SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2001-2002

Laure Saint-Raymond

Dérivation des équations de Navier-Stokes à partir de modèles cinétiques

Séminaire É. D. P. (2001-2002), Exposé n° VI, 21 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2001-2002____A6_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

DÉRIVATION DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES À PARTIR DE MODÈLES CINÉTIQUES

LAURE SAINT-RAYMOND

1. Modélisation de gaz en régime hydrodynamique

Les modèles hydrodynamiques tels que les équations d'Euler ou de Navier-Stokes ont été d'abord établis en appliquant le principe fondamental de la dynamique de Newton à un élément infinitésimal du fluide considéré. Cette méthode apporte une modélisation de la dynamique satisfaisante dans un contexte très général, mais elle ne permet d'obtenir ni les équations d'état (exprimant par exemple la pression en fonction de la densité et de la température), ni les coefficients de transport (tels que la viscosité ou la conductivité thermique) en fonction de la nature des interactions moléculaires.

Une approche alternative consiste à les obtenir comme approximations hydrodynamiques de modèles particulaires, dans la limite où l'équilibre thermodynamique local est réalisé en tout point et à tout instant. On se propose ici de réaliser une partie de ce programme, proposé par Hilbert dans son sixième problème, et de développer une analyse asymptotique permettant de passer de modèles cinétiques aux lois de la mécanique continue.

1.1. **Modèles cinétiques.** La théorie cinétique permet de modéliser des gaz suffisamment raréfiés ; elle décrit l'état d'un système donné à un instant t donné, par une fonction $f(t,x,v) \geq 0$, mesurant la densité de molécules qui sont localisées en $x \in \Omega$ (ouvert de $\mathbf{R}^d$) et ont la vitesse $v \in \mathbf{R}^d$. Selon les forces d'interaction considérées, l'équation d'évolution de la densité f peut prendre des formes très variées. La dérivation rigoureuse de cette équation à partir de la dynamique hamiltonienne des particules, qui permettrait d'obtenir une solution globale du problème de Hilbert, est une question encore très ouverte.

Ici on suppose que les particules interagissent de façon ponctuelle et instantanée, de sorte que l'équation cinétique s'écrit

$$\partial_t f + v.\nabla_x f = C(f)\,, \tag{1}$$

où $(\partial_t + v.\nabla_x)$ est l'opérateur modélisant le transport libre, et C est un opérateur de collisions n'agissant que sur la variable v. L'hypothèse de localisation des collisions implique en particulier que la relation d'état du gaz ne fait pas intervenir de terme de volume exclu : c'est l'approximation de gaz parfait.

Pour que la dynamique ainsi définie soit compatible avec l'hydrodynamique des gaz parfaits, on suppose de plus que
(i) l'opérateur C conserve la masse, l'impulsion et l'énergie (collisions élastiques)

$$\int C(f)dv = \int C(f)|v|^2 dv = 0, \quad \int C(f)vdv = 0\,;$$

(ii) l'opérateur C satisfait le théorème H de Boltzmann (relaxation vers l'équilibre)

$$\int C(f)\log f dv \leq 0$$

avec égalité si et seulement si f est un équilibre thermodynamique, décrit par une densité Maxwellienne

$$M_{(R,U,T)}(v) = \frac{R}{(2\pi T)^{d/2}} e^{-\frac{|v-U|^2}{2T}}$$

avec $R > 0$, $T > 0$ et $U \in \mathbf{R}^d$ (dans la suite, on notera $M = M_{1,0,1}$) ;
(iii) la dérivée de Fréchet de C en tout point d'équilibre $M_{R,U,T}$ est un opérateur de Fredholm auto-adjoint négatif sur $L^2(\mathbf{R}^d, M_{R,U,T}^{-1}dv)$, dont le noyau est l'espace vectoriel engendré par $\{M, Mv_1, ...Mv_d, M|v|^2\}$.

1.2. **Nature de l'écoulement.** Le régime hydrodynamique donnant une bonne approximation de l'écoulement va dépendre fortement des caractéristiques du fluide, et notamment des ordres de grandeur des paramètres suivants

- L_o échelle de longueur d'observation,
- λ libre parcours moyen,
- T_o échelle de temps d'observation,
- τ intervalle de temps entre deux collisions,
- $c = \lambda/\tau$ vitesse du son (vitesse thermique),
- $v_* = L_o/T_o$ vitesse d'écoulement.

On définit alors les variables adimensionnées $\bar{x} = x/L_o$, $\bar{t} = t/T_o$ et $\bar{v} = v/c$ de sorte que l'équation (1) s'écrit

$$\frac{1}{T_o}\partial_{\bar{t}} f + \frac{c\bar{v}}{L_o}.\nabla_{\bar{x}} f = \frac{1}{\tau} C(f)\,,$$

soit, en fonction des nombres de Knudsen $Kn = \lambda/L_o$ et de Mach $Ma = v_*/c$,

$$Ma\,\partial_{\bar{t}} f + \bar{v}.\nabla_{\bar{x}} f = \frac{1}{Kn} C(f)\ .$$

Les régimes hydrodynamiques sont obtenus dans la limite où la fréquence des collisions est grande, de sorte que l'équilibre thermodynamique local est atteint presque instantanément : $Kn = \epsilon << 1$.

Dans une telle asymptotique, la viscosité du gaz va rester strictement positive si le nombre de Reynolds $Re = v_* L_o/\mu$ (où μ est la viscosité cinématique) reste fini. La relation de Von Karmann $Re = Ma/Kn$ implique alors que le nombre de Mach est petit $Ma = O(\epsilon)$, ce qui signifie que le gaz est essentiellement incompressible. On s'attend donc à ce qu'un tel régime soit correctement approché par les équations de Navier-Stokes (ou de Stokes selon la taille des fluctuations de vitesses).

Dans le cas où la viscosité est évanescente $1/Re = o(1)$, si le nombre de Mach $Ma = KnRe = o(1)$, le gaz est presque incompressible et l'approximation hydrodynamique est donnée par les équations d'Euler incompressibles. Si le nombre de Mach reste strictement positif, le gaz est compressible et son comportement est correctement approché par équations d'Euler compressibles (par les équations de l'acoustique si on considère des petites fluctuations autour d'un équilibre global).

1.3. **Dérivation des équations de Navier-Stokes.** La dérivation rigoureuse d'une limite hydrodynamique nécessite une bonne compréhension de la structure du système limite. Les résultats de convergence dans les régimes non visqueux sont donc très partiels : il s'agit plutôt de résultats de stabilité au voisinage des solutions régulières du système limite (convergence en temps petit).

Dans toute la suite, on s'intéresse aux régimes visqueux, et, pour simplifier, on choisit $Ma = Kn = \epsilon$:

$$\epsilon\, \partial_t f_\epsilon + v.\nabla_x f_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} C(f_\epsilon)\,. \tag{1_ϵ}$$

Pour réaliser des distributions de faible nombre de Mach $Ma = O(\epsilon)$, on considère des fluctuations d'ordre ϵ autour d'un équilibre global, typiquement

$$f_\epsilon = M(1 + \epsilon g_\epsilon)$$

où g_ϵ est borné uniformément dans un espace fonctionnel adapté, c'est-à-dire compatible avec la dynamique de (1_ϵ). Pour mesurer cette distance de f_ϵ à M, le bon outil est l'entropie relative, que l'on construit à partir de la fonctionnelle de Lyapunov $f \mapsto \iint f \log f dx dv$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} H(f_\epsilon/M) &= \iint [f_\epsilon \log\left(\frac{f_\epsilon}{M}\right) - f_\epsilon + M]dxdv \\ &= \iint M[(1+\epsilon g_\epsilon)\log(1+\epsilon g_\epsilon) - \epsilon g_\epsilon]dxdv\,. \end{aligned}$$

Puisque l'entropie décroit et que la masse et l'énergie cinétique globales sont conservées au cours de l'évolution, on a (au moins formellement)

$$\frac{d}{dt}H(f_\epsilon/M) \le 0\,.$$

De plus, l'entropie relative $H(f_\epsilon/M)$ contrôle $\epsilon^2 \iint M g_\epsilon^2 dxdv$, au moins si la fluctuation ϵg_ϵ est bornée. En particulier, si les données initiales satisfont

$$f_\epsilon(t=0,.,.) = f_\epsilon^{in} \text{ avec } H(f_\epsilon^{in}/M) \le C^{in}\epsilon^2\,, \tag{2_ϵ}$$

à extraction d'une suite $\epsilon_n \to 0$ près, la famille (g_ϵ) est relativement compacte dans $w^*\text{-}L^\infty(\mathbf{R}^+, w\text{-}L^1_{loc}(Mdvdx))$, et il existe g telle que

$$g_\epsilon \rightharpoonup g\,. \tag{3}$$

Dire que les équations de Navier-Stokes incompressibles donnent une bonne approximation du modèle cinétique $(1_\epsilon)(2_\epsilon)$ signifie que g est une fluctuation d'équilibre thermodynamique local

$$g(t,x,v) = \rho(t,x) + u(t,x)\cdot v + \theta(t,x)\frac{|v|^2-d}{2}\,, \tag{4}$$

dont les moments vérifient les équations de Navier-Stokes-Fourier

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot u &= 0\,,\\ \rho + \theta &= 0\,,\\ \partial_t u + u\cdot\nabla_x u + \nabla_x p &= \nu\Delta_x u\,,\\ \partial_t\theta + u\cdot\nabla_x\theta &= \kappa\Delta_x\theta\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Remarque. Les équations de Stokes sont obtenues en considérant des petites fluctuations, c'est-à-dire en remplaçant la borne (2_ϵ) par la condition $\epsilon^{-2}H(f_\epsilon^{in}/M) \to 0$.

Avant d'entreprendre une dérivation systématique de cette asymptotique, il est important de bien comprendre les analogies de structure entre le système limite (5) et l'équation cinétique $(1_\epsilon)(2_\epsilon)$. Les solutions faibles globales des équations de Navier-Stokes(-Fourier) ont été définies par Leray grâce à l'inégalité d'énergie

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int(|u(t,x)|^2+(d+2)\theta(t,x)^2)dx\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_0^t\int\left[\nu|\nabla_x u(s,x)|^2+(d+2)\kappa|\nabla_x\theta(s,x)|^2\right]dxds\\
&\quad\le\frac{1}{2}\int(|u^{in}(x)|^2+(d+2)\theta^{in}(x)^2)dx\,.
\end{aligned}\tag{6}$$

Cette inégalité peut être vue essentiellement comme la forme asymptotique de l'inégalité d'entropie

$$\frac{1}{\epsilon^2}H(f_\epsilon(t)/M)-\frac{1}{\epsilon^4}\int_0^t\iint C(f_\epsilon(s))\log f_\epsilon(s)dxdvds\le\frac{1}{\epsilon^2}H(f_\epsilon^{in}/M)\,,\tag{7}$$

si on sait prouver que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\iint Mg^2(t,x,v)dxdv\le\liminf\frac{1}{\epsilon^2}H(f_\epsilon(t)/M)\,,\\
&\frac{1}{2}\int_0^t\iint M(v\cdot\nabla_x g)^2(s,x,v)dxdvds\\
&\qquad\qquad\le\liminf-\frac{1}{\epsilon^4}\int_0^t\iint C(f_\epsilon(s))\log f_\epsilon(s)dxdvds.
\end{aligned}$$

Cela semble indiquer en particulier que la dissipation d'entropie donne un contrôle sur les dérivées spatiales de la fluctuation, et donc la compacité forte dont on aura besoin pour passer à la limite dans les termes non linéaires de convection.

2. Résultats de convergence vers les équations de Navier-Stokes

La dérivation de la limite hydrodynamique conduisant aux équations de Navier-Stokes est maintenant relativement bien comprise dans le cadre des solutions faibles globales. La méthode que nous allons présenter ici permet d'obtenir des résultats de convergence dans un cadre assez satisfaisant, aussi bien par le type d'opérateurs d'interaction C que par les domaines d'écoulement Ω que l'on peut envisager.

Par souci de simplicité, nous nous restreindrons dans la suite au cas où le domaine n'a pas de bords ($\Omega=\mathbf{R}^d$ ou $\Omega=\mathbf{T}^d$). Dans le cas où Ω a un bord, on sait en fait [16] passer à la limite dans la condition de réflexion de Maxwell

$$\gamma_-f=\alpha K\gamma_+f+(1-\alpha)L\gamma_+f\,,$$

où $\alpha \in [0,1]$ est le coefficient d'accommodation, K un opérateur de réflexion diffuse, et L l'opérateur de réflexion spéculaire. La nature de l'interaction macroscopique avec la paroi dépend de l'importance du freinage (réflexion diffuse). Sur un intervalle de temps macroscopique ($\sim T_o$), le nombre de collisions avec la paroi est de l'ordre de $cT_o/L_o \sim 1/\epsilon$. Si à chaque collision la réflexion diffuse est non négligeable ($\alpha = O(1)$), le freinage est complet. Si la réflexion est complètement spéculaire ($\alpha = 0$), le glissement est total. Si $\alpha = O(\epsilon)$, on peut montrer qu'on a une condition mixte (de type Robin).

2.1. **Opérateurs d'interaction.** Avant d'énoncer les principaux résultats, nous allons aussi préciser quels opérateurs d'interaction seront considérés.

L'opérateur le plus communément admis pour modéliser un gaz évoluant sous l'effet de collisions élastiques et réversibles est l'opérateur de Boltzmann (obtenu rigoureusement par Lanford pour des sphères dures, dans la limite où le système est très grand mais suffisamment dilué pour pouvoir négliger les collisions à plus de deux particules [6]). Il est donné par

$$C_B(f)(t,x,v) = \iint_{S^{d-1}\times\mathbf{R}^d} (f'f_1' - ff_1)b(v-v_1,\sigma)d\sigma dv_1\,, \qquad (8)$$

où f_1, f' et f_1' désignent les valeurs $f(t,x,v_1)$, $f'(t,x,v')$ et $f(t,x,v_1')$, avec v' et v_1' donnés en fonction de $v_1 \in \mathbf{R}^d$ et $\sigma \in S^{d-1}$ par les formules

$$v' = \frac{v+v_1}{2} + \frac{|v-v_1|}{2}\sigma\,, \quad v_1' = \frac{v+v_1}{2} - \frac{|v-v_1|}{2}\sigma\,,$$

qui assurent la conservation de l'impulsion et de l'énergie cinétique pour chaque collision binaire entre particules du gaz. Le noyau $b \equiv b(z,\sigma)$ est une fonction positive presque partout définie sur $\mathbf{R}^d \times S^{d-1}$ qui dépend des caractéristiques de l'interaction moléculaire à modéliser. Ici, on considèrera des interactions avec potentiel dur à cutoff au sens de Grad [12], c'est-à-dire qu'il existe $\eta < 1/2$ et $C_b > 0$ telles que

$$0 < b(\sigma,v) \le C_b\big(1 + \frac{1}{2}|v|^2\big)^\eta\,,$$
$$\int_{S^{d-1}} b(\sigma,v)\,d\sigma \le \frac{1}{C_b}\big(1+\frac{1}{2}|v|^2\big)^\eta\,.$$

Pour avoir l'existence de solutions globales pour toutes les données initiales physiquement admissibles (sans restriction sur la taille), on définit la notion de *solution renormalisée.*

Théorème [7]. *Soit $\epsilon > 0$, et f_ϵ^{in} une fonction mesurable, positive p.p., définie sur $\Omega \times \mathbf{R}^d$ telle que $H(f_\epsilon^{in}/M) < +\infty$. Alors il existe une* *fonction positive* $f_\epsilon \in C(\mathbf{R}_+; L^1_{loc}(\Omega; L^1(\mathbf{R}^d)))$, *vérifiant* (2_ϵ) *et*

$$\epsilon\partial_t\Gamma(f_\epsilon) + v.\nabla_x\Gamma(f_\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\Gamma'(f_\epsilon)C_B(f_\epsilon)$$

dans $L^1_{loc}(\mathbf{R}_+ \times \Omega; L^1(\mathbf{R}^d))$, *pour toute renormalisation* $\Gamma \in C^1(\mathbf{R}_+)$ *telle que* $\Gamma(0) = 0$ *et* $z \mapsto (1+z)\Gamma'(z)$ *est bornée sur* $\mathbf{R}_+$. *De plus, on a l'inégalité d'entropie*

$$H(f_\epsilon(t)/M) + \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t \iint D(f_\epsilon(s))dsdxdv \leq H(f_\epsilon^{in}/M)$$

pour tout $t > 0$, *où le terme de dissipation* $D(f)$ *est défini par*

$$D(f) = \frac{1}{4}\iint (f'f'_1 - ff_1)\log\left(\frac{f'f'_1}{ff_1}\right) b(v - v_1, \sigma)d\sigma dv_1 \geq 0\,.$$

Le modèle de BGK fournit une équation cinétique dont la théorie est beaucoup plus simple. Au lieu de prendre en compte toutes les interactions binaires entre particules, elle ne prend en compte que l'effet global de ces interactions, c'est-à-dire la relaxation vers l'équilibre thermodynamique local :

$$C_{BGK}(f) = \frac{1}{\tau}(M_f - f) \tag{9}$$

où τ est une constante de relaxation fixée, et M_f désigne la Maxwellienne locale $M_{R,U,T}$ de mêmes moments que f

$$R = \int f dv, \quad RU = \int fvdv, \text{ et } R|U|^2 + dRT = \int f|v|^2dv.$$

Un résultat de Perthame [17] donne l'existence globale de solutions faibles pour l'équation de BGK

Théorème [18]. *Soit* $\epsilon > 0$ *et* $f_\epsilon^{in} \in L^1_{loc}(\Omega \times \mathbf{R}^d)$ *une fonction mesurable, positive p.p. et telle que* $H(f_\epsilon^{in}/M) < +\infty$. *Alors il existe une solution globale positive* $f_\epsilon \in C(\mathbf{R}_+; L^1_{loc}(\Omega; L^1(\mathbf{R}^d)))$ *au système* $(1_\epsilon)(2_\epsilon)(9)$, *qui satisfait l'inégalité d'entropie*

$$H(f_\epsilon(t)/M) + \frac{1}{\epsilon^2\tau}\int_0^t\iint D(f_\epsilon)dvdxds \leq H(f_\epsilon^{in}/M)$$

pour tout $t > 0$, *où le terme de dissipation* $D(f)$ *est défini par*

$$D(f) = (M_f - f)\log\left(\frac{M_f}{f}\right) \geq 0\,.$$

De plus les lois de conservation locales sont vérifiées.

L'équation de BGK a les mêmes limites hydrodynamiques que l'équation de Boltzmann, à part que le nombre de Prandtl (qui mesure le rapport entre la conductivité thermique et la viscosité) est toujours égal à 1 dans le cas de l'équation de BGK alors qu'il dépend du noyau de collision b dans le cas de l'équation de Boltzmann. Mais la dérivation mathématique de ces limites semble être plus simple dans le cas de l'équation de BGK, puisque les lois de conservation locales sont établies, et que l'on a un bon contrôle sur la relaxation, c'est-à-dire sur la distance entre la densité et l'équilibre local correspondant.

2.2. **Convergence faible.**

Théorème 1. *Soit (f_ϵ^{in}) une famille mesurable de fonctions p.p. positives sur $\Omega \times \mathbf{R}^d$, telle que*

$$H(f_\epsilon^{in}/M) \leq C^{in}\epsilon^2$$

pour $C^{in} > 0$, et

$$\frac{1}{\epsilon}P\int v f_\epsilon dv \to u^{in}, \quad \frac{1}{\epsilon}\int (\frac{|v|^2}{d+2} - 1)(f_\epsilon - M)dv \to \theta^{in} \text{ dans } w\text{-}L^2(\Omega)$$

quand $\epsilon \to 0$, pour $u^{in}, \theta^{in} \in L^2(\Omega)$ (P désignant le projecteur de Leray sur les champs à divergence nulle). Soit $f_\epsilon = M(1+\epsilon g_\epsilon)$ une solution faible (ou renormalisée) de $(1_\epsilon)(2_\epsilon)$ où C désigne
- ou bien l'opérateur de BGK défini par (9) ;
- ou bien, si $d = 3$, un opérateur de Boltzmann défini par (8) avec

$$0 < \frac{1}{C_b} \leq b(z,\sigma) \leq C_b \text{ p.p. en } (z,\sigma),$$

et une hypothèse sur l'opérateur linéarisé $\mathcal{L} : g \mapsto -\frac{1}{M}DC[M](Mg)$. Alors, à extraction d'une suite $\epsilon_n \to 0$ près, (Mg_ϵ) converge dans $w\text{-}L^1_{loc}(\mathbf{R}^+ \times \Omega, w\text{-}L^1(\mathbf{R}^d))$ vers une fonction g donnée par la formule (4) et dont les moments satisfont les équations de Navier-Stokes-Fourier incompressibles (5) avec la donnée initiale (u^{in}, θ^{in}), où la viscosité et la conductivité thermique sont données par

$$\nu = \kappa = \tau \text{ si } C = C_{BGK}, \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}\nu &= \frac{1}{10}\int (v\otimes v - \frac{1}{3}|v|^2 Id) : \mathcal{L}^{-1}(v\otimes v - \frac{1}{3}|v|^2 Id)M dv\,,\\ \kappa &= \frac{1}{30}\int v(|v|^2-5)\cdot\mathcal{L}^{-1}v(|v|^2-5)M dv,\end{aligned}\right\} \quad \text{si } C = C_B\,.$$

2.3. **Convergence forte.**

Théorème 2. *Sous les hypothèses du Théorème 1, si on a la convergence entropique*

$$\frac{1}{\epsilon}\frac{f_\epsilon^{in}(x,v)-M(v)}{M(v)} \to u^{in}(x)\cdot v + \theta^{in}(x)\frac{1}{2}(|v|^2-(d+2))\,,$$

$$\frac{1}{\epsilon^2}H(f_\epsilon^{in}/M) \to \frac{1}{2}\iint M\left(u^{in}(x)\cdot v + \theta^{in}(x)\frac{1}{2}(|v|^2-(d+2))\right)^2 dvdx\,,$$

où u^{in},θ^{in} sont réguliers et $\nabla_x.u^{in}=0$, alors

$$\left(\frac{1}{\epsilon}\int v f_\epsilon dv\,,\ \frac{1}{\epsilon}\int (\frac{1}{d}|v|^2-1)f_\epsilon dv\right)$$

converge fortement vers la solution (u,θ) du système limite (5) avec donnée initiale (u^{in},θ^{in}), où la viscosité et la conductivité thermique sont données par (10).

Ce résultat est un corollaire assez direct du Théorème 1, basé sur les arguments suivants

- il n'y a pas d'ondes acoustiques pour des données bien préparées ;
- l'inégalité d'énergie de Leray est en fait une égalité si on considère des solutions classiques de (5).

3. Méthode de dérivation de la limite hydrodynamique

La limite hydrodynamique du système $(1_\epsilon)(2_\epsilon)$ peut être obtenue de différentes manières. Les méthodes systématiques de type Hilbert (ou Chapman-Enskog) consistent à rechercher une solution de la famille d'équations cinétiques sous la forme

$$f_\epsilon = M(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\epsilon^n g^{(n)})\,,$$

où chaque coefficient $g^{(n)}$ est une fonction de (t,x,v) (et des champs hydrodynamiques dans le développement de Chapman-Enskog) indépendante de ϵ. En identifiant les coefficients des différentes puissances de ϵ dans (1_ϵ), on obtient des systèmes d'équations pour les coefficients $g^{(n)}$; en particulier on détermine la fluctuation limite $g=g^{(1)}$. Par de tels développements tronqués, et à l'aide d'un théorème de Cauchy-Kowalevskaya, Bardos et Ukai [4] ont établi un résultat de stabilité au voisinage des solutions régulières des équations de Navier-Stokes incompressibles.

La méthode des moments de Grad, qui consiste à montrer "seulement" que g est une fluctuation d'équilibre thermodynamique local (4) et à passer à la limite dans la formulation faible des équations de moments, permet de s'affranchir des conditions de régularité sur la solution du système limite (5), et de se placer dans un contexte de solutions faibles (globales).

3.1. **Dérivation formelle.** La stratégie présentée ici est une adaptation de la méthode de Grad proposée par Bardos, Golse et Levermore [1] qui utilise de manière cruciale l'inégalité d'entropie.

La première étape consiste à coupler l'estimation d'entropie relative (7) et la formulation faible (renormalisée) de l'équation cinétique (1_ϵ), pour établir que la fluctuation limite g appartient au noyau de l'opérateur linéarisé

$$\mathcal{L}g = -\frac{1}{M}DC[M](Mg) = 0;$$

ce qui est équivalent à dire que g est une Maxwellienne infinitésimale.

La deuxième étape consiste à dériver les équations de contrainte (relations d'incompressibilité et de Boussinesq). Si, à ϵ fixé, on sait établir les conservations locales de la masse et de l'impulsion (par exemple dans le cas de l'équation de BGK), on a

$$\epsilon\partial_t \int Mg_\epsilon dv + \nabla_x . \int Mg_\epsilon v dv = 0\,,$$
$$\epsilon\partial_t \int Mg_\epsilon v dv + \nabla_x . \int Mg_\epsilon v \otimes v dv = 0\,.$$

La convergence (3) permet alors de passer à la limite dans tous les termes, et, en utilisant la forme limite (4) de la fluctuation g, on obtient

$$\nabla_x . u = 0, \quad \nabla_x(\rho+\theta) = 0.$$

La partie la plus délicate de la dérivation consiste bien sûr à établir les équations d'évolution sur la vitesse moyenne limite u et la température limite θ, car elles font intervenir des termes non-linéaires. En particulier, c'est ici qu'échoue la méthode dans l'étude de l'asymptotique vers les équations d'Euler incompressibles. Si les conservations locales de l'impulsion et de l'énergie sont vérifiées, on a

$$\partial_t P \int Mg_\epsilon v dv + \frac{1}{\epsilon} P\nabla_x . \int Mg_\epsilon (v\otimes v - \frac{1}{d}|v|^2 Id) dv = 0\,,$$
$$\frac{1}{2}\partial_t \int Mg_\epsilon (|v|^2 - (d+2)) dv + \frac{1}{\epsilon}\nabla_x . \int Mg_\epsilon \frac{1}{2} v(|v|^2 - (d+2)) dv = 0\,.$$

où P désigne le projecteur de Leray sur les champs à divergence nulle. On introduit alors les quantités A et B telles que A et B appartiennent à l'orthogonal du noyau de $\mathcal{L}$ et vérifient

$$\mathcal{L}A = v \otimes v - \frac{1}{d}|v|^2 Id, \quad \mathcal{L}B = \frac{1}{2}v(|v|^2 - (d+2))\,.$$

(Ces quantités sont définies de manière unique car $\mathcal{L}$ est un opérateur de Fredholm et $\mathcal{L}A$, $\mathcal{L}B$ sont dans l'orthogonal du noyau.) On a alors

$$\partial_t P \int M g_\epsilon v dv + \frac{1}{\epsilon} P \nabla_x . \int M \mathcal{L} g_\epsilon A dv = 0\,,$$
$$\frac{1}{2}\partial_t \int M g_\epsilon (|v|^2 - (d+2)) dv + \frac{1}{\epsilon} \nabla_x . \int M \mathcal{L} g_\epsilon B dv = 0\,.$$

Par ailleurs de l'équation cinétique, on déduit

$$\frac{1}{\epsilon}\mathcal{L} g_\epsilon = -v.\nabla_x g_\epsilon + \mathcal{Q}(g_\epsilon, g_\epsilon) + O(\epsilon)\,.$$

En remplaçant dans les équations de moments, on peut décomposer chacun des termes de flux en trois morceaux

-un terme de diffusion dans lequel on peut passer à la limite en utilisant la convergence (3) et un contrôle sur les grandes vitesses ;

-un terme de convection quadratique qui s'exprime en fonction des moments de g_ϵ ;

-un terme de reste (provenant de la dérivée en temps et des non-linéarités d'ordres supérieurs dans le cas de l'équation de BGK).

Un calcul prenant en compte la forme de la fluctuation limite g permet alors d'obtenir l'équation de Navier-Stokes et l'équation de dérive-diffusion de Fourier avec les coefficients ν et κ donnés par (10).

3.2. **Vers une justification mathématique.** La difficulté majeure pour rendre rigoureux le schéma de preuve esquissé ci-dessus est donc d'obtenir de la compacité forte sur les moments pour passer à la limite dans les termes de convection (cette difficulté n'apparait pas si on considère des fluctuations d'ordre $\delta_\epsilon << \epsilon$ qui conduisent aux équations de Stokes). On procède pour cela par analogie avec l'équation limite. Pour les équations de Navier-Stokes incompressibles, on parvient à définir le terme de convection $\nabla_x.(u \otimes u)$ en utilisant la régularité fournie par le terme de diffusion $\nu \Delta_x u$, et plus précisément par la borne d'énergie

$$\nu \int_0^t \|\nabla_x u(s)\|^2_{L^2_x} ds \leq C^{in}\,.$$

Ici la borne d'énergie est remplacée par la borne de dissipation d'entropie qui fournit presque une borne $L^2(dtdxMdv)$ sur $v.\nabla_x g_\epsilon$. Si on savait obtenir exactement, pour tout $t^* > 0$,

$$g_\epsilon + v.\nabla_x g_\epsilon = O(1)_{L^2([0,t^*],L^2(dxMdv))} \,,$$

les lemmes de moyenne de Golse, Lions, Perthame et Sentis [10] donneraient une estimation de régularité du type

$$\int g_\epsilon \psi(v) M dv = O(1)_{L^2([0,t^*],H^s(dx))}$$

avec $s > 0$, pour tout $\psi \in L^2(Mdv)$. Reste alors à obtenir une estimation de la partie singulière de la fluctuation, et des informations sur la régularité en t.

Cette idée a été utilisée avec succès par Bardos, Golse et Levermore [2], qui ont obtenu le premier résultat de convergence pour l'équation de Boltzmann dans le cadre des solutions renormalisées, moyennant les hypothèses suivantes :
• les différentes quantités ne dépendent pas du temps (problème stationnaire) ;
• les lois de conservation locales sont satisfaites pour tout ϵ fixé ;
• le noyau de collisions satisfait des hypothèses assez contraignantes, difficiles à vérifier en pratique ;
• la famille de fluctuations g_ϵ vérifie des hypothèses de compacité faible, en particulier pour tout $t^* > 0$,

$$\frac{g_\epsilon^2}{2+\epsilon g_\epsilon}(1+|v|^2) \text{ est équiintégrable dans } L^1([0,t^*],L^1(dxMdv)).$$

De plus, ce premier résultat ne comprend pas l'équation gouvernant l'évolution de la température θ.

3.3. **Les différentes contributions.** Les théorèmes de convergence énoncés à la section précédente sont en fait le fruit de nombreux travaux : seule la restriction sur le noyau de collision subsiste, et cette hypothèse technique devrait pouvoir être levée en combinant les résultats de [11] et [14].

La première hypothèse a été levée par Lions et Masmoudi [15] : en utilisant la méthode de filtrage de Schochet [20], on peut décrire précisément les ondes acoustiques et montrer que ces oscillations à haute fréquence n'apportent pas de contribution à l'équation limite (sauf éventuellement dans le terme de pression).

La deuxième difficulté, qui n'est pas propre à la limite vers Navier-Stokes mais se rencontre dans toutes les limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann, a été résolue d'abord par Bardos, Golse et Levermore dans le cadre de la limite acoustique [3], puis par d'autres arguments et dans d'autres scalings ([15],[8],[14]) : au lieu de passer à la limite dans les équations de moments qu'on ne sait pas établir, on considère les équations de moments associées à une famille renormalisée et on montre que les défauts de conservation convergent vers 0. Les conservations locales de la masse, de l'impulsion et de l'énergie sont donc obtenues seulement à la limite.

Les méthodes ainsi introduites permettent en outre d'estimer les flux de chaleur (pour obtenir l'équation sur la température), et de traiter des hypothèses beaucoup plus générales sur le noyau de collisions.

Le dernier problème est celui qui est resté le plus longtemps ouvert. Un premier travail sur l'équation de BGK stationnaire [18] a montré comment on pouvait obtenir l'équation sur la vitesse moyenne (pas celle sur la température) en se dispensant de cette hypothèse de compacité. Des travaux récents ont permis de lever cette hypothèse dans un cadre beaucoup plus général, d'abord dans le cas de l'équation de BGK [19], puis dans le cas de l'équation de Boltzmann [11] (dans sa version actuelle, sous des hypothèses techniques qui restreignent la généralité dans le choix du noyau de collision). En fait, on peut montrer une version affaiblie de ce contrôle non linéaire qui fournit d'une part un contrôle sur les grandes vitesses, et d'autre part une estimation d'équiintégrabilité.

4. Principaux éléments de démonstration

La preuve du théorème de convergence faible est extrêmement technique : on se contentera ici de donner un schéma précis de démonstration. De plus, pour se fixer les idées, on va considérer le cas particulier de l'équation de BGK, et on mentionnera brièvement les adaptations nécessaires pour traiter le cas de l'équation de Boltzmann.

4.1. **Estimations a priori.** Dans les méthodes de compacité faible, l'outil de base pour étudier la limite hydrodynamique est l'inégalité d'entropie vérifiée pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{1}{\epsilon^2} H(f_\epsilon(t)/M) + \frac{1}{\epsilon^4} \int_0^t \iint (f_\epsilon - M_{f_\epsilon}) \log\left(\frac{f_\epsilon}{M_{f_\epsilon}}\right)(s) dv dx ds \leq C^{in},$$

que l'on peut réécrire

$$\frac{1}{\epsilon^2} \iint M h(\epsilon g_\epsilon)(t) dv dx + \frac{1}{\epsilon^4} \int_0^t \iint M_{f_\epsilon} k(\epsilon^2 q_\epsilon)(s) dv dx ds \leq C^{in}, \quad (12)$$

où g_ϵ et q_ϵ désignent

$$g_\epsilon = \frac{f_\epsilon - M}{\epsilon M}, \quad q_\epsilon = \frac{f_\epsilon - M_{f_\epsilon}}{\epsilon^2 M_{f_\epsilon}},$$

et h et k sont les fonctions convexes positives définies sur $]-1,+\infty[$

$$h: z \mapsto (1+z)\log(1+z) - z, \quad k: z \mapsto z\log(1+z)\,.$$

En particulier, au voisinage de $z=0$,

$$h(z) \sim k(z) \sim \frac{1}{2}z^2\,.$$

La borne d'entropie relative donne alors un contrôle $L^\infty_t L^2(dxMdv))$ sur la fluctuation g_ϵ, ou plus exactement sur la partie de g_ϵ dont la taille ne dépasse pas $1/\epsilon$. Cela suggère la décomposition de type Hilbert

$$f_\epsilon = M(1 + \epsilon\,{}^\flat g_\epsilon + \epsilon^2\,{}^\sharp g_\epsilon) \tag{13}$$

où la partie principale ${}^\flat g_\epsilon$ est définie par ${}^\flat g_\epsilon = g_\epsilon \gamma(1+\epsilon g_\epsilon)$ avec γ une fonction régulière à support compact identiquement égale à 1 au voisinage de 1. Cette décomposition n'est pas exactement celle utilisée par Bardos, Golse et Levermore [2], mais elle a essentiellement les mêmes propriétés. Ainsi

$$\|{}^\flat g_\epsilon\|^2_{L^\infty_t(L^2(dxMdv))} \leq C, \quad \|{}^\sharp g_\epsilon\|_{L^\infty_t(L^1(dxMdv))} \leq C, \tag{14}$$

où C ne dépend que de C^{in} et de γ. De plus, avec cette définition, on s'attend à ce que toute l'information donnant l'asymptotique Navier-Stokes soit contenue dans ${}^\flat g_\epsilon$. Cependant, on ne sait pas dériver cette asymptotique en utilisant uniquement les bornes (14). D'une part, pour obtenir la convergence des termes de convection qui sont quadratiques, on aurait besoin de compacité forte sur les moments de ${}^\flat g_\epsilon$. La compacité en x va être obtenue par les lemmes de moyenne, et on va montrer que la contribution limite des termes oscillant à haute fréquence est nulle, mais seulement sous la condition que $(M\,{}^\flat g_\epsilon^2)$ soit relativement compacte dans $w\text{-}L^1(\mathbf{R}^+, w\text{-}L^1(dxdv))$. D'autre part, on doit établir la convergence du reste, c'est-à-dire prouver que ${}^\sharp g_\epsilon$ converge vers 0 et n'apporte aucune contribution à l'équation limite.

Une première idée est d'utiliser l'autre borne fournie par l'inégalité (12), la borne de dissipation d'entropie. Elle permet en effet de contrôler la distance de f_ϵ à la Maxwellienne M_{f_ϵ} de mêmes moments, essentiellement dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^+, L^2(dxMdv))$ puisque $M_{f_\epsilon} = M + O(\epsilon)$. Cela suggère alors la décomposition de type Chapman-Enskog

$$f_\epsilon = M_{f_\epsilon}(1 + \epsilon^2\,{}^\flat q_\epsilon + \epsilon^4\,{}^\sharp q_\epsilon)\,, \tag{15}$$

avec une définition analogue à la précédente, de sorte que $\forall t^* > 0$,

$$\|M_{f_\epsilon}\,{}^\flat q_\epsilon^2\|^2_{L^1([0,t^*],L^1(dxdv))} \leq C, \quad \|M_{f_\epsilon}\,{}^\sharp q_\epsilon\|_{L^1([0,t^*],L^1(dxdv))} \leq C. \tag{16}$$

En particulier, si les moments de f_ϵ ne dévient pas trop de leurs valeurs moyennes, M_{f_ϵ} a une bonne décroissance en v, et la fluctuation de densité $g_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}(f_\epsilon - M)$ va avoir une bonne intégrabilité en v (à des termes d'ordre ϵ^2 près). Ce type de considérations permet de montrer que les suites $M^\flat g_\epsilon^2$ et $M^\sharp g_\epsilon$ sont localement " équiintégrables en v".
Remarque. Dans le cas de l'équation de Boltzmann, la dissipation d'entropie ne contrôle pas exactement la relaxation vers l'équilibre thermodynamique local (i.e. la distance de f_ϵ à M_{f_ϵ}) : la décomposition de type Chapman-Enskog (15) doit alors être remplacée par

$$f_\epsilon = E_{f_\epsilon} + \epsilon^2 \frac{f_\epsilon - E_{f_\epsilon}}{\epsilon^2} ,$$

où E_{f_ϵ} est définie à partir de l'opérateur de gain de Boltzmann modifié

$$E_{f_\epsilon} = \frac{1}{\int \tilde{f}_{\epsilon 1} dv_1} \iint \tilde{f}'_\epsilon \tilde{f}'_{\epsilon 1} |2\cos(v - v_1, \omega)| dv_1 d\omega ,$$

avec $\tilde{f}_\epsilon = f_\epsilon \gamma(f_\epsilon/M)$. Le second terme de la décomposition est alors contrôlé par la dissipation d'entropie, tandis que le premier est régulier en v (voir Caflisch [5]).

Afin d'affiner les estimations a priori obtenues à partir de (14) et (16), et en particulier pour transférer un partie du gain d'intégrabilité en v sur la variable x, on utilise la propriété de dispersion locale suivante

Lemme. *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et g_n une suite bornée de $L^1_{loc}(\Omega \times \mathbf{R}^d)$ telle que $v.\nabla_x g_n$ est bornée dans $L^1_{loc}(\Omega \times \mathbf{R}^d)$ et g_n est " localement équiintégrable en v" (par exemple g_n bornée dans $L^1_{loc}(\Omega, L^p_{loc}(\mathbf{R}^d))$. Alors g_n est localement équiintégrable (et donc relativement faiblement compacte) dans $L^1_{loc}(\Omega \times \mathbf{R}^d)$.*

La preuve de ce résultat ne présente aucune difficulté. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $\Omega = \mathbf{R}^d$ et que les bornes sont globales. Soit alors $\mathcal{O}$ un ouvert borné de $\Omega \times \mathbf{R}^d$. Il est facile de vérifier que $\mathbb{1}_\mathcal{O}$ peut être décomposée en $\mathbb{1}_\mathcal{O} = \phi_1 + \phi_2$ avec $0 \leq \phi_1, \phi_2 \leq 1$ et

$$\|\phi_1\|_{L^\infty_x(L^{p'}_v)} \leq |\mathcal{O}|^{1/2p'}, \quad \|\phi_2\|_{L^{p'}_x(L^\infty_v)} \leq |\mathcal{O}|^{1/2p'} ,$$

de sorte que

$$\iint_\mathcal{O} |g_n| dv dx = \iint |g_n| \phi_1 dv dx + \iint |g_n| \phi_2 dv dx .$$

On définit alors $\Phi_2 : (\tau, x, v) \mapsto \phi_2(x + \tau v, v)$. On a

$$\|\Phi_2(\tau)\|_{L^\infty_x(L^{p'}_v)} \leq |\mathcal{O}|^{1/2p'} |\tau|^{-d/p'} ,$$

et par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{O}} |g_n| dvdx &= \iint |g_n|\phi_1 dvdx + \iint |g_n|\Phi_2(\tau)dvdx \\ &\quad + \tau \int_0^1 \iint v.\nabla_x |g_n| \Phi_2(\sigma\tau) dvdxd\sigma \\ &\leq C|\mathcal{O}|^{1/2p'} + C|\mathcal{O}|^{1/2p'}|\tau|^{-d/p'} + C|\tau| \,.\end{aligned}$$

Le choix $\tau = |\mathcal{O}|^{1/4dp'}$ assure que $\iint_{\mathcal{O}} |g_n| dvdx \to 0$ si $|\mathcal{O}| \to 0$.

En couplant ce résultat avec les estimations (14) et (16), on obtient
- la compacité relative de $M^\flat g_\epsilon^2$ dans $w\text{-}L^1_{loc}(\mathbf{R}^+, w\text{-}L^1_{x,v})$;
- la convergence $M^\sharp g_\epsilon \to 0$;
- des contrôles sur les grandes vitesses.

4.2. **Défauts de conservation.** A l'aide de ces estimations a priori précisées, on peut dériver rigoureusement les équations d'évolution de Navier-Stokes-Fourier, mais pas directement à partir des conservations locales de l'impulsion et de l'énergie. En effet, les estimations a priori établies précédemment ne donnent pas de compacité faible sur $M^\sharp g_\epsilon |v|^p$ pour $p \geq 2$; en particulier, elles ne permettent pas de passer à la limite dans les termes de flux $\int M^\sharp g_\epsilon \mathcal{L} A dv$ and $\int M^\sharp g_\epsilon \mathcal{L} B dv$.
Remarque. Dans le cas de l'équation de Boltzmann, une difficulté semblait apparaître du fait que les lois de conservation locales ne sont pas établies pour les solutions renormalisées. La méthode présentée ici n'utilise pas ces lois de conservation, et peut donc s'appliquer à l'équation de Boltzmann sans hypothèse sur la famille de solutions renormalisées.

L'idée principale consiste à considérer la hiérarchie de moments pour la fluctuation modifiée $M^\flat g_\epsilon$ (qui a la même limite que Mg_ϵ). Si on définit la fonction $\hat\gamma : z \mapsto \gamma(z) + (z-1)\gamma'(z)$, on a

$$\partial_t M^\flat g_\epsilon + \frac{1}{\epsilon} v.\nabla_x M^\flat g_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^3}(M_{f_\epsilon} - f_\epsilon)\hat\gamma\left(\frac{f_\epsilon}{M}\right),$$

d'où

$$\partial_t \int M^\flat g_\epsilon \zeta(v) dv + \frac{1}{\epsilon}\nabla_x . \int M^\flat g_\epsilon v \zeta(v) dv = \frac{1}{\epsilon^3}\int (M_{f_\epsilon} - f_\epsilon)\hat\gamma\left(\frac{f_\epsilon}{M}\right)\zeta(v) dv,$$

pour toute fonction ζ régulière à croissance au plus polynomiale.

Si ζ est un invariant de collision (c'est-à-dire si $\zeta(v) = 1, |v|^2$ ou v_i pour $i \in \{1, ..., d\}$), le défaut de conservation peut être réécrit

$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon^3}\int (M_{f_\epsilon} - f_\epsilon)\hat{\gamma}\left(\frac{f_\epsilon}{M}\right)\zeta(v)dv =& \frac{1-\tilde{\chi}_\epsilon}{\epsilon^3}\int (M_{f_\epsilon} - f_\epsilon)\hat{\gamma}\left(\frac{f_\epsilon}{M}\right)\zeta(v)dv \\ &+ \frac{\tilde{\chi}_\epsilon}{\epsilon^3}\int (M_{f_\epsilon} - f_\epsilon)\left(\hat{\gamma}\left(\frac{f_\epsilon}{M}\right) - 1\right)\zeta(v)dv\end{aligned}$$

pour toute fonction $\tilde{\chi}_\epsilon \in L^\infty_{t,x}$.

Si on choisit comme $\tilde{\chi}_\epsilon$ la fonction indicatrice d'un domaine défini en terme des champs hydrodynamiques, et telle que

$$1 - \tilde{\chi}_\epsilon = o(\epsilon^2)_{L^1_{loc}(dtdx)},$$

$$\text{et } \tilde{\chi}_\epsilon M_{f_\epsilon} \text{ a une bonne décroissance en } v,$$

on peut montrer que les défauts de conservation convergent vers 0 dans $L^1_{loc}(dtdx)$.

4.3. **Convergence des termes de flux.** La convergence des défauts de conservation implique en particulier

$$\begin{aligned}\partial_t P\int M^\flat g_\epsilon v dv + \frac{1}{\epsilon}P\nabla_x.\int M^\flat g_\epsilon (v\otimes v - \frac{1}{d}|v|^2 Id)dv \to 0,\\ \partial_t \int M^\flat g_\epsilon(|v|^2 - (d+2)) + \frac{1}{\epsilon}\nabla_x.\int M^\flat g_\epsilon(|v|^2 - (d+2))v dv \to 0.\end{aligned} \tag{17}$$

Reste alors à passer à la limite dans les termes de flux.

Pour étudier cette convergence, on décompose chaque terme de flux en un terme de diffusion, un terme de convection et un terme de reste

$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon}\int M^\flat g_\epsilon \xi(v)dv =& \frac{\chi_\epsilon}{\epsilon^2}\int (f_\epsilon - M_{f\epsilon})\gamma\left(\frac{f_\epsilon}{M}\right)\xi(v)dv \\ &+ \frac{\chi_\epsilon}{\epsilon^2}\int (M_{f\epsilon} - M)\gamma\left(\frac{f_\epsilon}{M}\right)\xi(v)dv \\ &+ \frac{(1-\chi_\epsilon)}{\epsilon}\int M^\flat g_\epsilon \xi(v)dv\end{aligned}$$

à l'aide d'une troncature χ_ϵ adaptée (assurant que les moments de f_ϵ ne dévient pas trop de leurs valeurs moyennes). Les estimations a priori permettent alors de montrer que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon}\int M^\flat g_\epsilon \xi(v)dv = \frac{\chi_\epsilon}{\epsilon^2}\int (f_\epsilon - M_{f\epsilon})\xi(v)dv + \frac{\chi_\epsilon}{\epsilon^2}\int (M_{f\epsilon} - M)\xi(v)dv \\ + o(1)_{L^1_{loc}(dtdx)}.\end{aligned} \tag{18}$$

Remarque. Pour l'estimation des termes de flux comme pour l'estimation des défauts de conservation, la démonstration dans le cas de l'équation de Boltzmann s'écarte un peu du schéma de preuve présenté ici. En effet, dans le cas de l'équation de BGK, la non-linéarité de l'opérateur d'interaction est assez complexe, et on utilise de façon cruciale le fait que f_ϵ est proche de M_{f_ϵ} (qui ne dépend que des champs hydrodynamiques). Dans le cas de l'équation de Boltzmann, la non-linéarité de l'opérateur de collision est quadratique, ce qui permet d'invoquer des arguments de symétrie. On doit par exemple remplacer la décomposition (18) par

$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon}\int M^\flat g_\epsilon \mathcal{L}A(v)dv &= \frac{1}{\epsilon}\iiint MM_1({}^\flat g_\epsilon + {}^\flat g_{\epsilon 1} - {}^\flat g'_\epsilon - {}^\flat g'_{\epsilon 1})\xi(v)bd\omega dv_1 dv\\ &= -\frac{1}{\epsilon^2}\mathcal{B}(\tilde{f}_\epsilon, \tilde{f}_\epsilon) + \iiint MM_1({}^\flat g'^\flat_\epsilon g'_{\epsilon 1} - {}^\flat g_\epsilon {}^\flat g_{\epsilon 1})\xi(v)bd\omega dv_1 dv.\end{aligned}$$

Le contrôle de dissipation d'entropie implique la compacité relative de $\frac{\chi_\epsilon}{\epsilon^2}(f_\epsilon - M_{f_\epsilon})$ dans $w\text{-}L^1_{loc}(dt, w\text{-}L^1(dx(1+|v|^2)dv))$. En passant à la limite au sens des distributions dans l'équation cinétique (1_ϵ), on obtient alors

$$\frac{\chi_\epsilon}{\epsilon^2}(f_\epsilon - M_{f_\epsilon}) \rightharpoonup -Mv.\nabla_x g;$$

ce qui assure la convergence au sens des distributions du terme de diffusion dans (18)

$$\nabla_x\cdot\left(\frac{\chi_\epsilon}{\epsilon^2}\int (f_\epsilon - M_{f\epsilon})\xi(v)dv\right) \rightharpoonup -\nabla_x^{\otimes 2} : \int Mgv\otimes\xi(v)dv. \tag{19}$$

Pour obtenir les termes visqueux des équations limite (5), il suffit alors de remplaçer g par son expression (4).

Un calcul élémentaire montre que

$$\begin{aligned}\frac{\chi_\epsilon}{\epsilon^2}\int M_{f_\epsilon}(v\otimes v - \frac{1}{d}|v|^2 Id)dv &= \frac{\chi_\epsilon R_\epsilon}{\epsilon^2}(U_\epsilon\otimes U_\epsilon - \frac{1}{d}|U_\epsilon|^2 Id),\\ \frac{\chi_\epsilon}{\epsilon^2}\int M_{f_\epsilon}v(|v|^2 - (d+2))dv &= \frac{\chi_\epsilon}{\epsilon^2}\left((d+2)R_\epsilon(T_\epsilon - 1)U_\epsilon + R_\epsilon|U_\epsilon|^2 U_\epsilon\right);\end{aligned}$$

d'où l'on déduit, grâce aux estimations a priori,

$$\begin{aligned}\frac{\chi_\epsilon}{\epsilon^2}\int M_{f_\epsilon}(v\otimes v - \frac{1}{d}|v|^2 Id)dv &= ({}^\flat u_\epsilon\otimes {}^\flat u_\epsilon - \frac{1}{d}|{}^\flat u_\epsilon|^2 Id) + o(1)_{L^1_{loc}(dtdx)},\\ \frac{\chi_\epsilon}{\epsilon^2}\int M_{f_\epsilon}v(|v|^2 - (d+2))dv &= (d+2){}^\flat\theta_\epsilon {}^\flat u_\epsilon + o(1)_{L^1_{loc}(dtdx)}.\end{aligned} \tag{20}$$

La principale difficulté consiste à établir la convergence de ces termes. Les résultats de compacité faible

$$\begin{aligned} M^\flat g_\epsilon^2 & \text{ relativement compacte dans } w\text{-}L^1_{loc}(dt, w\text{-}L^1(dxdv)) \\ v.\nabla_x M^\flat g_\epsilon & \text{ relativement compacte dans } w\text{-}L^1_{loc}(dt, w\text{-}L^1(dxdv)) \end{aligned}$$

couplés avec les lemmes de moyenne [10], permettent de montrer que pour tout compact $K \subset \mathbf{R}^+ \times \Omega$ et toute fonction $\psi \in L^2(Mdv)$, il existe un module de continuité η tel que

$$\left\| \int M^\flat g_\epsilon(t,x,v)\psi(v)dv - \int M^\flat g_\epsilon(t,x+\delta,v)\psi(v)dv \right\|_{L^2(K)} \leq \eta(\delta).$$

Par contre, les moments ${}^\flat u_\epsilon$ et ${}^\flat\theta_\epsilon$ ne sont pas nécessairement compacts en t. Reste donc à vérifier que les oscillations acoustiques n'apportent aucune contribution aux équations limites. On décompose donc

$${}^\flat u_\epsilon = P{}^\flat u_\epsilon + \nabla_x \psi_\epsilon, \quad \text{et } {}^\flat\theta_\epsilon = \frac{d{}^\flat\theta_\epsilon - 2{}^\flat\rho_\epsilon}{d+2} + \pi_\epsilon,$$

de sorte que

$$\begin{gathered} P{}^\flat u_\epsilon \text{ et } \frac{d{}^\flat\theta_\epsilon - 2{}^\flat\rho_\epsilon}{d+2} \text{ sont bornées dans } W^{1,1}_{loc}(dt, W^{-1,1}_{loc}(dx)), \\ \epsilon\partial_t \nabla_x \psi_\epsilon + \nabla_x \pi_\epsilon \to 0, \quad \epsilon\partial_t \pi_\epsilon + \frac{2}{d}\Delta_x \psi_\epsilon \to 0 \text{ dans } L^1_{loc}(dt, W^{-1,1}_{loc}(dx)). \end{gathered}$$

Les relations d'incompressibilité et de Boussinesq permettent d'identifier les limites

$$\begin{gathered} P{}^\flat u_\epsilon \to u, \quad \frac{d{}^\flat\theta_\epsilon - 2{}^\flat\rho_\epsilon}{d+2} \to \theta \text{ dans } L^2_{loc}(dtdx), \\ \nabla_x \psi_\epsilon \rightharpoonup 0, \quad \pi_\epsilon \rightharpoonup 0 \text{ dans } w\text{-}L^2_{loc}(dtdx); \end{gathered}$$

d'où l'on déduit qu'au sens des distributions,

$$\begin{gathered} {}^\flat u_\epsilon \otimes {}^\flat u_\epsilon - \nabla_x\psi_\epsilon \otimes \nabla_x \psi_\epsilon \to u \otimes u, \\ {}^\flat\theta_\epsilon {}^\flat u_\epsilon - \pi_\epsilon \nabla_x \psi_\epsilon \to \theta u. \end{gathered}$$

Un calcul formel (que l'on peut rendre rigoureux en introduisant des régularisations en x)

$$\begin{aligned} P\nabla_x.(\nabla_x\psi_\epsilon\otimes\nabla_x\psi_\epsilon) &= \frac{1}{2}P\nabla_x|\nabla_x\psi_\epsilon|^2 + P(\Delta_x\psi_\epsilon\nabla_x\psi_\epsilon)\\ &= \frac{d}{2}P(-\partial_t(\epsilon\pi_\epsilon\nabla_x\psi_\epsilon) - \pi_\epsilon\nabla_x\pi_\epsilon + \pi_\epsilon S_\epsilon + S'{}_\epsilon\nabla_x\psi_\epsilon)\\ &= \frac{d}{2}P(-\partial_t(\epsilon\pi_\epsilon\nabla_x\psi_\epsilon) + \pi_\epsilon S_\epsilon + S'{}_\epsilon\nabla_x\psi_\epsilon),\\ \nabla_x.(\pi_\epsilon\nabla_x\psi_\epsilon) &= \pi_\epsilon\Delta_x\psi_\epsilon + \nabla_x\psi_\epsilon.\nabla_x\pi_\epsilon\\ &= \frac{d}{2}\pi_\epsilon(S'{}_\epsilon - \epsilon\partial_t\pi_\epsilon) + \nabla_x\psi_\epsilon.(S_\epsilon - \epsilon\partial_t\nabla_x\psi_\epsilon)\\ &= \frac{d}{2}\pi_\epsilon S'{}_\epsilon + \nabla_x\psi_\epsilon.S_\epsilon - \frac{d\epsilon}{4}\partial_t|\pi_\epsilon|^2 - \frac{\epsilon}{2}\partial_t|\nabla_x\psi_\epsilon|^2, \end{aligned}$$

montre alors que la contribution des ondes acoustiques est négligeable, et que le terme de convection converge au sens des distributions

$$P\nabla_x.({}^\flat u_\epsilon\otimes{}^\flat u_\epsilon)\to u\otimes u,\quad \nabla_x.({}^\flat u_\epsilon{}^\flat\theta_\epsilon)\to\nabla_x.(u\theta)\,. \tag{21}$$

En regroupant (17)-(21), on montre que les moments de la fluctuation limite g satisfont les équations d'évolution de Navier-Stokes-Fourier.

Références

[1] C. Bardos, F. Golse, et D. Levermore, *Fluid Dynamic Limits of Kinetic Equations I : Formal Derivations*, J. Stat. Phys. **63** (1991), 323–344.

[2] C. Bardos, F. Golse, et C.D. Levermore, *Fluid Dynamic Limits of Kinetic Equations II : Convergence Proofs for the Boltzmann Equation*, Commun. Pure & Appl. Math **46** (1993), 667–753.

[3] C. Bardos, F. Golse, et C.D. Levermore, *The Acoustic Limit for the Boltzmann Equation*, Archive Rat. Mech. & Anal. **153** (2000), 177–204.

[4] C. Bardos et S. Ukai, *The Classical Incompressible Navier-Stokes Limit of the Boltzmann Equation*, Math. Models & Meth Appl. Sci. **1** (1991), 235–257.

[5] R. Caflisch, *The Fluid Dynamical Limit of the Nonlinear Boltzmann Equation*, Commun. Pure & Appl. Math. **33** (1980), 651–666.

[6] C. Cercignani, R. Illner et M. Pulvirenti. *The mathematical theory of dilute gases.* Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences, 106, 1994.

[7] R.J. DiPerna et P.-L. Lions, *On the Cauchy Problem for the Boltzmann Equation : Global Existence and Weak Stability Results*, Annals of Math. **130** (1989), 321–366.

[8] F. Golse et C.D. Levermore, *Stokes-Fourier and Acoustic Limits for the Boltzmann Equation : Convergence Proofs*, à paraître dans Commun. Pure & Appl. Math. (2001).

[9] F. Golse, C.D. Levermore et L. Saint-Raymond, *La méthode de l'entropie relative pour les limites hydrodynamiques de modèles cinétiques*, Séminaire EDP, Ecole Polytechnique 19 (2000).

[10] F. Golse, P.-L. Lions, B. Perthame et R. Sentis, *Regularity of the Moments of the Solution of a Transport Equation*, J. Funct. Anal. **76** (1988), 110–125.

[11] F. Golse et L. Saint-Raymond, *The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation : convergence proof*, preprint.

[12] H. Grad, *Asymptotic theory of the Boltzmann equation. II*, 1963 Rarefied Gas Dynamics (Proc. 3rd Internat. Sympos., Palais de l'UNESCO, Paris, 1962), Vol. I pp. 26–59.

[13] J. Leray, *Sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. **63** (1934), 193–248.

[14] C.D. Levermore et N. Masmoudi, *From the Boltzmann Equation to an Incompressible Navier-Stokes-Fourier System*, en préparation.

[15] P.-L. Lions et N. Masmoudi, *From the Boltzmann Equations to the Equations of Incompressible Fluid Mechanics, II*, Archive Rat. Mech. & Anal. 158 (2001), no. 3, 195–211.

[16] N. Masmoudi et L. Saint-Raymond *From the Boltzmann equation to the Stokes-Fourier system in a bounded domain*, preprint.

[17] B. Perthame, *Global Existence to the BGK Model of the Boltzmann Equation*, J. Diff. Eq. **82** (1989), 191–205.

[18] L. Saint-Raymond, *Discrete-time Navier-Stokes limit for the BGK Boltzmann model*, à paraître dans Comm. Partial Diff. Eq..

[19] L. Saint-Raymond, *From the Boltzmann BGK Equation to the Navier-Stokes System*, soumis aux Ann. de l'E.N.S..

[20] S. Schochet, *Fast singular limits of hyperbolic PDEs*, J. Differential Equations **114** (1994), 476–512.

(L. Saint-Raymond) Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris VI, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, FRANCE

E-mail address: `saintray@ann.jussieu.fr`