SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2001-2002

Yvan Martel and Frank Merle

Existence de solutions explosives dans l'espace d'énergie pour l'équation de Korteweg–de Vries généralisée critique

Séminaire É. D. P. (2001-2002), Exposé n° XXII, 9 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2001-2002____A22_0>

Existence de solutions explosives dans l'espace d'énergie pour l'équation de Korteweg–de Vries généralisée critique

Yvan Martel et Frank Merle

1 Introduction et préliminaires

On considère l'équation de Korteweg–de Vries (KdV) généralisée critique

$$\begin{cases} u_t + (u_{xx} + u^5)_x = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

pour $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$. C'est un cas particulier des équations de Korteweg–de Vries généralisées

$$\begin{cases} u_t + (u_{xx} + u^p)_x = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2}$$

où $p \geq 2$ est un entier. Ces équations sont importantes en physique pour $p = 2$ et $p = 3$, où elles apparaissent dans un grand nombre de phénomènes (voir Korteweg et de Vries [5] et par exemple le livre de Lamb [6] et ses références).

Pour tout entier $p \geq 2$, le problème de Cauchy pour (2) est localement bien posé dans H^1, d'après les travaux de Kenig, Ponce et Vega [4]. L'exposant $p = 5$ est critique pour la question de l'existence globale dans le sens suivant: pour $p < 5$, toute solution H^1 de (2) est globale et uniformément bornée dans H^1. C'est une conséquence des lois de conservation dans H^1 (norme L^2 et énergie) et d'une inégalité de type Gagliardo–Nirenberg.

Dans le cas $p = 5$, les lois de conservation dans H^1 sont

$$\int u^2(t) = \int u_0^2, \quad \frac{1}{2}\int u_x^2(t) - \frac{1}{6}\int u^6(t) = E(u(t)) = E(u_0). \tag{3}$$

Elles donnent l'existence globale des solutions H^1 seulement dans le cas où $\int u_0^2$ est petit (voir Weinstein [17]).

La question à laquelle nous apportons une réponse positive est celle de l'existence de solutions dont la norme H^1 devient infinie en temps fini (solutions explosives) pour le cas de l'exposant critique $p = 5$. Cette problématique est classique dans le domaine des équations aux dérivées partielles d'évolution. Rappelons très rapidement quelques résultats concernant trois autres équations.

Pour l'équation de Schrödinger nonlinéaire critique (en dimension 1 d'espace par exemple)

$$\mathrm{i}u_t + u_{xx} + |u|^4 u = 0, \tag{4}$$

il existe des solutions explosives explicites construites à partir de solutions type solitons et de l'invariance conforme. Une autre conséquence de l'invariance conforme est l'identité du

Viriel qui donne un résultat d'explosion basé sur la fonctionnelle $\int x^2|u(t)|^2$. Le problème de l'explosion est néanmoins largement ouvert (voir Merle [13] pour une revue sur ce problème et Merle et Raphael [15] pour des résultats très récents).

Pour l'équation des ondes semilinéaire,

$$u_{tt} - u_{xx} = u^p, \quad p > 1, \tag{5}$$

la vitesse finie de propagation permet de construire des solutions explosives explicites en utilisant l'équation différentielle ordinaire associée.

Pour l'équation de la chaleur nonlinéaire,

$$u_t - u_{xx} = u^p, \quad p > 1, \tag{6}$$

il existe plusieurs critères d'explosion dépendant du domaine sur lequel l'équation est posée.

Pour l'équation de KdV, il n'existe pas de fonctionnelle en $u(t)$ donnant une obstruction simple à l'existence globale de certaines solutions, ni d'invariance conforme donnant des solutions explosives explicites. De plus la vitesse de propagation est infinie. La question de l'existence de solutions explosives dans l'espace d'énergie était ouverte, et nécessitait une nouvelle approche, basée sur la compréhension du flot de l'équation dans un régime particulier.

Il semble qu'à l'heure actuelle, même dans les cas les plus simples (cas de l'équation (2) avec $p < 5$ sous critique, ou en faisant des hypothèses importantes sur la solution), la seule façon de comprendre le comportement en temps grand est d'étudier les solutions proches de solutions explicites de l'équation.

Rappelons que pour tout $c > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $u_{c,x_0}(t,x) = Q_c(x - x_0 - ct)$ est solution de (1), où

$$Q_c(x) = c^{\frac{1}{4}} Q(\sqrt{c}x), \quad Q(x) = \left(\frac{3}{\cosh^2(2x)} \right)^{\frac{1}{4}}. \tag{7}$$

Ces ondes progressives sont appelées solitons. Elles sont définies de façon similaire pour tout $p \geq 2$ pour (2). Ces solutions sont connues pour jouer un rôle très important dans la dynamique toute solution dans le cas $p = 2$, voir par exemple Eckhaus et Schuur [3], Miura [16] et Lax [7]. En fait, pour toute valeur de p, l'étude de la dynamique des solutions autour de la famille des solitons est fondamentale dans la compréhension de l'équation de KdV généralisée. Comme on le voit dans le résultat d'explosion suivant, les solitons interviennent de façon essentielle même dans le comportement des solutions explosives.

Le résultat que nous obtenons est le suivant.

Théorème 1 (Explosion en temps fini) *Il existe $\alpha_0 > 0$ tel que l'énoncé suivant est vérifié. Soit $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ tel que*

$$\int u_0^2 < \int Q^2 + \alpha_0, \quad E(u_0) < 0, \tag{8}$$

$$\exists C > 0 / \forall x_0 > 0, \quad \int_{x > x_0} u_0^2(x)dx \leq \frac{C}{x_0^6}. \tag{9}$$

Alors il existe $0 < T < +\infty$ *tel que*

$$\lim_{t\to T} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty. \tag{10}$$

De plus, il existe, pour tout $0 \leq t < T$, $\lambda(t) > 0$, $x(t) \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\lambda^{1/2}(t)u(t, \lambda(t). + x(t)) \rightharpoonup \pm Q \quad \textit{dans } H^1 \textit{ quand } t \to T. \tag{11}$$

Finalement, il existe une suite $t_n \to T$ *et une constante universelle* $C > 0$ *telles que*

$$\|u(t_n)\|_{H^1} \leq \frac{C}{|E_0|(T - t_n)}, \tag{12}$$

pour n *assez grand.*

L'idée de départ de la démonstration de ce résultat est de chercher des solutions explosives de la forme:

$$u(t,x) \approx Q_{c(t)}(x - x(t)), \tag{13}$$

où $c(t) \to +\infty$. Les lois de conservation (3) n'interdisent pas ce comportement car dans le cas critique $p = 5$ et dans ce cas seulement, les lois de conservation ne voient pas le scaling du soliton, dans le sens suivant:

$$\forall c > 0, \quad \int Q_c^2 = \int Q^2, \quad E(Q_c) = 0. \tag{14}$$

On cherche donc des solutions satisfaisant deux conditions: être de la forme (13) et telle que $c(t) \to +\infty$. Imposer la première condition est un argument relativement standard. En effet, il suffit de supposer (8) pour avoir la décomposition suivante:

$$\lambda^{1/2}(t)u(t, \lambda(t)x + x(t)) = \pm Q(x) + \varepsilon(t,x), \tag{15}$$

où $\lambda(t) > 0$, $x(t) \in \mathbb{R}$, et

$$\|\varepsilon(t)\|_{H^1} \leqslant \delta(\alpha_0), \quad (\delta(\alpha_0) \to 0, \text{ pour } \alpha_0 \to 0). \tag{16}$$

(Dans (15), on peut choisir $+Q$ car si $u(t,x)$ est solution alors $-u(t,x)$ est aussi solution.) Ce résultat découle de la caractérisation variationnelle de Q. Rappelons que si $0 < \|v\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$, alors $E(v) > 0$. De plus, si $\|v\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}$ et $E(v) = 0$, alors v est la fonction $\pm Q$ aux invariances par scaling et translation près.

Ainsi, sous les hypothèses (8), $u(t)$ admet la décomposition (15). Notons que dans cette décomposition par un calcul simple, on a

$$\|u_x(t)\|_{H^1} \approx \frac{\|Q_x(t)\|_{H^1}}{\lambda(t)}. \tag{17}$$

Il suffit donc de connaître le comportement du paramètre géométrique $\lambda(t)$ pour en déduire celui de $\|u_x(t)\|_{H^1}$. Dans ce contexte, les résultats suivants entraînent le Théorème 1.

Conclusion 1 *Sous l'hypothèse (8): il existe* $0 < T \leqslant +\infty$ *tel que*

$$\lambda(t) \to 0 \quad \textit{(explosion en temps fini ou infini)} \tag{18}$$

$$\varepsilon(t) \rightharpoonup 0 \quad \textit{(profil à l'explosion)} \tag{19}$$

quand $t \to T$.

Conclusion 2 *Sous les hypothèses (8) et (9), on a*

$$T < +\infty, \tag{20}$$

et (12) est vérifié.

Les démonstrations des Conclusions 1 et 2 sont de nature très différentes. Une des étapes clé de la démonstration de ces résultats est l'utilisation d'un théorème nouveau concernant les solutions bornées, proches du soliton de l'équation de KdV critique. Il s'agit d'un résultat de classification de solutions bornées proches du soliton, ayant une certaine localisation de la masse L^2 uniforme en temps (voir plus loin pour un énoncé précis). Ce résultat est démontré dans [8].

Le résultat d'explosion en temps fini ou infini correspondant à la conclusion (18) a été démontré par F. Merle [14]. Le résultat de profil universel à l'explosion (19) apparaît dans [10]. La démonstration de l'explosion en temps fini, avec un contrôle du taux d'explosion est faite dans [11].

Le problème de l'existence et de la description de solutions explosives dans le cas surcritique ($p > 5$) est complètement ouvert, bien que des simulations numériques suggèrent l'existence de solutions explosives avec explosion autosimilaires (voir Bona et al. [1] et Dix et McKinney [2])).

2 Explosion en temps fini ou infini et profil d'explosion

2.1 Classification des solutions proches d'un soliton et L^2 localisées

Le théorème de classification autour des solitons est le suivant.

Théorème 2 *Soit* $v(t)$*, solution de l'équation (1) pour tout temps* $t \in \mathbb{R}$*. Supposons que* $v(t)$ *vérifie (15), avec* $0 < \lambda_1 < \lambda_v(t) < \lambda_2$ *et* $\varepsilon_v(t)$ *assez petit dans* H^1 *uniformément en temps. Supposons de plus la propriété suivante:*

$$\forall \delta > 0, \exists R(\delta) > 0 / \quad \int_{|x|>R} v^2(t, x + x_v(t))dx \leq \delta, \tag{21}$$

alors

$$v(t, x) \equiv Q_c(x - x_0 - ct), \tag{22}$$

pour $c > 0$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Pour la démontration de ce résultat, voir [8]. Une première étape essentielle est de montrer que si $v(t)$ vérifie les hypothèses de ce théorème, alors $v(t)$ vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |v(t, x + x_v(t))| \leq Ce^{-\theta|x|}, \tag{23}$$

où $C, \theta > 0$. C'est un résultat surprenant, car à partir d'une hypothèse de localisation de la norme L^2 on prouve une décroissance exponentielle ponctuelle de la solution.

Ensuite, on montre que ce théorème est entraîné par une propriété de classification sur une équation linéaire. La dernière étape est de prouver cette propriété, en utilisant la structure très particulière de l'équation linéaire.

Une première application nouvelle de ce théorème de classification est la stabilité asymptotique de la famille de soliton dans H^1. Si $u(t)$ vérifie (15) avec $0 < \lambda_1 < \lambda(t) < \lambda_2$, alors $\lambda^{1/2}(t)u(t, \lambda(t). + x(t)) \rightharpoonup Q$ dans H^1 quand $t \to +\infty$.

On présente une idée de la démonstration. Soit une suite $t_n \to +\infty$ et $v(t)$ solution de (1) pour tout temps $t \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t_n + t, . + x(t_n)) \rightharpoonup v(t, .) \quad \text{dans } H^1 \text{ quand } n \to +\infty. \tag{24}$$

La solution $v(t)$ admet une décomposition (15). Comme objet asymptotique, $v(t)$ vérifie en outre la propriété de localisation de la norme $L^2(21)$, et donc la propriété de décroissance exponentielle (23). Cette propriété s'obtient sur $v(t)$ en considérant la variation d'une fonctionnelle en $u(t)$ mesurant la masse à gauche du soliton. La conclusion est que $v(0) = Q$, ce qui montre le résultat de convergence pour $u(t)$.

Le théorème de classification peut aussi être appliqué pour donner une version faible de l'explosion: une solution vérifiant (8) ne peut pas rester uniformément bornée dans H^1. En effet, sinon $u(t, . + x(t))$ converge vers Q et on obtient une contradiction avec l'énergie ($E(Q) = 0$).

2.2 Explosion en temps fini ou infini

Le théorème d'explosion prouvé par F. Merle est bien plus fort, puisqu'il montre l'existence d'un temps $0 < T \leqslant +\infty$ tel que $\lim_{t \to T} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty$. La démonstration est aussi bien plus délicate, même si l'on admet le Théorème 2 de classification. L'idée de base est la même que précédemment. On extrait du comportement de $u(t)$ une solution asymptotique $v(t)$ vérifiant une propriété de décroissance exponentielle ponctuelle. Les difficultés supplémentaires sont de deux ordres.

Premièrement, la solution $v(t)$ n'est pas nécessairement bornée ni globale.

Deuxièmement, la propriété de décroissance exponentielle est bien plus délicate à démontrer dans le cas non borné.

C'est l'utilisation du troisième invariant en temps $\int v(t)$ qui permet de montrer que $v(t)$ est globale et bornée et ainsi utiliser le théorème de classification comme précédemment. Notons que l'invariant $\int v(t)$ est bien défini pour $v(t)$ grâce à la décroissance exponentielle de cette solution, mais n'est pas défini directement sur $u(t)$, solution H^1.

2.3 Profil d'explosion

La preuve est par contradiction. Supposons que

$$\varepsilon(t) \not\rightharpoonup 0 \quad \text{dans } H^1(\mathbb{R}), \text{ pour } t \to T.$$

Comme dans le résultat précédent, l'idée est de définir un objet récurrent lorsque $t \to T$. D'après les propriétés de récurence de cet objet, et une fonctionnelle presque monotone en temps, mesurant la norme L^2 à gauche à une certaine distance du soliton, l'objet asymptotique a une propriété de décroissance en espace quand $x \to +\infty$.

Comme dans les résultats précédents, c'est l'inexistence d'un tel objet qui conclut la preuve du profil à l'explosion.

Plus précisèment, définissons $t_n \to T$ tel que $\varepsilon(t_n) \rightharpoonup \tilde{\varepsilon}(0) \not\equiv 0$, et $\tilde{u}$ solution de (1) avec $\tilde{u}(0) = Q + \tilde{\varepsilon}(0)$. Cette solution $\tilde{u}(t)$ est associée à $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{x}$, et vérifie $\tilde{\lambda}(0) = 1$. Soit $0 < \tau \leq +\infty$ tel $\forall t \in [0, \tau)$, $\frac{1}{1.1} \leq \tilde{\lambda}(t) \leq 1$. Deux cas sont possible:

Cas 1: $\tau = +\infty$. Dans ce cas, la solution est dans un régime régulier. En raisonnant comme dans la partie précédente, on a une solution L^2 localisée, et on trouve une contradiction avec le Théorème 2.

Cas 2: $\tau < +\infty$ et $\tilde{\lambda}(\tau) = \frac{1}{1.1}$. Ici, on a besoin d'un autre résultat de rigidité dans le cas focalisant.

Proposition 1 (Non existence de solution focalisante à décroissance) *Il existe $\alpha_0 > 0$ tel qu'il n'y a pas de solution $u(t)$ de (1) satisfaisant*

(i) $\int u_0^2 \leq \int Q^2 + \alpha_0$,

(ii) $E(u_0) \leq 0$,

(iii) Il existe $s_1 < s_2$ tel que

$$\forall s > s_1,\ \lambda(s) \leq \lambda(s_1), \quad \lambda(s_2) = \frac{\lambda(s_1)}{1.1}, \quad \forall s \in [s_1, s_2],\ \frac{\lambda(s_1)}{1.1} \leq \lambda(s) \leq \lambda(s_1), \tag{25}$$

(iv) $\varepsilon(s)$ est tel que $\forall x < 0$, $\forall s \in [s_1, s_2]$, $|\varepsilon(s,x)| \leq C_1 \alpha_0^{1/4} e^{-C_2|x|}$.

Rappelons rapidement l'argument de la preuve de ce résultat. On travaille sur $[s_1, s_2]$. Le problème est de comprendre les tailles relatives de différentes quantités comme

$$\int_{s_1}^{s_2} \int \varepsilon^2, \quad \int_{s_1}^{s_2} \int \varepsilon_x^2, \quad \int_{s_1}^{s_2} \int \varepsilon^2 e^{-\frac{|x|}{2}}$$

(et aussi $\int_{s_1}^{s_2} \int \varepsilon Q$.) Notons qu'il n'y a aucun contrôle de la taille de l'intervalle $[s_1, s_2]$ et que les termes que nous intégrons sont des intégrales oscillantes en temps.

On prouve en fait les deux identités suivantes:

- Il existe $C_I > 0$ (indépendant de α_0) tel que

$$C_I \int_{s_1}^{s_2} \int \varepsilon^2 e^{-\frac{|x|}{2}} \geq 1 + \int_{s_1}^{s_2} \int \varepsilon_x^2 + |E_0| \int_{s_1}^{s_2} \lambda^2. \tag{26}$$

C'est une conséquence d'une relation de dispersion dans L^1 utilisant la quantité suivante

$$J(t) = \int \varepsilon(t,x) \int_x^{+\infty} \left(\frac{Q}{2} + zQ_z \right)$$

et l'hypothèse de décroissance exponentielle.

- Il existe $A_0 > 2$ et $C_{II} > 0$ (indépendant de α_0) tel que

$$\int_{s_1}^{s_2} \int \varepsilon^2 e^{-\frac{|x|}{A_0}} \leq C_{II}\, \alpha_0^{1/2} \left[1 + \int_{s_1}^{s_2} \int \varepsilon_x^2 + |E_0| \int_{s_1}^{s_2} \lambda^2 \right]. \tag{27}$$

C'est une conséquence d'une relation du type Viriel local (qui nécessite des conditions d'orthogonalités adéquates sur ε) décrivant la dispersion L^2, et impliquant une version régularisée de la quantité

$$I(t) = \int x\varepsilon^2(t,x)dx.$$

Comme $A_0 > 2$, la contradiction est évidente pour $\alpha_0 < \left(\frac{1}{C_I C_{II}}\right)^2$. Des quantités I et J comparables sont utilisées dans la preuve du théorème de Liouville.

3 Explosion en temps fini et contrôle du taux d'explosion

Les arguments dans cette partie sont bien distincts de ceux de la partie précédente. Il ne s'agit en effet pas de montrer l'explosion en temps fini par classification d'objets asymptotiques. Dans notre méthode, pour montrer l'explosion en temps fini, il faut d'abord connaître le comportement focalisant de la solution et l'existence du profil d'explosion Q pour être capable, à partir d'un certain temps, d'étudier directement la dynamique du paramètre géométrique $\lambda(t)$.

Formellement, l'idée est d'écrire l'équation de $\varepsilon(t)$ et d'en extraire, à l'aide de la conservation de l'énergie, une inéquation différentielle pour $\lambda(t)$. Un point qui a été passé sous silence jusqu'à présent est que dans l'obtention de la décomposition (15) de $u(t)$ il y a en fait une certaine marge. L'argument variationnel de l'introduction montre que pour tout temps t, il existe $\lambda_0(t)$ et $x_0(t)$ tel que $\varepsilon_0(t)$ est petit. Maintenant, on peut améliorer le choix de $\lambda(t)$ et $x(t)$, à travers le théorème des fonctions implicites, pour imposer deux relations d'orthogonalité sur $\varepsilon(t)$, du type $\int \varepsilon(t)V = 0$, où $V = V(x)$. Ce processus assure par ailleurs une régularité C^1 en temps des paramètres $\lambda(t)$ et $x(t)$.

En combinant l'équation de $\varepsilon(t)$ (on écrit seulement les termes les plus importants),

$$\varepsilon_t + (L\varepsilon)_x = \lambda^2\lambda_t\Big(\frac{Q}{2} + xQ_x\Big) + \dots \tag{28}$$

et la relation ($V = V(x)$)

$$\int \varepsilon(t)V = 0, \tag{29}$$

on obtient

$$-\int \varepsilon(t)L(V_x) \approx \lambda^2\lambda_t \int \Big(\frac{Q}{2} + xQ_x\Big)V. \tag{30}$$

Pour un bon choix de V, on a $L(V_x) = -Q$ et $\int \Big(\frac{Q}{2} + xQ_x\Big)V = c_0 > 0$ (le choix de V est lié à la fonctionnelle J utilisée plus haut). De plus, par la conservation de l'énergie et $E(Q) = 0$,

$$\lambda^2(t)|E_0| = -\lambda^2(t)E(u(t)) = -E(Q + \varepsilon(t)) \approx -\int \varepsilon(t)Q - \int \varepsilon_x^2. \tag{31}$$

On a alors formellement, en utilisant $\int \varepsilon_x^2 > 0$,

$$\lambda_t \leq -c_1|E_0|, \tag{32}$$

ce qui donne l'explosion en temps fini et la majoration du taux d'explosion.

Malheureusement, on n'arrive pas à démontrer l'inégalité différentielle (32) ponctuellement en temps. En effet, une première difficulté réside dans le fait que $V(x)$ tend vers une constante strictement positive lorsque $x \to +\infty$. Ceci pose un problème pour définir $\int \varepsilon(t)V$. C'est la raison technique d'imposer (9). Une deuxième difficulté réside dans les autres termes de l'équation de ε. On ne peut pas les contrôler ponctuellement en temps, mais seulement en moyenne sur des intervalles de temps bien choisis.

Le résultat montré rigoureusement est le suivant. Si $t_n \to T$ est la suite définie par:

$$\lambda(t_n) = 2^{-n}, \quad \forall t > t_n,\ \lambda(t) < \lambda(t_n), \tag{33}$$

(temps de "doublement") alors, pour n assez grand,

$$C|E_0|(t_{n+1} - t_n) \leq \lambda(t_n) = 2^{-n} \tag{34}$$

On en conclut l'explosion en temps fini et la majoration (12) par sommation des inégalités (34) sur n.

References

[1] J.L. Bona, V.A. Dougalis, O.A. Karakashian and W.R. McKinney, Conservative, high order numerical schemes, Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A. **351**, (1995) 107—164.

[2] D.B. Dix and W.R. McKinney, Numerical computations of self-similar blow up solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation, Diff. Int. Eq., **11** (1998), 679—723.

[3] W. Eckhaus and P. Schuur, The emergence of solitons of the Korteweg–de Vries equation from arbitrary initial conditions, Math. Meth. Appl. Sci. **5** (1983), 97—116.

[4] C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg–de Vries equation via the contraction principle, Comm. Pure Appl. Math. **46**, (1993) 527—620.

[5] D.J. Korteweg and G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Philos. Mag. **539**, (1895) 422—443.

[6] G.L. Lamb Jr., *Element of soliton theory* (John Wiley & Sons, New York 1980).

[7] P. D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Comm. Pure Appl. Math. **21**, (1968) 467—490.

[8] Y. Martel and F. Merle, A Liouville Theorem for the critical generalized Korteweg–de Vries equation, J. Math. Pures Appl. **79**, (2000) 339—425.

[9] Y. Martel and F. Merle, Asymptotic stability of solitons for subcritical generalized KdV equations, Arch. Ration. Mech. Anal. **157**, (2001) 219—254.

[10] Y. Martel and F. Merle, Stability of the blow up profile and lower bounds on the blow up rate for the critical generalized KdV equation, Ann. of Math. **155**, (2002) 235—280.

[11] Y. Martel and F. Merle, Blow up in finite time and dynamics of blow up solutions for the L^2-critical generalized KdV equation, à paraître dans J. Amer. Math. Soc.

[12] Y. Martel, F. Merle and Tai–Peng Tsai, Stability and asymptotic stability in the energy space of the sum of N solitons for subcritical gKdV equations, préprint.

[13] F. Merle, Blow-up phenomena for critical nonlinear Schrödinger and Zakharov equations, Proceeding of the International Congress of Mathematicians, (Berlin, 1998), Doc. Math. J. DMV.

[14] F. Merle, Existence of blow-up solutions in the energy space for the critical generalized KdV equation, J. Amer. Math. Soc. **14**, (2001) 555—578.

[15] F. Merle and P. Raphael, Blowup dynamic and upper bound on the blowup rate for the critical nonlinear Schrödinger equation, préprint.

[16] R.M. Miura, The Korteweg–de Vries equation: a survey of results, SIAM Review **18**, (1976) 412—459.

[17] M.I. Weinstein, Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates, Comm. Math. Phys. **87** (1983), 567—576.

Yvan Martel : Université de Cergy-Pontoise, 2, avenue Adolphe Chauvin, 95302 Cergy-Pontoise Cedex

yvan.martel@math.u-cergy.fr

Frank Merle : Université de Cergy-Pontoise (même adresse) et Institut Universitaire de France.

frank.merle@math.u-cergy.fr