Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2002-2003

Paul Godin

Ondes centrées et discontinuités de contact globales pour les équations d'Euler axisymétriques de certains gaz parfaits isentropiques en dimension 2 d'espace

Séminaire É. D. P. (2002-2003), Exposé n° XIII, 11 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2002-2003____A13_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Ondes centrées et discontinuités de contact globales pour les équations d'Euler axisymétriques de certains gaz parfaits isentropiques en dimension 2 d'espace

Paul GODIN

Université Libre de Bruxelles
Département de Mathématiques
Campus Plaine CP 214
Boulevard du Triomphe
B - 1050 Bruxelles
Belgium

email : pgodin@ulb.ac.be

1 Introduction

On considère les équations d'Euler compressibles isentropiques pour un gaz parfait ($t > 0$,$x \in \mathbb{R}^N$) :

$$\partial_t \rho + \sum_{1 \le k \le N} \partial_k(\rho u_k) = 0 \qquad \text{(conservation de la masse)}, \tag{1.1}$$

$$\partial_t(\rho u_i) + \sum_{1 \le k \le N} \partial_k(\rho u_k u_i) + \partial_i p = 0, \quad 1 \le i \le N \text{ (conservation du moment)}, \tag{1.2}$$

où $\rho > 0$ est la densité, $u = (u_1, \ldots, u_N)$ la vitesse, et p la pression. On suppose que p est une fonction de ρ de la forme $p(\rho) = a\rho^\gamma$, $a > 0$, $1 < \gamma \le 1 + \dfrac{2}{N}$. On impose les conditions initiales

$$\rho(x,0) = \rho_0(x),\ u(x,0) = u_0(x). \tag{1.3}$$

On a les résultats suivants:

(I) Si $\rho_0 = \bar{\rho} + \rho_1$ avec $\bar{\rho}$ constante > 0, ρ_1 et $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^N)$ où s est un entier $> \dfrac{N}{2} + 1$ et $\min \rho_0 > 0$, on peut trouver une solution de (1.1), (1.2), (1.3) pour $t > 0$ petit (cf. [9]).

(II) Si $\rho_0 > 0$ et $\rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}}$, $u_0 \in H^s_{ul}(\mathbb{R}^N)$, où s est un entier $> \dfrac{N}{2} + 1$, on peut trouver une solution de (1.1), (1.2), (1.3) pour $t > 0$ petit (cf. [3]).

Par définition $H^s_{ul}(\mathbb{R}^N)$ est l'ensemble des $v \in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ telles que $\sup_x ||\varphi_x v||_s < +\infty$ pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, où $||\ ||_s$ est la norme usuelle de $H^s(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi_x(y) = \varphi(x-y)$.

En général, les solutions de (1.1), (1.2), (1.3) ne sont pas globales en $t > 0$ (voir par exemple [13], [11], [3], [2]). Dans le cas (I), en supposant $N = 2$ et ρ_0, u_0 invariantes par rotation de centre 0, avec $\rho_1 = \varepsilon\tilde{\rho}_1$, $u_0 = \varepsilon\tilde{u}_0$, où $\tilde{\rho}_1, \tilde{u}_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $\tilde{\rho}_1 + |\mathrm{div}\,\tilde{u}_0| \not\equiv 0$, Alinhac [2] a montré que la durée de vie des solutions est de l'ordre de $\dfrac{1}{\varepsilon^2}$ si $\varepsilon > 0$ est petit.

On tire de (1.1), (1.2) que

$$\partial_t u_i + \sum_{1\le k\le N} u_k \partial_k u_i + \frac{\partial_i p}{\rho} = 0. \tag{1.2'}$$

On peut symétriser le système (1.1), (1.2′) en introduisant $\pi = C_1^{-1}\sqrt{p'(\rho)}$ où $C_1 = \dfrac{\gamma-1}{2}$. Le système (1.1), (1.2′) s'écrit alors

$$\partial_t \pi + \sum_{1\le k\le N} u_k \partial_k \pi + C_1 \pi \sum_{1\le k\le N} \partial_k u_k = 0, \tag{1.4}$$

$$\partial_t u_i + \sum_{1\le k\le N} u_k \partial_k u_i + C_1 \pi \partial_i \pi = 0,\ 1 \le i \le N, \tag{1.5}$$

et on considère les conditions initiales

$$\pi(x,0) = \pi_0(x),\ u(x,0) = u_0(x). \tag{1.6}$$

Cette symétrisation, due à Makino-Ukai-Kawashima [10], a été utilisée dans [3]. Dans [6], [5] (cf. aussi [12]), Grassin-Serre et Grassin ont obtenu un théorème d'existence globale en $t > 0$ en faisant les hypothèses suivantes :

$$(1.7)\qquad \begin{aligned} &\partial^\alpha u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ si } |\alpha| = 1, \partial^\alpha u_0 \in H^{s-1}(\mathbb{R}^N) \text{ si } |\alpha| = 2,\\ &\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \text{dist}\,(\text{sp}\; du_0(x),\mathbb{R}^-) > 0 \text{ (où sp désigne le spectre);}\\ &\pi_0 \in H^s(\mathbb{R}^N) \text{ et } ||\pi_0||_s \text{ est petite,}\\ &\text{où } s \text{ est un entier } > \frac{N}{2} + 1. \end{aligned}$$

Les résultats de Grassin-Serre et Grassin s'obtiennent en montrant que (π,u) est proche de $(0,\bar{u})$, où $\bar{u}$ est la solution de (1.4), (1.5) de conditions initiales $(0,u_0)$. Le but de cet exposé est de décrire un résultat du même type, obtenu dans [4], pour une classe de conditions initiales non lisses. Certains résultats globaux pour des solutions non lisses en dimension 1, correspondant à la situation (I), sont contenus dans [8].

2 Enoncé du résultat

On va supposer que $N = 2$ et considérer des données initiales invariantes par rotation autour de 0; donc $\pi_0(Sx) = \pi_0(x)$ et $u_0(Sx) = Su_0(x)$ pour toute rotation S de $\mathbb{R}^2$ de centre 0. On a

$$\pi_0(x) = \Pi_0(r) \text{ et } u_0(x) = A_0(r)\frac{x}{r} + B_0(r)\frac{x^\perp}{r},\ r = |x|, x^\perp = (-x_2,x_1).$$

On part de $\bar{u}_0(x) = \bar{A}_0(r)\frac{x}{r} + \bar{B}_0(r)\frac{x^\perp}{r}$ vérifiant les conditions de (1.7) avec $s = 3$, et on considère deux petites perturbations $u_0^{(1)},u_0^{(2)}$ de $\bar{u}_0$, invariantes par rotation autour de 0. On suppose que

$$\sum_{|\alpha|\le 1} |\partial^\alpha(u_0^{(j)} - \bar{u}_0)| + \sum_{|\alpha|=2} ||\partial^\alpha(u_0^{(j)} - \bar{u}_0)||_2 \le \varepsilon,$$

$j = 1,2$, où $\varepsilon > 0$ est assez petit. On se donne $\pi_0^{(j)}(x) = \Pi_0^{(j)}(r) > 0$, $j = 1,2$, telles que $||\pi_0^{(j)}||_3 \le \varepsilon$ et $\Pi_0^{(j)}(r) \ge C_0\varepsilon$ si $0 \le (-1)^j(r-1) \le C\varepsilon$, avec $C_0 > 0$ et avec $C > 0$

assez grand. On pose $(\pi_0,u_0) = (\pi_0^{(1)},u_0^{(1)})$ si $r < 1$, $(\pi_0,u_0) = (\pi_0^{(2)},u_0^{(2)})$ si $r > 1$. On écrit $u_0(x) = A_0(r)\dfrac{x}{r} + B_0(r)\dfrac{x^\perp}{r}$, $\pi_0(x) = \Pi_0(r)$, et on suppose que

$$0 < [A_0 \pm \Pi_0](1) \leq C_2\varepsilon^2, \quad |[B_0](1)| \leq C_3\varepsilon,$$

où $[h](1)$ signifie $\lim_{r \overset{>}{\to} 1} h(r) - \lim_{r \overset{<}{\to} 1} h(r)$ et C_2,C_3 sont des constantes > 0 suffisamment petites. On a alors le résultat suivant

Theorem 2.1 *([4]) Il existe une solution faible de (1.1), (1.2) invariante par rotation autour de 0, globale en $t > 0$, telle que $\rho|_{t=0} = \tilde{C}\pi_0^{1/C_1}$, $u|_{t=0} = u_0$, où $\tilde{C} = C_1^{1/C_1}(a\gamma)^{-1/2C_1}$.*

Cette solution présente deux ondes centrées (dans les variables (r,t)) et une discontinuité de contact. De plus ρ est toujours > 0.

3 Construction de la solution pour $t > 0$ petit

Là où la solution est lisse, (1.4), (1.5) impliquent que

$$\Pi_t + A\Pi_r + C_1\Pi(A_r + \frac{A}{r}) = 0, \tag{3.1}$$

$$A_t + AA_r + C_1\Pi\,\Pi_r - \frac{B^2}{r} = 0, \tag{3.2}$$

$$B_t + AB_r + \frac{AB}{r} = 0. \tag{3.3}$$

Posons $R_1 = A - \Pi$, $R_2 = B$, $R_3 = A + \Pi$, $\alpha = \dfrac{\gamma+1}{4}$, $\beta = \dfrac{3-\gamma}{4}$. Le système (3.1), (3.2), (3.3) devient

$$R_t + \Lambda(R)R_r = \frac{f(R)}{r}, \tag{3.4}$$

où $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$, $\Lambda(R)$ est la matrice diagonale d'éléments diagonaux $\Lambda_1(R),\Lambda_2(R),\Lambda_3(R)$ avec $\Lambda_1(R) = \alpha R_1 + \beta R_3$, $\Lambda_2(R) = \dfrac{R_1 + R_3}{2}$, $\Lambda_3(R) = \beta R_1 + \alpha R_3$, et $f(R)$ est quadratique. Dans les variables (r,t), la solution qu'on va construire sera lisse sauf sur cinq caractéristiques $\Sigma_1^*,\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma_3^*$ issues de (1,0). Σ_i est associée à $\Lambda_i(R)$ et Σ_k^* à $\Lambda_k(R)$. De plus si Σ_i a pour équation $r = X_i(t)$ et Σ_k^* a pour équation $r = X_k^*(t)$, on aura $X_1^*(t) < X_1(t) < X_2(t) < X_3(t) < X_3^*(t)$ si $t > 0$.

Soit $(\pi^{(j)},u^{(j)})$, $j = 1,2$, la solution lisse de (1.4), (1.5) valant $(\pi_0^{(j)},u_0^{(j)})$ si $t = 0$. Ecrivons $\pi^{(j)}(x,t) = \Pi^{(j)}(r,t)$, $u^{(j)}(x,t) = A^{(j)}(r,t)\dfrac{x}{r} + B^{(j)}(r,t)\dfrac{x^\perp}{r}$, $R^{(j)} = \begin{pmatrix} A^{(j)} - \Pi^{(j)} \\ B^{(j)} \\ A^{(j)} + \Pi^{(j)} \end{pmatrix}$. Soit $r = X_1^*(t)$ la caractéristique issue de (1,0) et associée à $\Lambda_1(R^{(1)})$; soit $r = X_3^*(t)$ la caractéristique issue de (1,0) et associée à $\Lambda_3(R^{(3)})$. On vérifie que, sous les hypothèses du Théorème 2.1, on a $X_1^*(t) < X_3^*(t)$ si $t > 0$ est assez petit. On prendra $R = R^{(1)}$ si $r < X_1^*(t)$, $R = R^{(2)}$ si $r > X_3^*(t)$. Si T est assez petit et $t < T$, on construit ensuite X_1 (dont on appelle Σ_1 le graphe) avec $X_1^*(t) < X_1(t) < X_3^*(t)$, et R pour $X_1^*(t) < r < X_1(t)$, de sorte que R soit une 1-onde centrée entre Σ_1^* et Σ_1. Cela signifie (cf. [7], voir aussi [1] pour le cas multidimensionnel) qu'il existe un difféomorphisme $\phi : \{(r,t),X_1^*(t) \le r \le X_1(t),\ t \in (0,T)\} \to [\xi_1,\xi_2] \times (0,T)$ tel que $\phi^{-1}(\xi,t) = (g(\xi,t),t)$, où $t \mapsto g(\xi,t)$ est une 1-caractéristique partant de (1,0) avec une pente ξ:

$$g_t(\xi,t) = \Lambda_1(R(g(\xi,t),t)), \tag{3.5}$$

$$g(\xi,0) = 1, \quad g_t(\xi,0) = \xi, \tag{3.6}$$

et telle que

$$g_\xi > 0 \text{ si } t > 0, \quad g(\xi_1,t) = X_1^*(t). \tag{3.7}$$

On demande que $w : (\xi,t) \mapsto R(g(\xi,t),t)$ soit lisse jusqu'en $t = 0$. (3.4) s'écrit

$$\partial_t w_j + \frac{(\Lambda_j - \Lambda_1)(w)}{g_\xi}\partial_\xi w_j = \frac{f_j(w)}{g}, \quad 1 \le j \le 3. \tag{3.8}$$

Sous les hypothèses du Théorème 2.1, $(\Lambda_j - \Lambda_1)(w(\xi_1,0)) > 0$ si $j \ge 2$. On en déduit à l'aide de (3.5), (3.6) que l'on doit avoir

$$w(\xi,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\xi - \beta(a_3)}{\alpha} \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

avec $a_2,a_3 \in \mathbb{R}$. D'autre part, R doit être continue au travers de Σ_1^* si $t > 0$, donc en particulier

$$w_j(\xi_1,t) = R_j^{(1)}(X_1^*(t),t) \text{ si } j \geq 2. \tag{3.10}$$

Vu (3.9) et (3.10), on doit donc avoir

$$w(\xi,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\xi - \beta(R_0^-)_3}{\alpha} \\ (R_0^-)_2 \\ (R_0^-)_3 \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

où $R_0^- = \lim\limits_{r \overset{\leq}{\to} 1} R_0(r)$. En vertu des résultats de [7], si $\xi_2 - \xi_1$ et T sont suffisamment petits, on peut trouver g,w satisfaisant

$$g_t(\xi,t) = \Lambda_1(w(\xi,t)), \tag{3.5$'$}$$

(3.6), (3.7), (3.8), (3.10), (3.11) si $\xi \in [\xi_1,\xi_2]$, $t \in [0,T]$.

On vérifie que lorsque $j \geq 2$, $\partial_r R_j(g(\xi,t),t)$, possède une limite si $t \overset{\geq}{\to} 0$, mais que $\partial_r R_1 \sim \dfrac{1}{t}$ si $t \overset{\geq}{\to} 0$. On a aussi que $\xi_1 = \Lambda_1(R_0^-)$.

D'autre part $\lim\limits_{t \overset{\geq}{\to} 0} R(X_1(t),t) = \lim\limits_{t \overset{\geq}{\to} 0} w(\xi_2,t) = w(\xi_2,0) = R_0^- + \begin{pmatrix} \dfrac{\xi_2 - \xi_1}{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On choisit ξ_2 tel que $\dfrac{\xi_2 - \xi_1}{\alpha} = [(R_0)_1](1)$ et on a alors $\lim\limits_{t \overset{\geq}{\to} 0} R(X_1(t),t) = R_0^\#$, où $R_0^\# = \begin{pmatrix} (R_0^+)_1 \\ (R_0^-)_2 \\ (R_0^-)_3 \end{pmatrix}$ avec $R_0^+ = \lim\limits_{r \overset{\geq}{\to} 1} R_0(r)$. Posons $R_0^{\#\#} = \begin{pmatrix} (R_0^+)_1 \\ (R_0^+)_2 \\ (R_0^-)_3 \end{pmatrix}$. On construit de même une 3-onde centrée limitée par les caractéristiques $r = X_3(t)$ et $r = X_3^*(t)$ (avec $X_1(t) < X_3(t) < X_3^*(t)$) telle que $\lim\limits_{t \overset{>}{\to} 0} R(X_3(t),t) = R_0^{\#\#}$.

On construit finalement R entre Σ_1 et Σ_3, ayant la structure suivante: il existe une courbe Σ_2 d'équation $r = X_2(t)$ avec $X_1(t) < X_2(t) < X_3(t)$ si $t > 0$ telle que R soit lisse jusqu'au bord entre Σ_1 et Σ_2 et entre Σ_2 et Σ_3; $R_t + \Lambda(R)R_r = \dfrac{f(R)}{r}$ entre Σ_1 et Σ_2 et entre Σ_2 et Σ_3; Σ_2 est une caractéristique (associée à $\Lambda_2(R)$) tant du côté de Σ_1 que du côté de Σ_3; et le vecteur (ρ,u) correspondant à R est une solution faible de (1.1), (1.2). Il résulte de ces exigences que l'on doit avoir $[R_1]_{\Sigma_2} = [R_3]_{\Sigma_2} = 0$. (Si S est une courbe d'équation $r = Y(t)$, nous posons $[f]_S(Y(t),t) = \lim\limits_{r \overset{>}{\to} Y(t)} f(r,t) - \lim\limits_{r \overset{<}{\to} Y(t)} f(r,t)$). Si $[R_2]_{\Sigma_2}$ est $\neq 0$ en tout point, on obtient une discontinuité de contact. Sinon, on montre que $[R_2]_{\Sigma_2} \equiv 0$, et on a une onde de gradient. Au moyen des résultats de [7], on peut construire R et Σ_2 pour $t > 0$ petit. On obtient ainsi finalement une solution faible pour $t > 0$ petit et on vérifie que Π est toujours > 0.

4 Existence globale

Pour obtenir l'existence globale, on démontre le résultat suivant.

Proposition 4.1 *Supposons que $T > 0$ et que pour $0 < t < T$, on ait une solution faible ayant la structure décrite dans la section 3, c'est-à-dire formée de $(u^{(1)},\pi^{(1)})$, $(u^{(2)},\pi^{(2)})$ d'une 1-onde centrée, d'une discontinuité de contact (ou d'une onde de gradient) et d'une 3-onde centrée. Soient $\Sigma_1^*,\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma_3^*$ comme dans la section 3. Alors, si $0 < T_0 < T$, on a $\nabla R \in L^\infty$ (hors des Σ_j et des Σ_k^*) pour $T_0 < t < T$, $\Pi > 0$ pour $t < T$, et si $b_j = \lim\limits_{t \overset{<}{\to} T} X_j(t)$, $b_k^* = \lim\limits_{t \overset{<}{\to} T} X_k^*(t)$, on a $b_1^* < b_1 < b_2 < b_3 < b_3^*$.*

On vérifie qu'on peut alors prolonger R (et les Σ_j, Σ_k^*) pour $t < T + \delta$ (où $\delta > 0$) en une solution de même structure, ce qui permet de prouver le Théorème 2.1. Il reste donc à démontrer la Proposition 4.1. La fin de cet exposé est consacrée à une esquisse de la preuve de la Proposition 4.1.

A gauche de Σ_1^* et à droite de Σ_3^*, on a des estimations de [6], [5] ou qui s'en déduisent facilement. Soit $(0,\bar{u})$ la solution de (1.4), (1.5) valant $(0,\bar{u}_0)$ si $t=0$. On a

$$|u^{(j)}-\bar{u}|+\pi^{(j)}\leq\frac{C\varepsilon}{\langle t\rangle^{\gamma-1}},\tag{4.1}$$

où $\langle t\rangle=1+t$. Si $\bar{u}(x,t)=\bar{A}(r,t)\dfrac{x}{r}+\bar{B}(r,t)\dfrac{x^{\perp}}{r}$, on a par (4.1):

$$\frac{dX_1^*}{dt}(t)=\bar{A}(X_1^*(t),t)+F(t),$$

avec $|F(t)|\leq\dfrac{C\varepsilon}{\langle t\rangle^{\gamma-1}}$. Ceci permet de montrer que X_1^* est globale en $t>0$ et que $X_1^*(t)\sim\langle t\rangle$. On a un résultat analogue pour X_3^*. Encore faut-il montrer que Σ_1^* ne recoupe par Σ_3^*.

Posons $\bar{R}_i=\bar{A}$ si $i=1{,}3$, $\bar{R}_2=\bar{B}$, $z=R-\bar{R}$. (3.4) implique que

$$z_t+(\bar{A}+\Lambda(z))z_r+Mz=\frac{f(z)}{r},\tag{4.2}$$

où

$$\begin{aligned}M&=\begin{pmatrix}\alpha\bar{A}_r+\dfrac{\gamma-1}{4}\dfrac{\bar{A}}{r} & -\dfrac{2\bar{B}}{r} & \beta\bar{A}_r-\dfrac{\gamma-1}{4}\dfrac{\bar{A}}{r}\\ \dfrac{1}{2}(\bar{B}_r+\dfrac{\bar{B}}{r}) & \dfrac{\bar{A}}{r} & \dfrac{1}{2}(\bar{B}_r+\dfrac{\bar{B}}{r})\\ \beta\bar{A}_r-\dfrac{\gamma-1}{4}\dfrac{\bar{A}}{r} & -\dfrac{2\bar{B}}{r} & \alpha\bar{A}_r+\dfrac{\gamma-1}{4}\dfrac{\bar{A}}{r}\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{\langle t\rangle}\begin{pmatrix}\dfrac{\gamma}{2} & 0 & \dfrac{2-\gamma}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \dfrac{2-\gamma}{2} & 0 & \dfrac{\gamma}{2}\end{pmatrix}+\tilde{M};\end{aligned}$$

pour tout $\tilde{C}>0$, il existe $C>0$ telle que $|\tilde{M}|\leq\dfrac{C}{\langle t\rangle^2}$ si $r\geq\tilde{C}\langle t\rangle$. R_1 et R_3 sont continues si $t>0$ et les $\Lambda_j(R)$ ne dépendent que de R_1 et R_3. Donc les $\Lambda_j(R)$ sont même localement lipschitziennes si $t>0$. Introduisons les fonctions $r_i(s,r,t)$, $1\leq i\leq 3$, telles que $\dfrac{\partial r_i}{\partial s}(s,r,t)=(\bar{A}+\Lambda_i(z))(r_i(s,r,t),s)$, $r_i|_{s=t}=r$. Donc $s\mapsto(r_i(s,r,t),s)$, $s<t$, paramétrise la

i^{e} caractéristique rétrograde issue de (r,t). Posons $\mathcal{D}_T^{(1)} = \{(r_3(s,r,t),s)(r,t) \in \Sigma_1^*, t < T, 0 \leq s \leq t\}$, $\mathcal{D}_T^{(2)} = \{(r_1(s,r,t),s),(r,t) \in \Sigma_3^*, t < T, 0 \leq s \leq t\}$, $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}_T^{(1)} \cup \mathcal{D}_T^{(2)} \cup \{(r,t), X_1^*(t) < r < X_3^*(t)\}$. On peut montrer que si $(r_0,0) \in \mathcal{D}_T$, alors $|r_0 - 1| \leq C\varepsilon$, où C est indépendante de T.

Posons $\bar{z}_i(t) = \sup\limits_{(r,t)\in\mathcal{D}_T} |z_i(r,t)|$. Exprimant (4.2) et les conditions initiales de z sous forme d'un système d'équations intégrales le long des caractéristiques rétrogrades entre le temps 0 et le temps t, on voit qu'on peut majorer $\bar{z}_i$ par Z_i où $\begin{pmatrix} Z_1(s) \\ Z_2(s) \\ Z_3(s) \end{pmatrix}$, $0 \leq s \leq t$, est solution d'un système d'équations différentielles ordinaires de type Riccati. Grâce à la structure de M, on obtient ainsi des majorations de la forme

$$|z_1| + |z_2| \leq \frac{C\varepsilon}{\langle t\rangle^{\gamma-1}}, \quad |z_2| \leq \frac{C\varepsilon}{\langle t\rangle}.$$

Pour estimer $\partial_r z$, on peut penser à dériver (4.2) par rapport à r là où c'est possible et à procéder comme pour z, en remplaçant (4.2) par un système de la forme

$$(\partial_t + (\bar{A} + \Lambda(z))\partial_r)\partial_r z + M^*\partial_r z = F^*(r,z,\partial_r z), \tag{4.3}$$

où M^* est une matrice indépendante de z (et des dérivées de z) et F^* est quadratique en $z,\partial_r z$. Considérons par exemple le cas où $X_1^*(t) < r < X_1(t)$. Si $j \geq 2$, on peut effectivement procéder pour $\partial_r z_j$ comme on l'a fait pour z_j, car $[\partial_r z_j]_{\Sigma_1^*} = 0$. Mais $\partial_r z_1(r_1(s,r,t),s) \sim \dfrac{1}{s}$ si $s \xrightarrow{>} 0$. Ceci conduit à fixer $t_0 > 0$ et à intégrer (4.3) le long des caractéristiques rétrogrades entre t_0 et t. Seulement $|\partial_r z_1(\tilde{r},t_0)|$ n'est pas petit si $X_1^*(t_0) < \tilde{r} < X_1(t_0)$. Néanmoins on peut démontrer le résultat suivant où $D_T = \{(r,t) \in \mathcal{D}_T,\ r < X_1(t)\}$.

Proposition 4.2 *Posons* $Z(r,t) = \langle t\rangle^\gamma \sum\limits_{i=1,3} |\partial_r z_i(r,t)| + \langle t\rangle^2 |\partial_r z_2(r,t)|$. *Alors il existe* C,δ *(indépendantes de* t_0*) telles que*

$$\sup_{\{(r,t)\in D_T, t>t_0\}} Z(r,t) \leq C\Big(\sup_{\{\tilde{r},(\tilde{r},t_0)\in D_T\}} Z(\tilde{r},t_0) + \varepsilon\langle t_0\rangle^{1-\gamma}\Big)$$

dès que

$$\langle t_0\rangle^{1-\gamma}(\sup_{\{\tilde r,(\tilde r,t_0)\in D_T\}} Z(\tilde r,t_0)+\varepsilon\langle t_0\rangle^{1-\gamma})\leq\delta.$$

On montre alors que si ε est petit et si $\dfrac{[(R_0)_1](1)}{\varepsilon^2}\leq$ petite constante strictement positive, on peut trouver $t_0,\tilde C>0$ telles que, si $T>t_0$, $Z(\tilde r,t_0)\leq\tilde C$ lorsque $(\tilde r,t_0)\in D_T$, où $\langle t_0\rangle^{1-\gamma}(\tilde C+\varepsilon\langle t_0\rangle^{1-\gamma})\leq\delta$. Ceci s'obtient en utilisant l'éclatement $(r,t)\mapsto(\xi,t)$ décrit à la section 3. Grâce à la Proposition 4.2, on obtient alors une majoration globale pour Z dans D_T si $t>t_0$. Si $0<t<T\leq t_0$ ou si $0<t\leq t_0<T$, l'éclatement permet aussi de contrôler $t\langle t\rangle^{\gamma-1}|\partial_r z_1(r,t)|+\langle t\rangle^2|\partial_r z_2(r,t)|+\langle t\rangle^\gamma|\partial_r z_3(r,t)|$ lorsque $X_1^*(t)<r<X_1(t)$. On obtient également que $\inf_{(r,t)\in D_T}\Pi(r,t)>0$. On procède de façon similaire avec la 3-onde centrée. Finalement, on peut aussi, si $t<T$, estimer $\partial_r z$ entre Σ_1 et Σ_2 et entre Σ_2 et Σ_3 par intégration de (4.3) le long des caractéristiques rétrogrades (limitées à $\Sigma_1\cup\Sigma_3$). Pour cela, on doit estimer $[\partial_r z_i]_{\Sigma_2}$, $i\neq 2$. Or on peut calculer explicitement $[\partial_r z_i]_{\Sigma_2}$, $i\neq 2$, à partir des équations (1.1), (1.2), ce qui permet finalement d'estimer $\partial_r z$ et de montrer en même temps que, si $t<T$, $\inf\Pi$ est >0 entre Σ_1 et Σ_2 et entre Σ_2 et Σ_3. Enfin, on vérifie les inégalités strictes annoncées sur les b_j et les b_k^*. Ceci termine l'esquisse de la preuve de la Proposition 4.1.

Références

[1] S. ALINHAC, Existence d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels, Comm. Part. Differential Equations 14, 2(1989), 173-230.

[2] S. ALINHAC, Temps de vie des solutions régulières des équations d'Euler compressibles axisymétriques en dimension 2, Invent. Math. 111, 3(1993), 627-670.

[3] J.Y. CHEMIN, Dynamique des gaz à masse totale finie, Asymptotic Analysis 3 (1990), 215-220.

[4] P. GODIN, Global centered waves and contact discontinuities for the axisymmetric isentropic Euler equations of perfect gases in two space dimensions, article en préparation.

[5] M. GRASSIN, Global smooth solutions to Euler equations for a perfect gas, Indiana University Math. J. 47, 4 (1998), 1397-1432.

[6] M. GRASSIN and D. SERRE, Existence de solutions globales et régulières aux équations d'Euler pour un gaz parfait isentropique, C. R. Acad. Sci. Paris, 325, 1, (1997), 721-726.

[7] T.T. LI and W.C. YU, Boundary value problems for quasilinear hyperbolic systems, Duke University Mathematics Series V, 1985.

[8] T.T. LI, Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems, Wiley, Masson, 1993.

[9] A. MAJDA, Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables, Springer, 1984.

[10] T. MAKINO, S. UKAI, S. KAWASHIMA, Sur la solution à support compact de l'équation d'Euler compressible, Jap. J. Appl. Math. 3 (1986), 249-257.

[11] M.A. RAMMAHA, Formation of singularities in compressible fluids in two-space dimensions, Proc. Amer. Math. Soc. 107, 3(1989), 705-714.

[12] D. SERRE, Solutions classiques globales des équations d'Euler pour une fluide parfait compressible, Ann. Inst. Fourier, 47, 1 (1997), 139-153.

[13] T. SIDERIS, Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids, Comm. Math. Phys. 101 (1985), 475-487.