4.3) pour se ramener à l'équation à coefficients constants (4.4). En $\zeta = 0$, on a

$$\mathcal{G}^\infty(p, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ 0 & B_{d,d}^{-1}(p)A_d(p) \end{pmatrix}.$$

On voit alors que zéro est une valeur propre de multiplicité N. Pour ζ petit, il existe donc $\mathcal{V}(p,\zeta)$ telle que

$$\mathcal{V}^{-1}(p,\zeta)\mathcal{G}^{\infty}(p,\zeta)\mathcal{V}(p,\zeta) = \begin{pmatrix} H(p,\zeta) & 0 \\ 0 & P(p,\zeta) \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

où P n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire pur et $H(p,0)=0$. On construit des symétriseurs séparément pour H et P. Pour P, on procède comme ci-dessus pour construire des symétriseurs $S_P(p,\zeta)$ tels que $\operatorname{Re} S_P P \geq \mathrm{Id}$. Pour H, on doit faire une analyse détaillée autour de $\zeta=0$. On passe en coordonnées polaires:

$$\zeta = \rho\check{\zeta} = \rho(\check{\tau},\check{\gamma},\check{\eta})\,, \quad \rho = |\zeta|\,, \quad |\check{\zeta}| = 1\,, \quad H(p,\zeta) = \rho\check{H}(p,\check{\zeta},\rho)\,.$$

On remarque alors que le symbole $\check{H}(p,\check{\zeta},0)$ est exactement celui que l'on obtient quand on opère la réduction par transformation de Fourier-Laplace de l'opérateur hyperbolique $L(p,\partial)$. C'est de là que vient essentiellement la relation (3.11). Suivant [Mé3] l'Hypothèse de multiplicité constante (H2) implique que l'hypothèse de "structure de blocs" de Majda est satisfaite et la construction de Kreiss fournit des symétriseurs $\check{S}(p,\check{\zeta},0)$ pour $\check{H}(p,\check{\zeta},0)$ (cf [Kr], [Ch-P], [Maj]). Ils vérifient en particulier:

$$\operatorname{Re}\big(\check{S}(p,\check{\zeta},0)\check{H}(p,\check{\zeta},0)\big) \geq \check{\gamma}\mathrm{Id}\,.$$

Une partie technique importante de [MZ] consiste à étendre la construction de ces symétriseurs aux perturbations $\check{H}(p,\check{\zeta},\rho)$, pour $\rho \geq 0$ petit. On a alors

$$\operatorname{Re}\big(\check{S}(p,\check{\zeta},\rho)\check{H}(p,\check{\zeta},\rho)\big) \geq (\check{\gamma}+\rho)\mathrm{Id}\,.$$

Pour $H=\rho\check{H}$, on a donc

$$\operatorname{Re}\big(\check{S}(p,\check{\zeta},\rho)H(p,\check{\zeta},0) \geq (\gamma+\rho^2)\mathrm{Id}\,.$$

On voit apparaître ici le poids $h^2(\zeta) = \gamma+\rho^2 = \gamma+|\zeta|^2$ de (4.1). Le symétriseur

$$\mathcal{S} = (\mathcal{V}^{-1})^* \begin{pmatrix} \check{S}(p,\check{\zeta},\rho) & 0 \\ 0 & S_P(p,\zeta) \end{pmatrix} \mathcal{V}^{-1} \tag{4.13}$$

verifie donc

$$\operatorname{Re}\big(\mathcal{S}(p,\zeta)\mathcal{G}^{\infty}(p,\zeta)\big) \geq h(\zeta)\mathrm{Id}\,.$$

En utilisant l'Hypothèse 3.1, on montre que l'on peut aussi choisir S_P et $\check{S}$ tels qu'il existe une constante C indépendante de (p,ζ) pour laquelle

$$\mathcal{S} + C\Gamma_1^*\Gamma_1 \geq \mathrm{Id}\,. \tag{4.14}$$

On a donc construit un symétriseur pour $\mathcal{G}^{\infty}$. On en déduit (4.1) pour les basses fréquences (cf [MZ]).

5 Stabilité linéaire et non linéaire

Le résultat principal de [MZ] concerne la stabilité uniforme en ε du problème (1.2) (1.3). Soit $u_0 \in W^{2,\infty}([-T_0, T_0] \times \mathbb{R}^d_+)$ vérifiant

$$u_0(t, y, 0) \in \mathcal{C}\,, \qquad (t, y) \in [-T_0, T_0] \times \mathbb{R}^{d-1} \tag{5.1}$$

L'idée est évidemment d'appliquer l'analyse à une solution u_0 de (1.1) (2.8), mais on ne retient pour le moment que l'information (5.1). Soit

$$u_0^\varepsilon(t, y, x) = \widetilde{W}(u_0(t, y, x)\,, x/\varepsilon)$$

où $\widetilde{W}$ est une extension convenable de W (définie initialement sur $\mathcal{C} \times \mathbb{R}_+$)). On écrit les équations linéarisées de (1.2) (1.3) en u_0^ε sous la forme

$$\mathcal{P}_{u_0^\varepsilon}(t, x, \partial_t, \partial_x)u = f\,, \quad u_{|x=0} = 0\,. \tag{5.2}$$

Théorème 5.1. *Sous les Hypothèses* 1.1, 2.1 *et* 3.1*, il existe C et ε_0 tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et tout $f \in L^2([-T_0, T_0] \times \mathbb{R}^d_+)$, nul pour $t < 0$, l'équation* (5.2) *a une unique solution nulle pour $t < 0$. De plus*

$$\|u\|_{L^2} + \sqrt{\varepsilon}\|\nabla_{y,x}u\|_{L^2} + \varepsilon^{3/2}\|\nabla^2_{y,x}u\|_{L^2} \le C\|f\|_{L^2}\,. \tag{5.3}$$

(Les normes L^2 sont prises sur $[-T_0, T_0] \times \mathbb{R}^d_+$).

Donnons quelques indications sur la preuve. Comme pour les problèmes hyperboliques, il suffit de montrer des estimations à poids $e^{-\gamma t}$ pour γ assez grand et pour des solutions sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d_+$ (cf [Ch-P]). On réduit (5.2) à un système du premier ordre en ∂_x pour $U = e^{-\gamma t}(u, \varepsilon\partial_x u)$ de la forme

$$\partial_x U = \frac{1}{\varepsilon}G(t, y, x, \partial_t, \partial_y, \gamma)U + F\,.$$

Modulo des erreurs petites devant le membre de gauche de (5.3), le symbole de G est

$$G(t, y, x, \zeta) = \mathcal{G}(\frac{x}{\varepsilon}, u_0(t, y, x), \varepsilon\zeta)\,, \qquad \zeta = (\tau, \eta, \gamma)\,.$$

Au paragraphe précédent, on a construit des symmétriseurs $\mathcal{S}(z, p, \zeta)$ pour $\mathcal{G}(z, p, \zeta)$. L'idée est simplement de construire des symétriseurs pour G en quantifiant ces symboles en opérateurs

$$S(t, y, x, D_t, D_y, \gamma) = \mathcal{S}(\frac{x}{\varepsilon}, u_0(t, y, x), \varepsilon D_t, \varepsilon D_y, \varepsilon\gamma)\,.$$

C'est ce qui est fait dans [MZ] en utilisant un calcul paradifférentiel tangentiel adapté. Quelques remarques sur le cahier des charges de ce calcul. D'une part, pour les hautes fréquences, les symboles on une quasi-homogénéité de type parabolique (cf (4.9)). On utilise donc un *calcul quasi-homogène*. Ensuite, on voit que la quantification est *semi-classique*, de type $\varepsilon D_{t,y}$ ce ne correspond pas aux dilatations associées à la quasi-homogénéité. Pour rendre compatibles ces exigences, on a choisi de mesurer la régularité en (t, y) des symboles dans des espaces homogènes. Enfin, dans les basses fréquences, on voit apparaître sur certaines composantes des symboles

$$\check{S}(u_0(t, y, x), \frac{\zeta}{|\zeta|}, \varepsilon\zeta)$$

(cf (4.13)) qui sont des symboles de type homogène (non semi-classique) en ζ. Il faut alors, notamment pour utiliser (4.14)), vérifier la compatibilité et le bon recollement des calculs.

Après les estimations L^2, on donne des estimations des dérivées. À cause de la couche limite, il n'y a pas d'estimations uniformes pour les dérivées normales. C'est pourquoi on se restreint aux dérivations tangentes au bord. Introduisons les champs:

$$Z_0 = \partial_t \,, \quad Z_j = \partial_{y_j} \text{ pour } 1 \le j \le d-1 \,, \quad Z_d = \frac{x}{1+x}\partial_x$$

et les espaces de fonctions conormales

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^m(U) := \big\{ u \in L^2(U) \,:\, Z_{k_1} \dots Z_{k_p} u \in L^2(U) \,, \\ \forall p \le m \,, \forall (k_1, \dots, k_p) \in \{0, \dots d\}^p \,\big\}\end{aligned}$$

De même on définit les espaces $\mathcal{W}^\mu$ en remplaçant L^2 par L^∞.

Supposons que u_0 vérifiant toujours (5.1) appartient maintenant à l'espace $W^{m+2,\infty}([-T_0,T_0) \times \mathbb{R}^d_+)$.

Théorème 5.2. *Il existe $C > 0$ et ε_0 tels que pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et $f \in \mathcal{H}^m([-T_0,T_0] \times \mathbb{R}^d_+)$ nul dans $t < 0$, la solution nulle dans $t < 0$ de (5.2) appartient à l'espace $\mathcal{H}^m$ et vérifie*

$$\|u\|_{\mathcal{H}^m} \,+\, \sqrt{\varepsilon}\|\nabla_{y,x} u\|_{\mathcal{H}^m} + \varepsilon^{3/2}\|\nabla^2_{y,x} u\|_{\mathcal{H}^m} \le C\|f\|_{\mathcal{H}^m}$$

Si en outre $m \ge 2 + \frac{d+1}{2}$ et $f \in L^\infty([-T_0,T_0] \times \mathbb{R}^d_+)$, alors $u \in \mathcal{W}^2$ et vérifie

$$\|u\|_{\mathcal{W}^2} \,+\, \varepsilon\|\partial_x u\|_{\mathcal{W}^1} + \varepsilon^2\|\partial_x^2 u\|_{L^\infty} \le C\big(\|f\|_{\mathcal{H}^m} + \varepsilon\|f\|_{L^\infty}\big) \,.$$

Une fois établie la stabilité linéaire, on peut étudier la stabilité non linéaire. On se contente ici de donner un théorème de prolongement de solutions de (1.2).

Sous les Hypothèses 1.1, 2.1 et 3.1, le Théorème 3.2 implique que l'on peut résoudre le problème mixte (1.1) (2.8) avec des données initiales qui vérifient suffisemment de conditions de compatibilité (cf [Maj], [Ra-Ma], [Mok], [Mé2]).

Supposons que $u = 0$ est solution aussi bien de (1.1) que de (1.2) dans $t < 0$. Par le Theorème 3.2, en se donnant un terme source régulier f_0 nul dans le passé, on peut supposer que l'on connait une solution $u_0 \in H^{s_0}([-T_0,T_0] \times \mathbb{R}^d_+)$ de

$$L(u_0, \partial)u_0 = F(u_0) + f_0 \,, \qquad u_{|x=0} \in \mathcal{C} \,, \qquad u_0 = 0 \text{ for } t < 0 \,.$$

Supposons que les indices m et s_0 vérifient

$$m > \frac{d+1}{2} \,, \qquad s_0 > m + 3\frac{d+1}{2} \,.$$

On s'intéresse alors au problème

$$L(u, \partial)u - \varepsilon \sum_{1 \le j,k \le d} \partial_j\big(B_{j,k}(u)\partial_k u\big) = F(u) + f_0 \,, \qquad u_{\,|x=0} = 0 \,. \tag{5.4}$$

Théorème 5.3. *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ le problem (5.4) a une unique solution u^ε définie sur $[-T_0,T_0] \times \mathbb{R}^d_+$ et nulle pour $t < 0$. En outre,*

$$\|u^\varepsilon - u_0^\varepsilon\|_{\mathcal{H}^m} \,+\, \|u - u_0^\varepsilon\|_{L^\infty} = O(\varepsilon) \,.$$

References

[AGJ] J. Alexander-R. Gardner-C.K.R.T. Jones, *A topological invariant arising in the analysis of traveling waves.* J. Reine Angew. Math. 410 (1990) 167–212.

[AMPZ] A. Azevedo-D. Marchesin-B. Plohr-K. Zumbrun, *Nonuniqueness of solutions of Riemann problems.* Z. Angew. Math. Phys. 47 (1996), 977–998.

[BBB] C.Bardos-D.Brezis-H.Brezis, *Perturbations singulières et prolongement maximaux d'opérateurs positifs*, Arch.Rational Mech. Anal., 53 (1973), 69–100.

[Ba-Ra] C.Bardos-J.Rauch *Maximal positive boundary value problems as limits of singular perturbation problems*, Trans. Amer.Math.Soc., 270 (1982), 377–408.

[Ch-P] J. Chazarain-A. Piriou, *Introduction to the theory of linear partial differential equations,* Translated from the French. Studies in Mathematics and its Applications, 14. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1982. xiv+559 pp. ISBN: 0-444-86452-0.

[E1] J.W. Evans, *Nerve axon equations: I. Linear approximations.* Ind. Univ. Math. J. 21 (1972) 877–885.

[E2] J.W. Evans, *Nerve axon equations: II. Stability at rest.* Ind. Univ. Math. J. 22 (1972) 75–90.

[E3] J.W. Evans, *Nerve axon equations: III. Stability of the nerve impulse.* Ind. Univ. Math. J. 22 (1972) 577–593.

[E4] J.W. Evans, *Nerve axon equations: IV. The stable and the unstable impulse.* Ind. Univ. Math. J. 24 (1975) 1169–1190.

[GZ] R. Gardner-K. Zumbrun, *The Gap Lemma and geometric criteria for instability of viscous shock profiles.* Comm. Pure Appl. Math. 51 (1998), 797–855.

[Gi-Se] M. Gisclon-D. Serre, *Conditions aux limites pour un système strictement hyperbolique fournies par le schéma de Godunov.* RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. 31 (1997), 359–380.

[Gr] E. Grenier *On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations*, Comm. Pure Appl. Math. 53 (2000), no. 9, 1067–1091.

[Gr-Gu] E. Grenier-O. Guès, *Boundary layers for viscous perturbations of noncharacteristic quasilinear hyperbolic problems.* J. Differential Equations 143 (1998), 110–146.

[Gr-Ro] E. Grenier-F. Rousset, *Stability of one-dimensional boundary layers by using Green's functions.* Comm. Pure Appl. Math. 54 (2001), 1343–1385.

[Gu] O.Guès, *Perturbations visqueuses de problèmes mixtes hyperboliques et couches limites*, Ann.Inst.Fourier, 45 (1995),973–1006.

[GMWZ1] O.Guès-G.Métivier-M.Williams-K.Zumbrun *Multidimensional viscous shocks I: Degenerate symmetrizers and long time stability* preprint

[GMWZ2] O.Guès-G.Métivier-M.Williams-K.Zumbrun *Multidimensional viscous shocks II: The small viscosity limit* preprint.

[HoZ] D. Hoff-K. Zumbrun, *Multi-dimensional diffusion waves for the Navier-Stokes equations of compressible flow.* Indiana Univ. Math. J. 44 (1995), 603–676.

[J] C.K.R.T. Jones, *Stability of the travelling wave solution of the FitzHugh–Nagumo system.* Trans. Amer. Math. Soc. 286 (1984), 431–469.

[K] T. Kapitula, *On the stability of travelling waves in weighted L^∞ spaces.* J. Diff. Eqs. 112 (1994), 179–215.

[Kr] H.O. Kreiss, *Initial boundary value problems for hyperbolic systems,* Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970) 277-298.

[Lio] J.L.Lions, *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal*, Lectures Notes in Math., 323, Sringer Verlag, 1973.

[Maj] A. Majda, *The stability of multi-dimensional shock fronts – a new problem for linear hyperbolic equations.* Mem. Amer. Math. Soc. 275 (1983).

[Mé1] G. Métivier, *Interaction de deux chocs pour un système de deux lois de conservation, en dimension deux d'espace.* Trans. Amer. Math. Soc. 296 (1986) 431–479.

[Mé2] G. Métivier, *Stability of multidimensional shocks.* Advances in the theory of shock waves, 25–103, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 47, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.

[Mé3] G.Métivier. *The Block Structure Condition for Symmetric Hyperbolic Problems*, Bull. London Math.Soc., 32 (2000), 689–702

[MZ] G.Métivier-K.Zumbrun, *Viscous Boundary Layers for Noncharacteristic Nonlinear Hyperbolic Problems*, preprint.

[Mok] A.Mokrane *Problèmes mixtes hyperboliques non linéaires*, Thesis, Université de Rennes 1, 1987.

[PW] R. L. Pego-M.I. Weinstein, *Eigenvalues, and instabilities of solitary waves.* Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 340 (1992), 47–94.

[Ra-Ma] J. Rauch-F. Massey, *Differentiability of solutions to hyperbolic initial boundary value problems.* Trans. Amer. Math. Soc. 189 (1974) 303-318.

[Rou] F. Rousset, *Inviscid boundary conditions and stability of viscous boundary layers.* Asymptotic. Anal. 26 (2001), no. 3-4, 285–306.

[S] D. Serre, *Sur la stabilité des couches limites de viscosité.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 51 (2001), 109–130.

[Tay] M.Taylor. *Partial Differential Equations*III, Applied Mathematical Sciences 117, Springer, 1996.

[ZS] K. Zumbrun-D.Serre, *Viscous and inviscid stability of multidimensional planar shock fronts.* Indiana Univ. Math. J. 48 (1999), 937–992.

[ZH] K. Zumbrun-P. Howard, *Pointwise semigroup methods and stability of viscous shock waves.* Indiana Mathematics Journal V47 (1998), 741–871.

[Z] K. Zumbrun, *Multidimensional stability of planar viscous shock waves.* Advances in the theory of shock waves, 307–516, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 47, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.