



Centre de  
Mathématiques  
Laurent Schwartz



ÉCOLE  
POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

**Equations aux  
Dérivées  
Partielles**

**2002-2003**

Nicolas Depauw

**Non-unicité du transport par un champ de vecteurs presque  $BV$**

*Séminaire É. D. P.* (2002-2003), Exposé n° XIX, 9 p.

<[http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP\\_2002-2003\\_\\_\\_\\_A19\\_0](http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2002-2003____A19_0)>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.  
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

# Non-unicité du transport par un champ de vecteurs presque $BV$

Nicolas Depauw

## Résumé

Nous exposons un exemple de non unicité du problème de Cauchy non caractéristique pour l'équation de transport associé à un champ de vecteurs borné, à divergence nulle et néanmoins à coefficients peu réguliers.

---

## 1 Introduction

On considère, sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ , les opérateurs différentiels linéaires du premier ordre à coefficients variables

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 : u &\mapsto \mathcal{L}_0(u) := a \cdot \partial_x(u) = \sum_i a_i \partial_i u, \\ \mathcal{L}_1 : u &\mapsto \mathcal{L}_1(u) := \partial_x \cdot (au) = \sum_i \partial_i(a_i u),\end{aligned}$$

reliés par les égalités  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 + \partial_x \cdot a$  et  $\mathcal{L}'_0 = -\mathcal{L}_1$ .

Un cadre raisonnable pour étudier l'unicité des solutions de l'équation  $\mathcal{L}_0(u) = f$  consiste à supposer, comme on le fait dans tout cet exposé, que les trois conditions suivantes sont vérifiées.

- C1** Le champ de vecteur est localement borné :  $a \in L^\infty_{\text{loc}}$ . Ainsi la vitesse de propagation de l'équation de transport est finie et cela permet de localiser facilement l'équation.
- C2** La divergence du champ est localement intégrable :  $\partial_x \cdot a \in L^1_{\text{loc}}$ . Ainsi le transport préserve la mesure de Lebesgue à une densité près localement intégrable.
- C3** On se donne une hypersurface  $S$  localement Lipschitz et on suppose  $\mathcal{L}_0$  positivement transverse à  $S$ . Cela signifie que pour tout  $x_0 \in S$ , il existe un voisinage  $V_0$  de  $x_0$  relativement compact dans  $\Omega$ , une fonction  $\phi_0 \in W^1_\infty(V_0)$  (*i.e* bornée à gradient borné) et un réel  $r_0 > 0$  tel que  $S \cap V_0 = \{\phi_0 = 0\}$  et que sur  $V_0$ ,  $L_0(\phi_0) \geq r_0$ .

*Remarque 1.* Les bornes sur les dérivées de  $\phi_0$  et sur  $a$  donnent un sens à  $L_0(\phi_0)$ . Plus généralement, on peut vérifier que  $\mathcal{L}_0$  et  $\mathcal{L}_1$  opèrent continûment de  $W^1_{1,l} \cap L^\infty_{\text{loc}}$  dans  $L^1_{\text{loc}}$  et de  $L^\infty_{\text{loc}}$  dans  $W^{-1}_{\infty,l} + L^1_{\text{loc}}$ .

Dans ce cadre, Colombini et Lerner [5] ont obtenu un résultat d'unicité des solutions localement bornées, sous des hypothèses supplémentaires portant sur les dérivées de  $a$ . L'exemple que nous voulons développer dans cet exposé montre que ces hypothèses sont optimales, dans un certain sens. Aussi nous paraît-il indispensable de présenter tout d'abord les arguments cruciaux de leur résultat. Ensuite nous détaillerons l'exemple. Enfin, nous ferons le point sur quelques questions qu'il soulève.

## 2 Trois étapes vers l'unicité

Le théorème de Colombini et Lerner est compliqué à énoncer. Mais on le comprend bien quand on met bout à bout les trois ingrédients principaux.

### 2.1 Unicité des solutions positives

**Proposition 2.1.** *Soit  $c$  dans  $L^1_{loc}$ , et  $u$  dans  $L^\infty_{loc}$  solution de  $\mathcal{L}_0(u) \leq cu$ . Supposons que la partie positive de  $c + \partial_x \cdot a$  est bornée localement :  $(c + \partial_x \cdot a)_+ \in L^\infty_{loc}$ . Si, pour tout  $x_0$  dans  $S$ ,  $u$  est nulle sur  $\{\phi_0 < 0\}$  et si, dans  $\Omega$ ,  $u$  est positive, alors  $u$  est nulle au voisinage de  $S$ .*

La preuve repose sur une technique de localisation-convexification pour rendre rigoureux l'argument intuitif qui revient essentiellement à tester l'inéquation  $\mathcal{L}_0(u) \leq cu$  contre une fonction  $v$  bien choisie : on souhaite que  $v$  soit positive et petite et en même temps que  $-\mathcal{L}_0(v)$  soit supérieur à  $r_0$ , par exemple en prenant  $(\lambda - \phi_0)_+$ .

### 2.2 Capacité

Pour s'affranchir de l'hypothèse de positivité, on veut justifier que  $\mathcal{L}_0(u) = cu$  entraîne  $\mathcal{L}_0(u^2) = 2cu^2$  ou bien  $\mathcal{L}_0(|u|) = c|u|$ . À défaut de pouvoir prouver cela dans  $\Omega$ , on peut tenter de le faire dans un ouvert  $\Omega_0$  inclus dans  $\Omega$ , à condition que le complémentaire  $\Omega \setminus \Omega_0$  ne soit pas trop gros.

**Proposition 2.2.** *Soit  $F$  un fermé de  $\Omega$  et  $f$  dans  $L^1_{loc}(\Omega)$ . Soit  $u$  dans  $L^\infty_{loc}(\Omega)$  telle que  $\mathcal{L}_0(u) = f$  dans  $\Omega_0 := \Omega \setminus F$ . Si la mesure de Hausdorff de dimension  $d - 1$  de  $F$  est nulle, alors  $\mathcal{L}_0(u) = f$  dans  $\Omega$ .*

C'est un raisonnement de capacité car l'hypothèse  $\mathcal{H}^{d-1}(F) = 0$  permet de construire, pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ , une famille  $\chi_\epsilon$  de fonction de troncature dans  $C_c^\infty(\Omega)$ , à valeur dans  $[0, 1]$ , qui converge presque partout vers 0, avec un gradient qui converge vers 0 dans  $L^1$ , et néanmoins avec  $K \cap F$  inclus dans l'intérieur de  $\{\chi_\epsilon = 1\}$ .

### 2.3 Commutation

**Proposition 2.3.** *Soit  $c$  dans  $L^1_{loc}$ . Supposons que  $\partial_1 a$  est une mesure de Radon, et que pour  $j = 2, \dots, d$ ,  $\partial_j a$  est localement intégrable. Si  $u$ , dans  $L^\infty_{loc}$  est solution de  $\mathcal{L}_0(u) = cu$ , alors  $\mathcal{L}_0(u^2) = 2cu^2$ .*

Cette proposition découle directement du résultat crucial :

**Lemme 2.4.** *Supposons que  $\partial_1 a$  soit une mesure de Radon, et que pour  $j = 2, \dots, d$ ,  $\partial_j a$  soit localement intégrable. Soit  $v$  à support compact dans  $\Omega$ , bornée et telle que  $\mathcal{L}_0(v)$  soit intégrable. Alors il existe une famille  $v_\epsilon$  qui converge presque partout vers  $v$ , avec la même borne, et telle que  $\mathcal{L}_0(v_\epsilon)$  tende vers  $\mathcal{L}_0(v)$  dans  $L^1$ .*

Ce lemme exprime d'une certaine façon que le graphe de l'opérateur  $\mathcal{L}_0$  est fermé. Il se démontre en régularisant, comme d'habitude,  $v$  par convolution :  $v_\epsilon = \hat{\rho}(\epsilon D)v$  mais avec une différence dans l'action de la dilatation :  $\epsilon(z_1, \dots, z_d) = (\epsilon_1 z_1, \dots, \epsilon_d z_d)$ . On montre que le commutateur  $[\mathcal{L}_0, \hat{\rho}(\epsilon D)]v$  tend vers 0 dans  $L^1$  si on choisit convenablement comment les  $\epsilon_j$  tendent respectivement vers 0.

De la même façon qu'il implique la proposition, ce lemme justifie aussi une formule de Leibnitz : si  $u$  et  $v$  sont localement bornées avec  $\mathcal{L}_0(u)$  et  $\mathcal{L}_0(v)$  localement intégrable, alors  $\mathcal{L}_0(uv) = \mathcal{L}_0(u)v + u\mathcal{L}_0(v)$ .

## 2.4 Tout ensemble

En rassemblant les trois points précédent, on constate que les solutions localement bornées de  $\mathcal{L}_0(u) = cu$  sont uniques sous l'hypothèse suivante : on peut recouvrir  $\Omega$  — éventuellement un ensemble fermé  $F$  de mesure de Hausdorff de dimension  $d - 1$  nulle — par des ouverts dans lesquels, quitte à changer le système de coordonnées,  $a$  a des dérivées partielles localement intégrables dans  $d - 1$  directions et mesure de Radon dans la  $d$ -ième direction.

## 3 Un exemple de non unicité

Pour présenter cet exemple, nous nous plaçons sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ , avec les variables  $t \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}^2$ . On considère

$$\mathcal{L}_0 : u \mapsto \mathcal{L}_0(u) := \partial_t u + a(t, x) \cdot \partial_x(u)$$

avec  $a$  un champ de vecteur sur  $\mathbb{R}^2$  dépendant du temps. On le prend nul pour  $t < 0$  ou  $t > 1$ , et vérifiant  $a(t, x) = b(2^j x)$  sur chaque intervalle temporel  $I_j = 2^{-j}(\frac{1}{2}, 1)$ , avec  $b$  un champ de vecteur (indépendant du temps) sur  $\mathbb{R}^2$  à divergence nulle, borné,  $\mathbb{Z}^2$ -périodique. Ainsi  $a$  lui-même est-il borné et à divergence nulle.

On note  $u_0$  la fonction  $\mathbb{Z}^2$ -périodique définie par  $u_0(x) := \text{signe}(x_1 x_2)$  sur  $Q := (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^2$ . Pour être tout à fait précis définissons ponctuellement  $u_0$  par 0 sur l'ensemble de mesure nulle des  $x$  tels que  $x_1$  ou  $x_2$  appartient à  $\cup_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j} \mathbb{Z}$ . On va choisir  $b$  comme le champ de vecteurs associé à un flot, noté  $\Psi^{(b)}$ , qui transporte (dans le sens rétrograde)  $u_0$  au temps  $t_0$  sur  $u_1(x) := -u_0(2x)$  au temps  $t_1 := 2^{-1}$ , c'est-à-dire

$$u_1(\Psi_1^{(b)}(t_1, x)) = u_0(x). \quad (1)$$

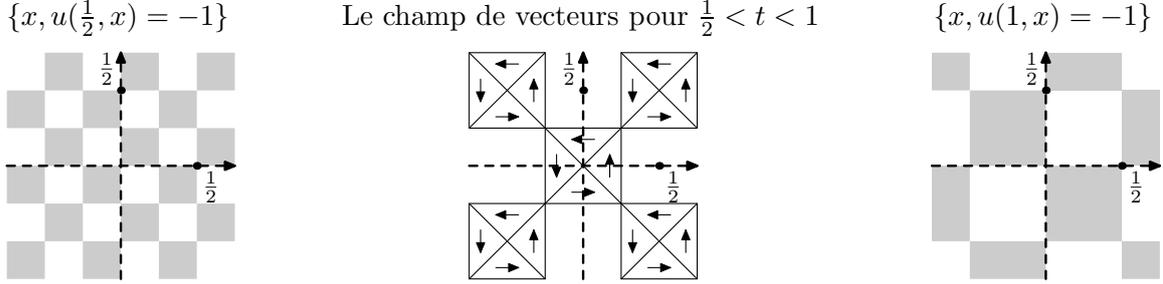
Avant de donner les formules pour  $b$ , décrivons son flot par une image (voir figure 1). Considérons que  $u_0$  vaut 1 sur les cases noires d'un damier, et  $-1$  sur les cases blanches (image de droite). Si on applique une rotation d'un quart de tour à la surface d'un carré de la taille d'une case mais centré sur un point où se touchent quatre cases (champ de vecteurs sur l'image au centre), on a (localement) réussi à diminuer par deux l'échelle de l'oscillation entre noir et blanc (image de gauche).

On pose donc

$$c(x) := \begin{cases} (0, 4x_1) & \text{si } 0 < |x_2| < |x_1| < \frac{1}{4}, \\ (4x_2, 0) & \text{si } 0 < |x_1| < |x_2| < \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Il est clair que  $c$  a un gradient mesure, puisque qu'il est affine par morceau, ces morceaux étant des triangles. Sa divergence est bien nulle car sa composante normale au bord des morceaux est continue. On peut aussi le justifier par  $c = \nabla^\perp V$  où  $V(x) := 2 \min(\frac{1}{2}, \max(x_1^2, x_2^2))$ .

FIG. 1 – De  $t = \frac{1}{2}$  à  $t = 1$ .



En analogie avec les coordonnées polaires, posons  $x = \rho(x)\theta(x)$  où  $\rho(x) := \max(|x_1|, |x_2|)$  et  $\theta(x)$  appartient au bord du carré  $\{\rho < 1\}$ , de côté 2 et de centre 0, identifié à  $\mathbb{R}/8\mathbb{Z}$ . Le flot  $\Psi_0^{(c)}$  qui, au temps  $t$ , est une *rotation carrée* :  $(\rho, \theta) \mapsto (\rho, \theta + 4t)$  si  $0 < \rho < \frac{1}{4}$  (et l'identité sinon), est relié à  $c$  par

$$\Psi_0^{(c)}(t, x) = x + \int_0^t c(\Psi_0^{(c)}(s, x)) ds$$

puisque la vitesse  $|c|$  tend vers 1 quand  $x$  s'approche par l'intérieur du bord du carré  $\{\rho < \frac{1}{4}\}$ , de longueur 2. Pour  $t = \frac{1}{2}$ , cela correspond à un quart de tour.

On définit

$$\Lambda := \mathbb{Z}^2 \cup \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \mathbb{Z}^2\right),$$

$$\Psi_1^{(b)}(t, x) := \begin{cases} k + \Psi_0^{(c)}(t-1, x-k) & \text{si } \rho(x-k) < \frac{1}{4} \text{ pour un } k \in \Lambda, \\ x & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$b(x) := \sum_{k \in \Lambda} c(x-k).$$

Les carrés  $\{\rho(x-k) < \frac{1}{4}\}$  restent disjoints quand  $k$  parcourt  $\Lambda$ . Il est clair que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\Psi_1^{(b)}(t)$  est une bijection qui préserve la mesure de Lebesgue, que (1) est vérifiée, et que

$$\Psi_1^{(b)}(t, x) = x + \int_1^t b(\Psi_1^{(b)}(s, x)) ds.$$

En exploitant la définition de  $a$  à partir de  $b$ , on peut définir  $\Psi_1^{(a)}$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  tel que

$$\Psi_1^{(a)}(t, x) = x + \int_1^t a(s, \Psi_1(s, x)) ds.$$

Il est évident que  $\Psi_1^{(a)}(t, x) = \Psi_1^{(a)}(0, x)$  pour  $t < 0$  et  $\Psi_1^{(a)}(t, x) = \Psi_1^{(a)}(1, x)$  pour  $t > 1$ . Pour tout  $t > 0$ ,  $\Psi_1^{(a)}(t)$  est une bijection qui préserve la mesure de Lebesgue, et envoie  $u_0$  au temps  $t_0$  sur  $u_j(x) := (-1)^j u_0(2^j x)$  au temps  $t_j := 2^{-j}$ , au sens où  $u_j(\Psi_1^{(a)}(t_j, x)) = u_0(x)$ . Mais on ne peut pas affirmer que  $\Psi_1^{(a)}(0)$  est bijective. Toutefois, elle préserve la mesure de Lebesgue.

Montrons que la fonction  $u$  bornée sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  définie par  $u(t, \Psi_1^{(a)}(t, x)) = u_0(x)$  pour  $t > 1$  et par  $u(t, y) = 0$  pour  $t < 0$  est solution (faible) de  $\mathcal{L}_0(u) = 0$ , en testant cette équation contre une fonction  $\phi \in C_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ . Il s'agit de calculer

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2} -(\partial_t \phi + a \cdot \partial_x \phi) u \, dx \, dt$$

Comme  $u = 0$  sur  $\{t < 0\}$ , l'intégrale est réduite à  $\{t > 0\}$ . Comme  $a, u$ , les dérivées et le support de  $\phi$  sont bornés, l'intégrale sur  $\{t > 0\}$  est la limite quand  $\tau$  tend vers  $0^+$  de l'intégrale sur  $\{t > \tau\}$ . Or à  $t > 0$  fixé,

$$\int_{\mathbb{R}^2} -(\partial_t \phi + a \cdot \partial_x \phi)(t, x) u(t, x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} -(\partial_t \phi + a \cdot \partial_x \phi)(t, \Psi_1^{(a)}(t, x)) u_0(x) \, dx$$

car  $\Psi_1^{(a)}(t)$  est une bijection qui préserve la mesure de Lebesgue. On peut alors échanger l'intégrale en  $x$  et celle en  $t$ . Or l'application  $t \mapsto \phi(t, \Psi_1^{(a)}(t, x))$  est lipschitzienne sur  $\{t > 0\}$ , de dérivée égale à  $(\partial_t \phi + a \cdot \partial_x \phi)(t, \Psi_1^{(a)}(t, x))$ . On obtient donc

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi(\tau, \Psi_1^{(a)}(\tau, x)) u_0(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\tau, x) u(\tau, x) \, dx$$

Sous la première forme, on voit par le théorème de convergence dominée que cette intégrale est continue en  $\tau$ . Et sous la seconde forme, en choisissant  $\tau = t_j$ , on voit qu'elle tend vers 0 quand  $\tau$  tend vers 0.

On a donc une fonction bornée  $u$ , non nulle mais supportée dans  $t \geq 0$ , solution de  $\mathcal{L}_0(u) = 0$ , ce qui est une formulation de non-unicité pour le problème de Cauchy. Comme  $|u| = u^2$  vaut 1 si  $t > 0$  et 0 si  $t < 0$ , on vérifie que  $\mathcal{L}_0(u^2) \neq 2u\mathcal{L}_0(u)$  et  $\mathcal{L}_0(|u|) \neq |\mathcal{L}_0(u)|$ .

Examinons plus en détail la régularité de  $a$ . Pour une mesure  $v$  sur une partie  $E$  de  $\mathbb{R}^d$ , on note  $\|v\|_1(E)$  la variation totale de  $v$  sur  $E$ . Fixons un compact  $K$  de  $\mathbb{R}^2$  d'intérieur non vide. Pour  $t \in I_j$ , on peut encadrer  $\|a(t, \cdot)\|_1(K) = 2^{-2j} \|b\|_1(2^j K)$  entre deux constantes, qui dépendent de  $K$  mais pas de  $j$ . Il en est de même pour  $2^{-j} \|\partial_x a(t, \cdot)\|_1(K)$  et donc aussi pour  $\|\partial_x a\|_1(I_j \times L)$ . En sommant sur  $j$ , on peut encadrer  $\|\partial_x a\|_1([t, 1] \times K) / \ln(1/t)$  entre deux constantes indépendantes de  $t \in (0, 1)$ . Comme  $\partial_t a$ , sur  $\{t > 0\}$ , est la somme sur  $j$  des mesures  $[a(t_j^+) - a(t_j^-)](x) \otimes \delta_{t_j}(t)$ , on a le même encadrement pour  $\|\partial_t a\|_1([t, 1] \times K) / \ln(1/t)$ .

Tout ça pour dire que  $a$  vérifie les hypothèses du théorème de Colombini et Lerner sauf une : l'ensemble exceptionnel  $F$ , qui est ici le plan  $\{t = 0\}$ , est de mesure de Hausdorff de dimension  $d - 1$  localement finie, mais pas nulle.

## 4 Questions diverses

### 4.1 L'exemple de Aizenman

Aizenman a fourni dans [2] un exemple de champ de vecteurs borné à divergence nulle pour étudier la conjecture de Nelson. Le point de vue est légèrement différent du notre, puisqu'il considère le champ de vecteurs (autonome)  $a \cdot \partial_x$  comme générateur du groupe unitaire sur  $L^2$  défini par  $u \mapsto u \circ \Psi(t)$ , où  $\Psi(t)$  est un groupe à un paramètre de transformation de  $\mathbb{R}^d$  préservant la mesure de Lebesgue. À partir de son exemple, il construit un champ  $a$  pour lequel il n'y a pas de flot  $\Psi$  et un autre pour lequel il y en a une infinité. L'idée principale semble

être que le long des *trajectoires* de  $a$ , un point peut exploser en une ligne et réciproquement une ligne se contracter sur un point, en temps fini et simultanément pour beaucoup de points.

Pour décrire sa construction dans notre cadre, il convient d'abord de fixer  $\Psi_1^{(a)}(\frac{1}{2}, x)$ . Si  $x$  n'appartient pas au carré  $[0, 1]^2$ , c'est encore  $x$ . Sinon la transformation sur  $x$  est celle du boulanger sur  $[0, 1]^2$  : un coup de rouleau pour étaler la pâte :  $x = (x_1, x_2) \mapsto x' = (2x_1, 2^{-1}x_2)$  puis on *replie*, ou plutôt ici on coupe et on rempile :  $x' = (x'_1, x'_2) \mapsto (x'_1 - \lfloor x'_1 \rfloor, 2^{-1}\lfloor x'_1 \rfloor + x'_2)$ , où  $\lfloor r \rfloor$  est la partie entière du réel  $r$ . Cette transformation préserve la mesure. Elle est bien connue des dynamiciens qui l'identifient au décalage (*shift*) sur  $\mathbb{Z}$ , comme on le voit en écrivant les coordonnées des points en base 2. Mais ici, le changement d'échelle visé implique que si  $x = (.b_1b_2b_3\dots, .c_1c_2c_3\dots)$  à  $t_0$ , on obtiendra  $(.b_2b_3b_4b_5\dots, .b_1c_1c_2c_3\dots)$  à  $t_1$ , puis  $(.b_2b_4b_5b_6\dots, .b_1b_3c_1c_2\dots)$  à  $t_2$ , etc. On devine que  $\Psi_1^{(a)}(0, x) = \gamma(x_1)$  où  $\gamma : r = .r_1r_2r_3\dots \mapsto (.r_2r_4r_6\dots, .r_1r_3r_5\dots)$  est une application de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]^2$  préservant la mesure. On observe que  $x \mapsto \Psi_1^{(a)}(0, x)$  n'est pas injective.

Le problème revient maintenant à combler l'intervalle  $t \in (\frac{1}{2}, 1)$  avec un flot  $\Psi_1^{(a)}(t, x)$  qui découle d'un champ  $a$  borné à divergence nulle. Aizenman propose, au moyen d'une figure, une solution qui présente l'inconvénient que le fluide en mouvement ne remplit pas tout l'espace et l'avantage que  $a$  est très régulier à l'intérieur de son support. Dans son cas,  $a$  est vu comme un champ autonome sur  $\mathbb{R}^3$ . Dans les variables  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ , il s'écrit  $\alpha(t)\partial_t + a(t, x) \cdot \partial_x$ . Colombini et Rauch ont récemment dans [6] rendu cette construction complètement explicite.

Mais on peut très bien utiliser les rotations carrées, et même rectangles. Avec comme potentiel  $V(x) = \min(1, \max(\frac{|x_1|}{\alpha}, \frac{|x_2|}{\beta}))^2$ , on obtient pour  $c := \nabla^\perp V$  un champ à variation bornée, à divergence nulle, et qui fait tourner dans lui-même le rectangle  $[-\alpha, \alpha] \times [-\beta, \beta]$ . Si on fait tourner ainsi d'un quart de tour chacun des deux rectangles  $(0, \frac{1}{2}) \times (0, 1)$  et  $(\frac{1}{2}, 1) \times (0, 1)$  dans le sens des aiguilles d'une montre, puis tourner d'un quart de tour en sens inverse le carré  $(0, 1)^2$ , on obtient la transformation du boulanger.

## 4.2 Avec $a$ Lipschitzien ?

Dans notre exemple, comme dans celui d'Aizenman, la construction indique très clairement une échelle discrète :  $a(2^{-j}t, x) = a(t, 2^jx)$  pour  $0 < t < 1$ . Existe-t-il un exemple du même genre mais avec un champ  $a$  plus régulier, par exemple Lipschitzien ? Le théorème suivant donne un élément de réponse.

**Théorème 4.1.** *Soit  $a(t, x)$  un champ de vecteurs borné de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$ , à divergence nulle, nul hors de  $\{0 < t < T\}$  et tel que*

$$\|\partial_x a(t, \cdot)\|_\infty \leq Ct^{-1}$$

avec  $C$  une constante strictement inférieure à 1.

1. Pour tout  $\phi \in C_c^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ , il existe une solution  $v \in W_1^1([-1, \infty) \times \mathbb{R}^d)$  du problème

$$\partial_t v + a \cdot \partial_x v = \phi, \quad v(t > T) = 0. \quad (2)$$

En particulier,  $v_0 := v(0, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ .

2. Soit  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  solution faible du problème

$$\partial_t u + a \cdot \partial_x u = 0, \quad u(t < 0) = 0. \quad (3)$$

Alors  $u = 0$ .

*Démonstration.* Pour la première partie de ce théorème, on utilise le théorème de Cauchy-Lipschitz. L'hypothèse sur  $a$  implique qu'il existe un flot  $\Psi_s^{(a)}$ , relié à  $a$  par

$$\Psi_s^{(a)}(t, x) = x + \int_s^t a(\tau \Psi_s^{(a)}(\tau, x)) d\tau,$$

défini, pour tout  $s > 0$ , sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ , Lipschitz en  $t$  à  $x$  fixé, et préservant la mesure de Lebesgue en  $x$  à  $t$  fixé. Pour  $t < 0$ , on a bien sûr  $\Psi_s^{(a)}(t, x) = \Psi_s^{(a)}(0, x)$ . Pour tous  $t, t'$ , et  $t''$  strictement positifs,  $\Psi_t^{(a)}(t'', x) = \Psi_{t'}^{(a)}(t'', \Psi_t^{(a)}(t', x))$ . Alors la solution du problème (2) nous est donnée pour  $t > 0$  par

$$v(t, \Psi_T^{(a)}(t, x)) = \int_T^t \phi(\tau, \Psi_T^{(a)}(\tau, x)) d\tau.$$

Si le support de  $\phi$  est inclus dans  $[t_1, t_2] \times \mathbb{R}^2$ , avec  $0 < t_1 < t_2 < T$ , alors

$$v(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq t_2, \\ \int_{t_2}^t \phi(\tau, \Psi_t^{(a)}(\tau, x)) d\tau, & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2, \\ v(t_1, \Psi_t^{(a)}(t_1, x)) & \text{si } 0 < t \leq t_1. \end{cases}$$

Nous allons montrer que  $v$  est dans  $W_1^1((0, T) \times \mathbb{R}^2)$ , ce qui donne un sens à  $v(t = 0)$ , permet d'étendre  $v$  à  $t < 0$  par  $v(t, x) = v(0, x)$ , et termine la preuve du premier point du théorème.

Avec le lemme de Gronwall, on obtient facilement, pour  $s$  et  $t$  strictement positifs,

$$\|\partial_x \Psi_t^{(a)}(s, \cdot)\|_\infty \leq \exp\left|\int_s^t \|\partial_x a(\tau, \cdot)\|_\infty d\tau\right| \leq \max(ts^{-1}, st^{-1})^C$$

en utilisant l'hypothèse d'échelle sur  $a$ . On en déduit que

$$\|\partial_x v(t, \cdot)\|_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq t_2, \\ t^{-C} \int_{t_2}^t \|\partial_x \phi(\tau, \cdot)\|_1 \tau^C d\tau, & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2, \\ t^{-C} \|\partial_x v(t_1, \cdot)\|_1 t_1^C & \text{si } 0 < t \leq t_1, \end{cases}$$

$$\text{et donc } \int_0^T \|\partial_x v(t, \cdot)\|_1 dt \leq K \int_0^T \|\partial_x \phi(t, \cdot)\|_1 dt,$$

où  $K$  est un réel positif qui dépend de  $C < 1$ ,  $t_1$  et  $t_2$ . En utilisant l'équation de transport et la borne sur  $a$ , on obtient l'estimation similaire pour  $\partial_t v$ .

Démontrons le deuxième point du théorème par dualité. Comme  $u$  est bornée, il suffit de montrer que  $u(t > 0) = 0$ , ou encore que  $\iint_{(0, T) \times \mathbb{R}^d} u \phi = 0$  pour tout  $\phi \in C_c^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ . Par le premier point, on dispose d'une solution  $v$  du problème (2). Soit  $\chi$  une fonction de troncature, ne dépendant que de  $t$ , nulle pour  $t < -2/3$  et égale à 1 pour  $t > -1/3$ . On a maintenant  $\chi v \in W_1^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  et

$$\partial_t(\chi v) + a \cdot \partial_x(\chi v) = \phi + v_0 \partial_t \chi$$

En multipliant cette égalité de fonctions intégrables par  $u$ , puis intégrant sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ , on obtient  $\iint \phi u$  au membre de droite car  $u \partial_t \chi = 0$  à cause de leurs supports, et 0 au membre de gauche car  $u$  est solution de (3) et la divergence de  $a$  est nulle.  $\square$

Le théorème montre l'importance de la valeur de  $C$ . Nous pensons que pour  $C > 1$ , il devrait être possible de construire des exemples de non-unicité. Pour finir cet exposé, nous décrivons un point de départ vraisemblable pour la construction d'un tel exemple.

Comme dans les exemples précédent,  $a(t, x) := b_j(x)$  sur  $t \in I_j := 2^{-j}(2^{-1}, 1)$ . On va définir la suite  $b_j$  par récurrence.

On choisit  $b_0(x) := (0, 2\lambda d(x_1, \mathbb{Z}))$  où  $d(r, \mathbb{Z})$  est la distance du réel  $r$  à l'entier le plus proche, et  $\lambda$  un paramètre positif. Donc  $b$  est borné par  $\lambda$ , sa divergence est nulle et sa constante de Lipschitz vaut  $2\lambda$ . On espère que ce champ de cisaillement vertical aura pour effet d'allonger certaines lignes. En effet, si un segment de  $\mathbb{R}^2$ , de pente  $p$  et de longueur  $l$  est inclus dans  $(\mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$  à  $t = t_0 := 1$ , son image par le flot de ce champ à  $t = t_1 := 2^{-1}$  est encore un segment, de pente  $p' = \pm\lambda + p$  et de longueur  $l' = l\sqrt{\frac{1+p'^2}{1+p^2}}$  (le signe devant  $\lambda$  est donné par la relation  $x_1 = z_1 \pm d(x_1, \mathbb{Z})$  pour les points  $x$  du segment, avec  $z_1$  l'entier le plus proche de  $x_1$ ). Par exemple, avec  $\lambda = 5/2$ , si  $|p| < 1/2$  alors  $|p'| > 2$  et  $l' > 2l$ . Autrement dit, les segments *presque horizontaux* sont envoyés sur des segments *presque verticaux* au moins deux fois plus long. Si un segment au départ intersecte  $\frac{1}{2}\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ , il convient de le considérer comme une réunion de segments plus petits. Il est alors envoyé sur une ligne polygonale.

Notons  $R$  la rotation d'angle  $\pi/2$ . La relation de récurrence est  $b_{j+1}(x) = Rb_j(R^{-1}2x)$ . Concrètement, on fait tourner le dessin d'un quart de tour et on change l'échelle : cela multiplie la constante de Lipschitz en  $x$  par 2 mais on a divisé  $t$  par 2.

Si on part à  $t_0$  d'une ligne polygonale composée de segments presque horizontaux, à l'instant  $t_j := 2^{-j}$  on aura une autre ligne polygonale, au moins  $2^j$  fois plus longue, composée de segments presque horizontaux si  $j$  est pair et presque verticaux si  $j$  est impaire. Quand  $j$  tend vers l'infini,  $t_j$  vers 0, la longueur de la ligne tend vers l'infini. Si cette ligne est une courbe de Jordan délimitant un domaine, sa longueur est la variation totale de la mesure qui est le gradient de la fonction caractéristique de ce domaine. On a donc un exemple de fonction à variation bornée, solution de l'équation de transport sur  $t > 0$  dont la norme  $BV$  explose quand  $t$  tend vers 0. Cela laisse augurer que le premier point du théorème est faux dans ce cas. Mais nous n'avons pas trouvé d'exemple explicite de fonction  $u$  mettant en défaut le second point.

### 4.3 Conclusion

Au cours de ce travail, nous avons appris que Ambrosio avait étendu dans [1] le théorème de Colombini et Lerner, en prouvant l'unicité des solutions bornées de l'équation de transport associée à un champ de vecteurs seulement  $BV$ , c'est-à-dire à gradient mesure.

Pour finir, signalons un autre problème. Il est bien connu que la condition de Lipschitz n'est pas nécessaire pour garantir l'unicité des solutions de l'équation différentielle (avec condition initiale) associée à un champ de vecteurs. Il suffit que le champ ait un module de continuité, dont l'intégrale de l'inverse diverge en 0. C'est la condition d'Osgood rappelée dans [3]. Est-ce que cette hypothèse implique aussi l'unicité des solutions mesures de l'équation de transport ? L'autre sens est plus facile : si on connaît l'unicité des solutions mesures, on en déduit l'unicité des solutions de l'équation différentielle en associant naturellement à chaque solution une mesure.

## Références

- [1] Luigi Ambrosio. *Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields*. Preprint de l'école normale supérieure de Pise (2003), <http://cvgmt.sns.it/papers/luia/>.
- [2] Michael Aizenman. *On vector fields as generators of flows : a counterexample to Nelson's conjecture*. Ann. Math. 107 (1978), 2, 287-296.
- [3] Jean-Yves Chemin, Nicolas Lerner. *Flot de champs de vecteurs non lipschitziens et équations de Navier-Stokes*. J. Differ. Equations 121 (1995), 2, 314-328.
- [4] Ferruccio Colombini, Nicolas Lerner. *Uniqueness of continuous solutions for BV vector fields*. Duke Math. J. 111 (2002), 2, 357-384.
- [5] Ferruccio Colombini, Nicolas Lerner. *Uniqueness of  $L^\infty$  solutions for a class of conormal BV vector fields*. Preprint de l'université Rennes 1 (2003), <http://www.maths.univ-rennes1.fr/~lerner/>.
- [6] Ferruccio Colombini, Jeffrey Rauch. *Unicity and Nonunicity for Nonsmooth Divergence Free Transport*. à paraître au Séminaire X-EDP 2002-2003, École Polytechnique.
- [7] Ronald Di Perna, Pierre-Louis Lions. *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*. Invent. Math. 98 (1989), 511-547.

Mathématiques, Faculté des sciences  
2 rue de la Houssinière, BP 92208  
F-44322 NANTES CEDEX 03  
Courriel : Nicolas.Depauw@math.univ-nantes.fr