Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2001-2002

Fabrice Planchon

Du local au global: interpolation entre données peu régulières et quantités conservées

Séminaire É. D. P. (2001-2002), Exposé n° VIII, 18 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2001-2002____A8_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Du local au global : interpolation entre données peu régulières et quantités conservées

Fabrice Planchon
Laboratoire d'Analyse Numérique, URA CNRS 189,
Université Pierre et Marie Curie,
4 place Jussieu BC 187, 75 252 Paris Cedex

Introduction

Lorsque l'on s'intéresse à une équation aux dérivées partielles d'évolution, et plus particulièrement au problème de Cauchy, la question la plus importante après l'existence possible d'une solution est le comportement asymptotique de celle-là. Explose-t-elle en temps fini, existe-t-elle pour tout temps, quel est son comportement à temps grand ? Si l'on laisse de coté les cas où l'on attend l'explosion sous une forme ou une autre, il existe essentiellement deux façons d'aborder l'existence globale de solutions. La première consiste à préalablement étudier la question de l'existence locale : on considère l'équation aux dérivées partielles comme une équation différentielle dans un Banach, et l'on applique alors le formalisme usuel des équations différentielles ordinaires (généralement, le théorème de point fixe de Picard). Ensuite, il s'agit de prolonger ces solutions locales globalement. Pour cela (en ignorant les cas où l'on dispose d'un principe du maximum), on s'appuie sur les lois de conservation associées aux symétries de l'équation. Ces lois de conservation donnent une borne a priori sur certaines normes de la solution, par exemple dans H^1 (on se restreindra aux espaces de Sobolev pour simplifier la présentation). Plus généralement, on associe à l'équation une régularité s_{LC} qui est la régularité Sobolev contrôlée par la conservation (il peut évidemment y en avoir plusieurs). Il est donc nécessaire d'étudier le problème de Cauchy pour des données au moins aussi peu régulières, c'est à dire des données H^s avec $s \leq s_{\mathrm{LC}}$. Or il existe toujours un niveau minimal de régularité qui permette de résoudre par les méthodes EDO, appelons-le s_c, la régularité critique. C'est souvent la régularité correspondant aux invariances de changement d'échelle de l'équation (mais pas nécessairement, en particulier quand elle serait négative). Lorsque $s_c < s_{\mathrm{LC}}$, le temps d'existence local dans $H^{s_{\mathrm{LC}}}$ est proportionnel à la norme de la donnée initiale, et en utilisant la borne a priori sur $H^{s_{\mathrm{LC}}}$ de la loi de conservation, on peut donc globaliser les solutions locales. C'est par exemple comme cela qu'on montre l'existence globale pour l'équation des ondes sous-critique H^1, $\Box u + u^3 = 0$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, [13]. L'avantage de cette méthode est qu'elle donne non seulement l'existence, mais aussi l'unicité. Dans le cas critique $s_c = s_{\mathrm{LC}}$, le temps d'existence dépend non plus de la norme mais du profil de la donnée initiale, et il est nécessaire de recourir à des arguments de non-concentration pour espérer globaliser les solutions locales. Enfin, dans le cas (sur-critique) où $s_c > s_{\mathrm{LC}}$, ce type d'approche est sans espoir, mais on dispose alors d'une approche différente, basée sur les méthodes de compacité. En utilisant la loi de conservation qui fournit une borne a priori, et une approximation (de la donnée et de l'équation) régulière, on cherche à passer à la limite (faible) dans les termes non-linéaires pour obtenir une solution globale. L'exemple historique est le cas des équations de Navier-Stokes incompressibles ([18]). Le principal inconvénient de ces méthodes est que l'on n'obtient pas l'unicité : il est nécessaire d'étudier celle-là a posteriori, et généralement c'est un problème très difficile, l'équation de la différence entre deux solutions perdant certaines des bonnes propriétés structurelles de l'équation de départ.

Le but du présent exposé est de revisiter les liens potentiels existant entre la théorie locale et la présence des lois de conservation, au-delà de l'exemple expliqué ci-dessus. On distingue donc trois situations :

– Le cas sous-critique, $s_c < s_{\mathrm{LC}}$. Lorsque s_c est effectivement l'indice de l'invariance par changement d'échelle, on a alors existence globale pour des données petites dans H^{s_c}. Une question relativement naturelle se pose, peut-on en quelque sorte "interpoler" entre l'existence globale à grande donnée dans $H^{s_{\mathrm{LC}}}$ et l'existence globale à petite donnée dans H^{s_c} ? J. Bourgain a montré qu'on pouvait effectivement montrer l'existence globale à grande donnée dans un cadre sous-critique, pour l'équation de Schrödinger cubique défocalisante en dimension deux d'espace. Ses résultats (et sa méthode) ont été étendus et généralisés à d'autres équations dispersives, en particulier KdV ([7]). Nous proposons une approche alternative à la méthode de Bourgain, qui est en quelque sorte plus simple. L'avantage de la simplicité est la probable robustesse de la méthode dans différents contextes, l'inconvénient principal est qu'il ne semble pas possible de toujours égaler les résultats des méthodes "à la Bourgain", et même génériquement on s'attend à faire moins bien qu'avec les méthodes plus sophistiquées développées dans [7]. Nous présentons dans la première partie l'exemple de l'équation des ondes cubique, pour laquelle on retrouve les résultats antérieurs ([16]) inspirés de Bourgain. Le détail de ces résultats se trouve dans [11].

– Le cas critique, $s_c = s_{\text{LC}}$. Supposons toujours que s_c est l'indice du changement d'échelle. Il existe des situations où il y a existence globale à données petites dans un espace plus grand que $H^{s_c} = H^{s_{\text{LC}}}$, appelons-le B_c. Légitiment, on peut penser à interpoler entre $H^{s_{\text{LC}}}$ et B_c. Dans le cas des équations de Navier-Stokes incompressibles en dimension deux, nous avons effectivement montré qu'il y avait existence globale pour toute donnée dans un espace d'interpolation entre L^2 et BMO^{-1}. Nous n'en parlerons pas ici et nous renvoyons à [12] pour un exposé détaillé à ce sujet.
– Le cas sur-critique, $s_c > s_{\text{LC}}$. Dans ce cas, on dispose éventuellement d'une part de solutions faibles dans $H^{s_{\text{LC}}}$, et des solutions petites dans H^{s_c}. Une façon de donner un sens à une "interpolation" entre ces deux résultats est de chercher à construire des solutions faibles pour des données intermédiaires entre ces deux cas. C'est ce qu'a fait Calixto Calderon pour l'équation de Navier-Stokes incompressible en dimension trois, dans [2, 1]. Il a montré l'existence de solutions faibles pour des données L^p. Ce résultat a été retrouvé indépendamment par Lemarié et généralisé au cas de données L^2_{loc} ([17]). Ces travaux de Calderon sont à l'origine des méthodes développées dans [11, 12, 10]. Dans ce dernier travail, on s'intéresse à nouveau aux solutions à la régularité du changement d'échelle. On se donne a priori une solution globale (avec une donnée initiale qui n'est pas petite), et l'on étudie son comportement asymptotique. En utilisant les méthodes de [12] combinées avec les propriétés des solutions petites, on montre que le comportement asymptotique d'une hypothétique solution globale est nécessairement le même que celui d'une solution petite, et en particulier qu'une telle solution est stable. En quelque sorte, tout comme pour les solutions faibles de Leray qui sont connues pour être régulières (et petites) après un temps fini, les solutions fortes de Kato ne peuvent exploser qu'en temps fini. Dans [10] nous avons exposé le cas très simple $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$, nous présentons dans la seconde partie le cas L^3. Les détails et la généralisation au cadre des espaces de Besov pourront être trouvés dans [9].

1 Existence globale pour l'équation des ondes cubique avec données $\dot{H}^s$, $s < 1$

On s'intéresse à l'équation

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \partial_t^2 \Phi - \Delta \Phi + \Phi^3 &= 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \\ (\Phi, \partial_t \Phi)_{|t=0} &= (\Phi_0, \Phi_1), \end{cases}$$

où Φ est à valeur réelle. L'équation est sous-critique H^1 et défocalisante, donc l'existence locale dans H^1 devient globale en utilisant la conservation du hamiltonien $\|\nabla\Phi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\Phi\|_{L^4}^4$, [13]. Concernant l'existence locale pour des données peu régulières, le résultat définitif est celui de [19] (dans un contexte plus général). L'équation (1) est localement bien posée dans $\dot{H}^{\frac{1}{2}} \times \dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ et mal posée en dessous de $s = \frac{1}{2}$ qui est l'indice invariant par changement d'échelle. Les méthodes "à la Bourgain" donnent l'existence globale pour $s > \frac{3}{4}$, [16]. Nous allons donner une preuve différente, basée sur la stratégie introduite dans le contexte de Navier-Stokes dans [2]. Nous démontrons dans [11] le résultat suivant :

Théorème 1
Soit $(\Phi_0, \Phi_1) \in (\dot{H}^s \cap L^4, \dot{H}^{s-1})$ *avec* $s > \frac{3}{4}$. *Alors il existe une unique solution globale de (1). De plus,*

$$\text{(2)} \qquad \|\Phi\|_{\dot{H}^s}(t) \leq C(\|u_0\|_{\dot{H}^s \cap L^4}) t^{\frac{(1-s)(6s-3)}{4s-3}}.$$

Nous commençons par faire plusieurs remarques. On peut se dispenser de la condition d'appartenance à L^4 en travaillant dans les espaces de Sobolev locaux et en utilisant la vitesse finie de propagation. La méthode donne l'unicité dans la classe du point fixe local, c'est à dire modulo une condition d'intégrabilité locale en temps supplémentaire, mais on peut obtenir l'unicité dans $L_t^\infty(\dot{H}^{\frac{3}{4}})$ par un argument supplémentaire, [21]. Enfin, pour des raisons de simplicité nous allons montrer le résultat seulement pour $s > \frac{5}{6}$, et nous renvoyons à [11] pour les résultats complets, le gain de $\frac{5}{6}$ à $\frac{3}{4}$ nécessitant des complications techniques sans rapport direct avec la méthode générique.

Nous procédons en plusieurs étapes, et la preuve qui suit est informelle. Pour éviter les lourdeurs de notation, on ne considérera que la donnée $\Phi_{|t=0}$ (on "oublie" $\partial_t \Phi_{|t=0}$).

1. On commence par séparer la donnée $\Phi_0 \in \dot{H}^s$: $\Phi_0 = u_0 + v_0$ où u_0 est dans $\dot{H}^1$ avec une grande norme et v_0 est dans $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ avec une petite norme. Ceci est toujours possible, par exemple par séparation fréquencielle à la fréquence $|\xi| \sim 2^J$ avec J suffisamment grand.
2. On résout l'équation (1) avec la petite donnée v_0. Ceci nous donne une solution globale petite, v dans $C_t(\dot{H}^{\frac{1}{2}}) \cap L_t^4(L_x^4)$, et toutes les normes de v sont petites et de taille plus petite que $2\|v_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}$, qui est d'ordre $2^{(\frac{1}{2}-s)J}$. On notera que la condition de petitesse nous force à choisir $2^{(\frac{1}{2}-s)J} \lesssim \varepsilon_0$. Dans l'optique d'une étape ultérieure, il est bon de remarquer que toute régularité additionnelle est préservée, c'est-à-dire par exemple que

   $$\|v\|_{C_t(\dot{H}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}) \cap L_t^3(L_x^6)} \approx 2^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-s)J}, \tag{1}$$

   puisque $v_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}$ (en fait, $v_0 \in \dot{H}^s$ pour tout $s \in (\frac{1}{2}, 1)$).
3. Pour obtenir une solution de l'équation que nous avions au départ, nous étudions une équation perturbée,

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t^2 u - \Delta u + u^3 + 3u^2 v + 3v^2 u & = & 0 \\ (u, u_t)_{|t=0} & = & (u_0, u_1). \end{array} \right. \tag{2}$$

   Il est facile de voir que cette équation est localement bien posée dans $\dot{H}^1$, sur un intervalle de temps dépendant uniquement de $\|u_0\|_{\dot{H}^1}$. Pour cela, on effectue un point fixe dans $C_t(\dot{H}^1)$. Il suffit de prouver que les termes non-linéaires sont dans $L_t^1(L_x^2)$. En utilisant l'injection de Sobolev, $u^3 \in C_t(L_x^2)$ et donc localement est intégrable en temps. D'autre part, $v \in L_t^3(L_x^6)$ puisque v_0 est dans $\dot{H}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}$ (voir l'étape précédente). Cela nous donne $v^2 u \in L_t^1(L_x^2)$ par Hölder. Le terme qui reste, $u^2 v$, est contrôlé par les deux précédents, donc si l'on dénote par $|||\cdot|||$ la norme dans l'espace du point fixe, nous avons obtenu

   $$|||u|||_T \lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^1} + \|u_1\|_{L^2} + 2^{2j(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-s)} T^{\frac{1}{3}} |||u|||_T + T|||u|||_T^3. \tag{3}$$

   Ainsi, le terme linéaire à droite peut être absorbé à gauche, dès que $T \lesssim 2^{-6j(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-s)}$. Nous obtenons donc le résultat souhaité, avec

   $$T \lesssim \inf\left(2^{-6j(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-s)}, \frac{1}{\|u_0\|_{\dot{H}^1}^2}\right). \tag{4}$$

4. Pour étendre cette solution locale pour tout temps, il nous faut obtenir une borne a priori sur l'énergie de la solution u. Pour obtenir cette borne, il suffit d'utiliser l'inégalité d'énergie, sous réserve que les termes perturbatifs puissent être contrôlés par la seule énergie de u. Effectivement, nous avons

$$\begin{aligned}\|u\|_{\dot H^1}^2 + \|\partial_t u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|u\|_{L^4}^4 &\leq \|u_0\|_{\dot H^1}^2 + \|\partial_t u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^4}^4 \\ &\quad + 6\int_0^t |u^2 v \partial_t u|\, ds + 6\int_0^t |v^2 u \partial_t u|\, ds.\end{aligned}$$

En prenant le supremum pour $t < T$, avec $H_T \overset{\text{déf}}{=} \sup_{t<T}(\|u\|_{\dot H^1}^2 + \|\partial_t u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^4}^4)$, nous obtenons

$$H_T \lesssim H_0 + H_T \int_0^T \|v\|_{L^6_x}^2 ds + H_T^{\frac{3}{2}} \int_0^T \|v\|_{L^6_x} ds,$$

où l'on a utilisé Hölder et l'injection de Sobolev pour les intégrales à droite. En combinant avec (1), il vient

$$E_T \lesssim 2^{2J(1-s)} + E_T T^{\frac{1}{3}} 2^{2J(\frac{2}{3}-s)} + E_T^{\frac{3}{2}} T^{\frac{2}{3}} 2^{J(\frac{2}{3}-s)}, \tag{5}$$

qui nous donne le contrôle de E_T pour T arbitrairement grand, aussi longtemps que $s > \frac{5}{6}$: il suffit de choisir J assez grand, puisque l'on a besoin de

$$T^{\frac{4}{3}} 2^{2J(1-s+\frac{2}{3}-s)} \lesssim 1. \tag{6}$$

Cette dernière partie est la seule partie non triviale de la preuve, si l'on souhaite obtenir le résultat optimal $s > \frac{3}{4}$: Pour cela il est nécessaire de raffiner les estimations sur les intégrales qui apparaissent dans l'inégalité d'énergie, pour remplacer le facteur $\frac{2}{3} - s$ dans (5) par $\frac{1}{2} - s$. En fait, et en ignorant les epsilons, (6) devient alors

$$T\|u_0\|_{\dot H^1}^2 \|v_0\|_{\dot H^{\frac{1}{2}}}^2 \lesssim 1. \tag{7}$$

Afin de choisir T aussi grand que l'on veut, il faut jouer avec les tailles respectives de u_0 et de v_0, ce qui conduit immédiatement à la condition $s > \frac{3}{4}$: prenons $\|v_0\|_{\dot H^{\frac{1}{2}}} \approx M^{-1}\|\Phi\|_{\dot H^s}$ où M est grand. Alors $\|u_0\|_{\dot H^1} \approx M^{\frac{\theta}{1-\theta}}\|\Phi\|_{\dot H^s}$, où $s = \theta + \frac{1}{2}(1-\theta)$. Ceci force finalement $2\theta - 1 < 0$. Cette frontière $\theta = \frac{1}{2}$ entre la loi de conservation (ici, $\dot{H}^1$) et l'échelle (ici, $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$) semble partie intégrante de la méthode, et apparaît aussi dans la méthode originale de Bourgain. Il est possible que les techniques développées pour KdV ([7]) ou NLS ([6]) permettent de franchir cette barrière. On notera que dans le cas de KdV, le meilleur résultat disponible, ([7]) est exactement à $\theta = \frac{1}{2}$, mais que l'équation est localement mal-posée en dessous.

2 Stabilité pour l'équation de Navier-Stokes tridimensionnelle

Nous nous intéressons aux équations de Navier-Stokes incompressibles dans l'espace entier,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & \Delta u - \nabla \cdot (u \otimes u) - \nabla p, \\ \nabla \cdot u & = & 0, \\ u(x,0) & = & u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^3,\ t \geq 0. \end{array} \right. \tag{8}$$

Il est bien connu qu'il existe deux théories distinctes pour le problème de Cauchy : les solutions faibles de J. Leray ([18]), pour des données initiales $u_0 \in L^2$, qui sont globales mais pour lesquelles l'unicité (ou la propagation de la régularité) est un problème ouvert ; et les solutions "fortes" de H. Fujita et T. Kato ([15]) pour des données initiales $u_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}$, qui sont uniques et locales en temps, c'est-à-dire que $u \in C([0,T^\star), \dot{H}^{\frac{1}{2}})$. Notre but est d'étudier une solution pour laquelle on suppose a priori que $T^\star = +\infty$. Remarquons que si l'on suppose la donnée petite alors la solution est effectivement globale. Dans [10] nous montrons qu'une solution globale "grande" devient nécessairement petite après un certain temps, ce qui entraîne notamment qu'elle est stable. Nous allons présenter ici un autre cas particulier, qui induit le précédent, le cas d'une solution globale $u \in C([0,T^\star), L^3)$. Nous allons montrer

Théorème 2
Soit $u \in C([0,+\infty[, L^3)$ une solution de (8). Alors,
- *il ne peut y avoir explosion à $t = +\infty$, et plus précisément*

$$\lim_{t \to +\infty} \|u(t)\|_{L^3} = 0.$$

– *La solution u possède les mêmes propriétés d'intégrabilité et de décroissance à l'infini que les solutions petites.*

La première partie du théorème est implicite dans [17] où elle est obtenue en corollaire de l'étude des solutions faibles L^2_{loc}. Remarquons qu'aucune hypothèse n'est faite sur le taux de croissance de la norme L^3 de la solution. La seconde partie du théorème peut se voir comme une conséquence de la première partie, sous réserve que l'on dispose d'un résultat de persistance du type suivant. Il s'agit de la réciproque du résultat bien connu ([5]) dans le contexte $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$: si une solution $u \in C([0,T^\star); \dot{H}^{\frac{1}{2}})$ appartient à $L^2((0,T^\star), \dot{H}^{\frac{3}{2}})$ alors elle est prolongeable dans $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ au-delà de $T^\star$.

THÉORÈME 3
Soit $T^* < +\infty$ et soit $u \in C([0,T^\star]; L^3)$ une solution de (8). Alors

$$\int_0^{T^\star} \|u\|^3_{\dot{B}_3^{\frac{2}{3},3}}\, ds < +\infty.$$

Ainsi nous obtenons donc la seconde partie du Théorème 2 de la manière suivante. Il existe T tel que $u(T)$ soit petit en norme L^3 ; par la théorie des solutions à données petites $u \in L^3((T,\infty); \dot{B}_3^{\frac{2}{3},3})$ et par le Théorème 3 (cas T^* fini), $u \in L^3((0,T); \dot{B}_3^{\frac{2}{3},3})$ d'où l'on conclut que $u \in L^3((0,\infty); \dot{B}_3^{\frac{2}{3},3})$. La persistance d'une norme du type de $L^3((0,\infty); \dot{B}_3^{\frac{2}{3},3})$ permet de montrer la persistance de toutes les autres normes modelées sur les propriétés du semi-groupe linéaire, ce qui conduit au résultat recherché.

Une conséquence importante du Théorème 2 est qu'il permet de démontrer un théorème de stabilité sous l'hypothèse générique $u \in C_t(L^3)$. Dans le cas où la solution est supposée plus régulière, $u \in C_t(H^1)$, alors un théorème de stabilité a été démontré dans [22] sous l'hypothèse de petitesse à l'infini $\nabla u \in L^4_t(L^2_x)$, qui peut être éliminée grâce au Théorème 2.

THÉORÈME 4
Soit $u \in C_t(L^3)$ une solution a priori globale de (8). Alors cette solution est stable, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon(u)$ tel que si $\|u_0 - v_0\|_{L^3} < \varepsilon(u)$ alors v, la solution de condition initiale v_0, est globale et

$$\|(u-v)(t)\|^3_{L^3} + \int_0^t \|(u-v)(s)\|^3_{\dot{B}_3^{\frac{2}{3},3}}\, ds \le C\|u_0 - v_0\|^3_{L^3} e^{C\int_0^t \|u\|^3_{\dot{B}_3^{\frac{2}{3},3}} ds}.$$

Nous renvoyons à [9] pour les preuves complètes et étendues au cadre des espaces de Besov $\dot{B}_p^{-(1-\frac{3}{p}),q}$ avec $1 \leq p,q < +\infty$. Remarquons que le cadre "optimal" BMO^{-1} est inatteignable par les méthodes développées ici. Nous donnons maintenant une idée des preuves, basées sur une combinaison des techniques introduites dans [3] et [12]. On notera que la preuve exposée ici s'applique en fait au cadre Besov, sous la condition $\frac{2}{q}+\frac{3}{p} > 1$ (et en supposant une forme d'unicité si la régularité est négative). Il est nécessaire de procéder différemment dans les autres cas.

2.1 Démonstration du Théorème 2

La remarque cruciale est la suivante : si u_0 est dans $L^3 \cap L^2$, alors par unicité fort-faible ([23]) la solution u reste dans L^2 et vérifie l'inégalité d'énergie

$$\forall t \geq 0, \quad E(u) \stackrel{\text{déf}}{=} \|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 \, ds \leq \|u_0\|_{L^2}^2.$$

Par suite, $u \in L_t^\infty(L^2) \cap L_t^2(\dot{H}^1)$, et par interpolation u est dans $L_t^4(\dot{H}^{\frac{1}{2}})$, donc par injection de Sobolev, $u \in L_t^4(L^3)$. Pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe donc un temps t_0 tel que $\|u(t_0)\|_{L^3} \leq \varepsilon_0$, et à partir de ce temps on peut appliquer la théorie des petites solutions : la solution reste petite et tend vers zéro à l'infini en norme L^3 (voir par exemple [14]). Pour réduire le cas général à ce cas, on utilise la procédure de séparation introduite dans [2]. Plus précisément, on décompose $u_0 = v_0 + w_0$ où $w_0 \in L^3$ avec une petite norme et $v_0 \in L^3 \cap L^2$ avec une grande norme. On résout l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} &= \Delta w - \nabla \cdot (w \otimes w) - \nabla p, \\ \nabla \cdot w &= 0, \\ w(x,0) &= w_0(x) \end{cases}$$

Par la théorie des données petites, on obtient une solution $w \in C_t(L^3) \cap L_t^3(\dot{B}_3^{\frac{2}{3},3})$ avec une petite norme (voir par exemple [4]) et qui tend vers zéro à l'infini, puisque par unicité ([8]) cette solution est aussi la solution de Kato ; on a en particulier

$$\|w(t)\|_{L^3}^3 + \int_0^t \|w(s)\|_{\dot{B}_3^{\frac{2}{3},3}}^3 \, ds \leq \|w_0\|_{L^3}^3. \tag{9}$$

Ensuite, on considère la différence $v \overset{\text{déf}}{=} u - w$, qui vérifie l'équation

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial v}{\partial t} & = & \Delta v - \nabla \cdot (v \otimes v) - \nabla \cdot (w \otimes v) - \nabla \cdot (v \otimes w) - \nabla p, \\ \nabla \cdot v & = & 0, \\ v(x,0) & = & v_0(x) \end{array} \right.$$

On sait que v appartient à l'espace $C_t(L^3) \cap L^3_{t,loc}(\dot{B}_3^{\frac{2}{3},3})$, car w appartient à cet espace, de même que u grâce au Théorème 2. En se souvenant que $v_0 \in L^2$, on peut montrer qu'en fait $v \in C_t(L^2)$, et même $v \in L^2_{t,loc}(\dot{H}^1)$. Nous pouvons donc écrire une inégalité d'énergie pour v : multiplions l'équation de v par v et intégrons en temps et espace pour obtenir

$$(11) \qquad \|v(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|v\|_{\dot{H}^1}^2 \, ds \le \|v_0\|_{L^2}^2 + 2\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (v \cdot \nabla w) \cdot v \, dx \, ds \right|.$$

On estime maintenant le terme de gauche en utilisant une estimation prouvée dans [12],

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (v \cdot \nabla w) \cdot v \, dx \, ds \right| &= \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} (v \cdot \nabla v) \cdot w \, dx \, ds \right| \\ &\le \int_0^t \|\nabla v\|_{L^2}^2 \, ds + C \int_0^t \|v\|_{L^2}^2 \|w\|^3_{\dot{B}_3^{\frac{2}{3},3}} \, ds, \end{aligned}$$

et comme $w \in L^3_t(\dot{B}_3^{\frac{2}{3},3})$ on conclut que l'énergie de v est bornée par le lemme de Gronwall. On obtient alors par le raisonnement précédent via $\|v\|_{L^4_t(L^3)}$ qu'il existe T tel que $\|v(T)\|_{L^3} \le \|w_0\|_{L^3}$. On en déduit que $\|u(T)\|_{L^3} \le 2\|w_0\|_{L^3}$ et par la théorie des solutions petites que $\lim_{t \to \infty} \|u(t)\|_{L^3} = 0$. Nous avons déjà montré la seconde partie à partir de la première et du Théorème 3, le Théorème 2 est donc démontré.

2.2 Démonstration du Théorème 3

On commence par remarquer que la norme $L^3_t(\dot{B}_3^{\frac{2}{3},3})$ est finie pour un petit intervalle de temps après l'instant initial (par unicité). Il s'agit donc de montrer qu'elle ne peut exploser jusqu'à $T^\star$ inclus. On va alors écrire une sorte d'inégalité d'énergie pour la norme $\dot{B}_3^{0,3}$, comme dans [3].

En fait, nous allons énoncer une proposition qui est utile par elle-même, et qui est une généralisation des estimations de [3].

Proposition 1
Soit u une solution de (8) dont la donnée $u_0 \in \dot{B}_p^{s,q}$, $s_q = s + \frac{2}{q} > 0$, $q \geq 2$. Définissons $\alpha_j^q = \|u_j\|_p^q 2^{jqs}$, $\beta_j^q = \|u_j\|_p^q 2^{jqs_q} = 2^{2j}\alpha_j^q$. Alors, on a une estimation de la forme

$$\begin{aligned} \alpha_j^q(t) + \int_0^t \beta_j^q ds &\lesssim \alpha_j^q(0) + \int_0^t \|\nabla S_j u\|_\infty \alpha_j^q ds \\ &+ \int_0^t \|\nabla u_j\|_\infty 2^{2j} \beta_j^{q-2} \sum_{j \lesssim k} \beta_k^2 2^{-2ks_q} ds \ . \end{aligned} \tag{12}$$

Nous allons prouver la proposition en paralinéarisant l'équation. On localise à la fréquence $\xi \approx 2^j$, $u_j = \Delta_j u$,

$$\partial_t u_j - \Delta u_j + \Delta_j((u \cdot \nabla)u) = -\nabla p_j. \tag{13}$$

On projette sur les champs de vecteurs à divergence nulle,

$$\partial_t u_j + \mathbb{P}\Delta_j((u \cdot \nabla)u) = 0, \tag{14}$$

où $\mathbb{P}$ est l'opérateur matriciel dont les coefficients sont $\delta_{ij} - R_i R_j$, avec δ_{ij} le symbole de Kronecker et R_i, R_j les transformées de Riesz. En multipliant (13) coordonnées par coordonnées par $|u_j^{(l)}|^{p-2} u_j^{(l)}$, où $u_j^{(l)}$ est une coordonnée de u_j, et en intégrant, on trouve

$$\int_x \partial_t u_j^{(l)} |u_j^{(l)}|^{p-2} u_j^{(l)}\, dx - \int_x \Delta u_j^{(l)} |u_j^{(l)}|^{p-2} u_j^{(l)}\, dx = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u_j^{(l)}\|_p^p + c_p \|u_j^{(l)}\|_p^p, \tag{15}$$

où pour le second terme on a utilisé l'inégalité de Poincaré montrée dans [20].

On peut alors se concentrer sur le terme de convection. Appelons v_j le vecteur de coordonnées $|u_j^{(l)}|^{p-2} u_j^{(l)}$, il s'agit d'estimer

$$\int \mathbb{P}\Delta_j((u \cdot \nabla)u) \cdot v_j\, dx. \tag{16}$$

On décompose $(u \cdot \nabla)u$ en paraproduit,

$$(u \cdot \nabla)u = \sum_k (S_{k-1}u \cdot \nabla)u_k + (u_k \cdot \nabla)S_{k-1}u + \sum_{|k-k'| \leq 1} (u_{k'} \cdot \nabla)u_k \tag{17}$$

Pour ces trois termes, P_1, P_2, P_3, il est nécessaire de préserver la structure vectorielle seulement pour le premier d'entre eux. Pour les autres on peut les voir comme des (sommes de) termes scalaires. Sur le second, en utilisant Hölder et la continuité de $\mathbb{P}$ sur L^p,

$$|\int P_2 \cdot v_j dx| \lesssim \sum_{k\sim j} \|\nabla S_{k-1}u\|_\infty \|u_k\|_p \|u_j\|_p^{p-1}, \tag{18}$$

où $k \sim j$ est une somme sur les indices proches, en fait $k = j-1, j, j+1$ (presque orthogonalité dans la variable de Fourier). Le troisième terme se réécrit

$$\int P_3 \cdot v_j dx = \sum_l \int \Delta_j \left(\sum_{j \lesssim k \sim k'} \mathbb{P}\nabla \cdot (u_{k'} \otimes u_k) \right)^{(l)} |u_j^{(l)}|^{p-2} u_j^{(l)}\, dx, \tag{19}$$

ce qui par intégration par partie et Hölder donne

$$|\int P_3 \cdot v_j dx| \lesssim (p-1) \sum_{j \lesssim k \sim k'} \|u_{k'}\|_p \|u_k\|_p \|u_j^{(l)}\|_p^{p-2} \|\nabla u_j\|_\infty. \tag{20}$$

Remarquons que si l'on n'intègre pas par partie, on peut écrire simplement

$$|\int P_3 \cdot v_j dx| \lesssim \sum_{j \lesssim k \sim k'} \|\nabla u_{k'}\|_\infty \|u_k\|_p \|u_j\|_p^{p-1}, \tag{21}$$

ce qui donnerait une alternative dans les cas où $q < 2$. Il reste donc le premier terme, qui s'écrit

$$\mathbb{P}\Delta_j \sum_k (S_{k-2}u \cdot \nabla) u_k = \mathbb{P}\Delta_j (S_{j-2}u \cdot \nabla) \sum_{k\sim j} u_k + \mathbb{P}\Delta_j \sum_{k \sim k' \sim j} (u_{k'} \cdot \nabla) u_k. \tag{22}$$

La seconde somme, $P_1^{''}$, est la plus facile, et s'estime comme (18) :

$$|\int P_1^{''} v_j dx| \leq \sum_{k \sim k' \sim j} \|\nabla u_k\|_\infty \|u_{k'}\|_p \|u_j\|_p^{p-1}. \tag{23}$$

Le premier terme de (22) nécessite l'emploi d'un commutateur entre deux opérateurs matriciels, $C_l = [\mathbb{P}\Delta_j, S_{j-2}u^{(l)} Id]$, et il vient

$$P_1' = \sum_l C_l \partial_l \sum_{k\sim j} u_k + (S_{j-2}u \cdot \nabla) \sum_{k\sim j} \mathbb{P}\Delta_j u_k \tag{24}$$

où la dernière somme, P'_{12}, se réduit à $\mathbb{P}\Delta_j u = u_j$. Ainsi nous avons donc finalement le terme correspondant dans (16) qui est en fait

$$\int P'_{12} \cdot v_j dx = \sum_l \int ((S_{j-2}u \cdot \nabla)u_j^{(l)})|u_j^{(l)}|^{p-2}u_j^{(l)}\, dx, \tag{25}$$

ce qui donne après intégration par partie, en se souvenant que

$$\int a|b|^{p-2}b\partial b = -\frac{2}{p}\int |b|^p \partial a, \tag{26}$$

la majoration suivante,

$$|\int P'_{12} \cdot v_j dx| \leq \sum_l \frac{C}{p}\|\nabla S_{j-2}u\|_\infty \|u_j^{(l)}\|_p^p. \tag{27}$$

Pour le terme avec le commutateur, P'_{11}, on peut oublier la structure matricielle et faire une estimation scalaire. On a donc besoin d'estimer $[\tilde{\Delta}_j, S_{j-2}u^{(l)}]$, où $\tilde{\Delta}_j$ est indifféremment Δ_j ou $R_\mu R_\nu \Delta_j$ suivant le coefficient matriciel qu'on considère. Dans tous les cas, $\tilde{\Delta}_j$ est une convolution par une fonction régulière. On utilise alors le lemme suivant,

Lemme 1
Soit $f \in L^p$, $\nabla g \in L^\infty$, alors

$$\|[\tilde{\Delta}_j, g]f\|_p \lesssim 2^{-j}\|\nabla g\|_\infty \|f\|_p. \tag{28}$$

Puisque $\tilde{\Delta}_j f = 2^{nj}\phi(2^j x) \star f$, on écrit

$$[\tilde{\Delta}_j, g]f(x) = \int 2^{nj}\phi(2^j(x-y))(g(y)-g(x))f(y)dy.$$

On utilise alors la formule de Taylor avec reste intégral, pour obtenir

$$\begin{aligned}
|[\tilde{\Delta}_j, g]f(x)| &\leq \int 2^{nj}|\phi|(2^j(x-y))|x-y|\|\nabla g\|_\infty |f|(y)dy, \\
&\leq 2^{-j}\|\nabla g\|_\infty \int 2^{nj}\psi(2^j(x-y))|f|(y)dy, \\
\|[\tilde{\Delta}_j, g]f\|_p &\leq 2^{-j}\|\nabla g\|_\infty \|\psi\|_1 \|f\|_p,
\end{aligned}$$

car $\psi(x) = |x||\phi|(x) \in L^1$, ce qui achève la preuve du Lemme 1.

De cette manière, P'_{11} devient

$$
\begin{aligned}
|\int P'_{11}\cdot v_j dx| &\lesssim \sum_l \|\nabla S_{j-2}u\|_\infty 2^{-j}\|\nabla u_j^{(l)}\|_p \|u_j^{(l)}\|_p^{p-1} \\
&\lesssim \|\nabla S_{j-2}u\|_\infty \|u_j\|_p^p. \qquad (29)
\end{aligned}
$$

En regroupant toutes les estimations, on obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p}\frac{d}{dt}(\|u_j\|_p^p) + c_p\|u_j\|_p^p &\lesssim \sum_{k\sim j}\|\nabla S_j u\|_\infty \|u_k\|_p\|u_j\|_p^{p-1} \\
&+ \sum_{j\lesssim k'\sim k} \|u_{k'}\|_p\|u_k\|_p\|u_j\|_p^{p-2}\|\nabla u_j\|_\infty, \qquad (30)
\end{aligned}
$$

Maintenant, sachant que $q\geq 2$, intégrons en temps et multiplions par 2^{jqs},

$$
2^{jqs}\|u_j\|_p^q(t) \lesssim 2^{jqs}\|u_j\|_p^q(0) + \int_0^t \|\nabla S_{j+1}u\|_\infty \left(\sum_{k\sim j} 2^{jqs}\|u_j\|_p^{q-1}\|u_k\|_p\right) ds
$$
$$
+\int_0^t \|\nabla u_j\|_\infty \left(\sum_{j\lesssim k'\sim k} 2^{2s(j-k)}2^{ks}\|u_{k'}\|_p 2^{k's}\|u_k\|_p 2^{j(q-2)s}\|u_j\|_p^{q-2}\right) ds,
$$

qui est l'estimation désirée, en réduisant les sommes $k\sim j$ et $k\sim k'$. Ceci achève la preuve de la Proposition 1.

Maintenant, nous allons prouver un résultat légèrement plus général que le Théorème 3, c'est à dire

Proposition 2
Fixons $s=\frac{3}{p}-1$. Soit $u\in C([0,T],\dot B_p^{s,q})$ une solution de (8), alors u appartient à $L^q([0,T],\dot B_p^{s_q,q})$.

On réécrit l'estimation (12) de la manière suivante,

$$
\int_0^t \beta_j^q \lesssim \alpha_j^q(0) + \int_0^t 2^{-2j}\|\nabla S_j u\|_\infty \beta_j^q ds + \int_0^t 2^{-2j}\|\nabla\Delta_j u\|_\infty \beta_j^{q-2}\gamma_j^2 ds, \qquad (31)
$$

où γ_j^2 est une convolution $l^q - l^1$ (ainsi, quand on somme, γ se comporte comme β). Maintenant, on utilise de façon cruciale la continuité en temps, de telle façon qu'il existe ε tel que

$$
\sup_{[T-\varepsilon,T]}\|u-u(T-\varepsilon)\|_{\dot B_p^{s,q}} < \frac{1}{10}, \qquad (32)
$$

et, compte-tenu de la valeur de s, cette norme domine la norme $\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}$ (qui apparaît à droite comme un majorant des termes avec $\|\nabla S_j u\|_\infty$ ou $\|\nabla \Delta_j u\|_\infty$). D'autre part, à $T-\varepsilon$ fixé, $u(T-\varepsilon) \in \dot{B}_p^{s,q}$ donc il existe J tel que

$$\sup_{|j|>J} 2^{-j} \|S_j u(T-\varepsilon)\|_\infty < \frac{1}{10}, \tag{33}$$

puisque la suite des $2^{-j}\|S_j u(T-\varepsilon)\|_\infty$ est dans l^q. Maintenant, on réécrit (31) entre $T-\varepsilon$ et T, et l'on somme sur j. En utilisant les deux majorations précédentes, on se ramène à une somme finie à droite, c'est à dire

$$\sum_j \int_0^t \beta_j^q \lesssim \sum_j \alpha_j^q(0) + \sup_{|j|<J} (2^{-2j}\|\nabla S_j u\|_\infty) \sum_{|j|<J} \int \beta_j^q ds, \tag{34}$$

et maintenant comme la somme est finie, on peut remplacer β_j par $2^2 j \alpha_j$ et conclure que α_T fini entraîne β_T fini.

2.3 Démonstration du Théorème 4

Comme il l'a été remarqué, la solution a priori globale $u \in C_t(L^3)$ est automatiquement dans $L_t^3(\dot{B}_3^{\frac{2}{3},3})$. On considère donc l'équation vérifiée par la différence $w \overset{\text{déf}}{=} u - v$, c'est à dire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial w}{\partial t} & = & \Delta w - \nabla \cdot (w \otimes w) - \nabla \cdot (w \otimes u) - \nabla \cdot (u \otimes w) - \nabla p, \\ \nabla \cdot w & = & 0, \\ w(x,0) & = & w_0(x) \overset{\text{déf}}{=} u_0(x) - v_0(x), \end{array} \right. \tag{35}$$

et l'on cherche une estimation a priori pour cette équation. On écrit donc de nouveau une “inégalité d'énergie” pour la norme $\dot{B}_3^{0,3}$, c'est à dire que dans un premier temps on va écrire l'équivalent de (12) pour le système perturbé, puis sommer sur les blocs dyadiques. Commençons par l'estimation à j fixé : dans notre cas particulier on a $p = q = 3$, $s = 0$ et $s_q = \frac{2}{3}$. Pour obtenir notre estimation, il suffit de remplacer systématiquement les facteurs de droite comportant trois fois u par un facteur de u et deux facteurs de w, en plus des termes trilinéaires en w. Ces termes trilinéaires en w sont immédiatement absorbés à gauche puisqu'on cherche à montrer a priori que

$\|w\|^3_{\dot B^{0,3}_3} + \int_0^t \|w\|^3_{\dot B^{\frac23,3}_3} ds$ est petit. Appelons α_j et β_j les quantités définies à partir des blocs de w (et non plus u). Nous allons ignorer la présence des interactions haute-fréquence qui se somment beaucoup plus facilement, et considérer le modèle suivant, qui contient le terme a priori le plus ennuyeux, c'est à dire les basses fréquences de u :

$$\alpha_j^3(t) + \int_0^t \beta_j^3 \, ds \lesssim \alpha_j^3(0) + \int_0^t \|\nabla S_j u\|_\infty \alpha_j^3 \, ds. \tag{36}$$

On peut réécrire le dernier terme, comme

$$\int_0^t \|\nabla S_j u\|_\infty \alpha_j^3 \, ds = \int_0^t (2^{-2j}\|\nabla S_j u\|_\infty \beta_j)\beta_j^2 \, ds,$$

et utiliser la convexité, pour obtenir

$$\int_0^t \|\nabla S_j u\|_\infty \alpha_j^q \, ds \le 10 \int_0^t (2^{-2j}\|\nabla S_j u\|_\infty \beta_j)^3 \, ds + \frac{1}{10}\int_0^t \beta_j^3 \, ds.$$

On somme alors sur j : le second terme est absorbé à gauche, et il vient (en majorant le terme avec $S_j u$ par sa somme sur j),

$$\sum_j \alpha_j^3(t) + c\sum_j \int_0^t \beta_j^3 \, ds \lesssim \sum_j \alpha_j^3(0) + \int_0^t (\sum_j (2^{-\frac43 j}\|S_j u\|_\infty)^3) \sum_j \alpha_j^3 \, ds.$$

En utilisant l'inclusion $\dot B^{\frac23,3}_3 \hookrightarrow \dot B^{-\frac43,3}_\infty$, on conclut par Gronwall que

$$\sum_j \alpha_j^3(t) + c\sum_j \int_0^t \beta_j^3 \, ds \lesssim \sum_j \alpha_j^3(0) \exp(C\int_0^t \|u\|^3_{\dot B^{\frac23,3}_3} \, ds). \tag{37}$$

Ceci nous donne le contrôle de la norme $\dot B^{0,3}_3$ de $u - v$, ainsi que de la norme $L^3_t(\dot B^{\frac23,3}_3)$. Cependant, nous avons annoncé le contrôle de la norme L^3. Pour estimer la différence dans L^3, on estime en fait la différence des parties non-linéaires dans un espace meilleur, par exemple $C_t(\dot B^{0,\frac32}_3)$. Il est en fait facile de montrer que (si $S(t) = exp(-t\Delta)$)

$$\|w - S(t)w_0\|_{C_t(\dot B^{0,\frac32}_3)} \lesssim \|w\|_{L^3_t(\dot B^{\frac23,3}_3)} \|u+v\|_{L^3_t(\dot B^{\frac23,3}_3)}, \tag{38}$$

en utilisant d'une part la loi de produit $\dot{B}_3^{\frac{2}{3},3} \times \dot{B}_3^{\frac{2}{3},3} \hookrightarrow \dot{B}_3^{\frac{1}{3},\frac{3}{2}}$, puis le fait que le terme de Duhamel $\int_0^t S(t-s)f(s)ds$ dans l'équation intégrale renvoie le terme source $f \in L_t^{\frac{3}{2}}(\dot{B}_3^{-\frac{2}{3},\frac{3}{2}})$ dans $C_t(\dot{B}_3^{0,\frac{3}{2}})$, ce qui permet de conclure. On obtient finalement la majoration annoncée, quitte à absorber les termes additionnels en $u+v$ dans l'exponentielle.

Références

[1] Calixto P. Calderón. Addendum to the paper : "Existence of weak solutions for the Navier-Stokes equations with initial data in L^p" *Trans. Amer. Math. Soc.*, 318(1) :201–207, 1990.

[2] Calixto P. Calderón. Existence of weak solutions for the Navier-Stokes equations with initial data in L^p. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 318(1) :179–200, 1990.

[3] Marco Cannone et Fabrice Planchon. More Lyapunov functions for the Navier-Stokes equations. In *The Navier-Stokes equations : theory and numerical methods (Varenna, 2000)*, pages 19–26. Dekker, New York, 2002.

[4] J.-Y. Chemin. About Navier-Stokes system. Prépublication du Laboratoire d'Analyse Numérique R 96023, 1996.

[5] Jean-Yves Chemin. Remarques sur l'existence globale pour le système de Navier-Stokes incompressible. *SIAM Journal Math. Anal.*, 23 :20–28, 1992.

[6] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, et T. Tao. Global well-posedness for the Schrödinger equations with derivative. Prépublication.

[7] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, et T. Tao. Sharp global well-posedness results for periodic and non-periodic KdV and modified KdV on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$. Prépublication.

[8] Giulia Furioli, Pierre G. Lemarié-Rieusset, et Elide Terraneo. Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces fonctionnels limites pour Navier-Stokes. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 16(3) :605–667, 2000.

[9] Isabelle Gallagher, Dragoş Iftimie, et Fabrice Planchon. On stability of global solutions to the Navier-Stokes equations. Prépublication.

[10] Isabelle Gallagher, Dragoş Iftimie, et Fabrice Planchon. Non-explosion en temps grand et stabilité de solutions globales des équations de Navier-Stokes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 2002.

[11] Isabelle Gallagher et Fabrice Planchon. On global solutions to a defocusing semi-linear wave equation. à paraître, *Rev. Mat. Iberoamericana.*

[12] Isabelle Gallagher et Fabrice Planchon. On infinite energy solutions to the Navier-Stokes equations : global 2D existence and 3D weak-strong uniqueness. à paraître, *Arch. Rat. Mech. An.*, 2001.

[13] J. Ginibre et G. Velo. The global Cauchy problem for the nonlinear Klein-Gordon equation. *Math. Z.*, 189(4) :487–505, 1985.

[14] Tosio Kato. Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. *Math. Z.*, 187(4) :471–480, 1984.

[15] Tosio Kato et Hiroshi Fujita. On the nonstationary Navier-Stokes system. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 32 :243–260, 1962.

[16] Carlos E. Kenig, Gustavo Ponce, et Luis Vega. Global well-posedness for semi-linear wave equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 25(9-10) :1741–1752, 2000.

[17] Pierre-Gilles Lemarié. Recent progress in the Navier-Stokes problem. À paraître, *CRC Press*, 2002.

[18] Jean Leray. Sur le mouvement d'un liquide visqueux remplissant l'espace. *Acta Mathematica*, 63 :193–248, 1934.

[19] Hans Lindblad et Christopher D. Sogge. On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equations. *J. Funct. Anal.*, 130(2) :357–426, 1995.

[20] Fabrice Planchon. Sur un inégalité de type Poincaré. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(1) :21–23, 2000.

[21] Fabrice Planchon. On uniqueness for semilinear wave equations. Prépublication, 2001.

[22] G. Ponce, R. Racke, T. C. Sideris, et E. S. Titi. Global stability of large solutions to the 3D Navier-Stokes equations. *Comm. Math. Phys.*, 159(2) :329–341, 1994.

[23] Wolf von Wahl. *The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations.* Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1985.