SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2001-2002

Jean Ginibre and Giorgio Velo

Diffusion à longue portée et opérateurs d'ondes modifiés pour le système Ondes-Schrödinger

Séminaire É. D. P. (2001-2002), Exposé n° XXI, 17 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2001-2002____A21_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Diffusion à longue portée et opérateurs d'ondes modifiés pour le système Ondes-Schrödinger

J. Ginibre et G. Velo

1 Introduction

On se propose d'étudier la théorie de la diffusion et de montrer l'existence d'opérateurs d'ondes modifiés pour le système couplé Ondes-Schrödinger (OS)

$$\begin{cases} i\partial_t u = -(1/2)\Delta u - Au \\ \Box A = |u|^2 \end{cases} \tag{1.1}$$

en dimension $3+1$ d'espace temps. Ici u et A sont respectivement une fonction complexe et une fonction réelle définies dans $I\!R^{3+1}$, et $\Box = \partial_t^2 - \Delta$. Le système (1.1) est le système d'Euler-Lagrange associé à la densité de Lagrangien

$$\mathcal{L} = -\ \mathrm{Im}\ \bar{u}\partial_t u - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|\partial_t A|^2 - \frac{1}{2}|\nabla A|^2 + A|u|^2\ .$$

Formellement la norme de u dans L^2 est conservée par l'évolution associée, ainsi que l'énergie

$$E(u, A) = \int dx \left\{ \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^2 + (\partial_t A)^2 + |\nabla A|^2\right) - A|u|^2 \right\}\ .$$

On sait que le problème de Cauchy pour le système (1.1) est globablement bien posé dans l'espace d'énergie $X_e = H^1 \oplus \dot{H}^1 \oplus L^2$ pour $(u, A, \partial_t A)$ [1].

Le but de la théorie de la diffusion est en premier lieu l'étude et la classification des comportements asymptotiques en temps des solutions d'un système dynamique donné, dans le cas présent le système (1.1), par comparaison avec un ensemble de comportements asymptotiques convenablement choisis et de préférence simples. On se donne donc un ensemble $\mathcal{V} = \{v \equiv v(v_+)\}$ de comportements asymptotiques modèles paramétrés par des données v_+. Par exemple, dans le cas du système (1.1), un choix en apparence naturel, mais en fait inadéquat, pourrait être de prendre pour $\mathcal{V}$ l'ensemble des solutions $v = (u, A)$ du système linéaire

$$\begin{cases} i\partial_t u = -(1/2)\Delta u \\ \Box A = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

paramétré par les données initiales $v_+ = (u_+, A_+, \dot{A}_+) = (u, A, \partial_t A)(0)$ du problème de Cauchy pour ce système. L'ensemble $\mathcal{V}$ étant choisi, deux problèmes se posent :

(1) pour chaque $v \in \mathcal{V}$, construire une solution (u, A) du système donné (1.1) telle que $(u, A)(t)$ se comporte comme $v(t)$ en un sens convenable quand $t \to \infty$. Si ce problème est résolu, on définit l'opérateur d'ondes Ω comme l'application $v_+ \to (u, A)$ ainsi obtenue. Habituellement on définit l'opérateur d'ondes comme l'application $v_+ \to (u, A)(t = 0)$, mais l'objet important est la solution (u, A) définie au voisinage de l'infini en temps, i.e. dans un intervalle $[T, \infty)$, et le prolongement de cette solution de $t = T$ à $t = 0$ est un problème de nature différente qui ne sera pas abordé ici. Le problème ci-dessus se pose indépendamment pour $t \to +\infty$ et $t \to -\infty$. On considèrera seulement le cas $t \to +\infty$. Le cas $t \to -\infty$ se traite de la même façon.

(2) pour chaque solution (u, A) du système donné, trouver $v \in \mathcal{V}$ tel que $(u, A)(t)$ se comporte asymptotiquement comme $v(t)$ quand $t \to \infty$. Si tel est le cas pour toute solution (u, A) dans un espace fonctionnel convenable, on dit que la complétude asymptotique a lieu dans cet espace. Ce deuxième problème, beaucoup plus difficile que le premier, est hors de portée pour le système (1.1) et ne sera pas étudié ici.

Il existe de nombreux travaux consacrés à la théorie de la diffusion pour les équations et systèmes non linéaires basés sur l'équation de Schrödinger, en particulier pour les équations de Schrödinger non linéaires (SNL) et de Hartree et pour les systèmes de Klein-Gordon-Schrödinger (KGS) et de Maxwell-Schrödinger (MS). Comme dans le cas de l'équation de Schrödinger linéaire (SL) avec potentiel V, on doit distinguer les cas de courte portée et de longue portée. Le cas de courte portée est celui où l'interaction décroît assez vite à l'infini (en espace ou en temps) pour qu'on puisse prendre pour $\mathcal{V}$ l'ensemble des solutions du système sans interaction, par exemple (1.2) dans le cas du système (1.1). Tel est le cas pour les équations SL et Hartree avec potentiel $V(x) = |x|^{-\gamma}$ pour $\gamma > 1$, pour les systèmes OS et MS en dimension d'espace $n \geq 4$ et KG en dimension d'espace $n \geq 3$. On attend alors et dans certains cas on démontre l'existence des opérateurs d'ondes ("ordinaires") associés à ce choix de $\mathcal{V}$. Le cas de longue portée est celui où l'interaction décroît lentement à l'infini. Tel est le cas pour les équations SL et Hartree avec V du même type pour $0 < \gamma \leq 1$. Les systèmes OS et MS en dimension $n = 3$ et le système

KGS en dimension $n = 2$ sont également de ce type et correspondent au cas limite (Coulombien) $\gamma = 1$. Dans ce cas, les opérateurs d'ondes ordinaires n'existent pas, i.e. le système $\mathcal{V}$ précédent est inadéquat. Il doit être remplacé par un système de comportements asymptotiques modifiés où la fonction de Schrödinger contient une phase additionnelle imposée par l'interaction, et l'un des problèmes rencontrés est la construction de ce système de comportements asymptotiques modifiés. La résolution du problème (1) ci-dessus conduit alors à la définition d'opérateurs d'ondes dits modifiés.

Il existe un certain nombre de résultats sur la diffusion à longue portée pour les équations et systèmes non linéaires. L'existence d'opérateurs d'ondes modifiés a été démontrée d'abord pour l'équation SNL en dimension d'espace $n = 1$, dans le cas limite Coulombien correspondant à $\gamma = 1$ [13]. Le résultat a ensuite été étendu à la même équation en dimension $n = 2$, 3 et à l'équation de Hartree en dimension $n \geq 2$ [2], à l'équation SNL avec dérivées en dimension $n = 1$ [10], au système KGS en dimension $n = 2$ [14] et au sytème MS en dimension $n = 3$ [15]. Tous ces résultats sont restreints au cas de données petites. Dans le cas de données de taille arbitraire, l'existence d'opérateurs d'ondes modifiés a été démontrée pour une famille d'équations de Hartree généralisées, pour tout γ avec $0 < \gamma \leq 1$ [3] [4] [5] et une partie de ces résultats a été généralisée en ce qui concerne la régularité des données et des solutions [11] [12]. L'existence d'opérateurs d'ondes modifiés a ensuite été démontrée pour le système OS en dimension $n = 3$ [6], et c'est ce travail qui fait l'objet du présent exposé. Le système OS sert en fait de banc d'essai pour mettre au point des méthodes permettant de traiter le système MS en dimension $n = 3$, qui est nettement plus compliqué [7].

La méthode utilisée pour traiter le système OS est une extension de celle utilisée pour traiter l'équation de Hartree généralisée utilisée dans [3] [4] [5], et s'inspire comme cette dernière d'une méthode introduite dans [8] [9] pour montrer l'existence de solutions globales petites pour l'équation de Hartree. La méthode consiste à éliminer préalablement l'équation des ondes en la résolvant pour A en termes de u et à substituer le résultat dans l'équation de Schrödinger, qui devient alors non linéaire et non locale en temps. On traite ensuite cette nouvelle équation comme l'équation de Hartree dans [3] [4] [5]. On exprime la fonction de Schrödinger u en termes d'une amplitude w et d'une phase φ, on impose arbitrairement une équation de type Hamilton-Jacobi pour la phase, et on obtient ainsi un système auxiliaire formé de deux équations, dont l'autre est une équation de transport pour l'amplitude w. On construit ensuite (essentiellement) les opérateurs d'ondes pour le système auxiliaire en résolvant le problème de Cauchy pour ce système avec temps initial infini, la donnée initiale étant le comportement de la solution à l'infini, i.e. un couple (W, ϕ) qui tient le rôle du comportement asymptotique v mentionné plus haut, adapté au système auxiliaire. On reconstruit enfin la solution (u, A) du système initial à partir de la solution (w, φ) du système auxiliaire, ce qui permet de conclure la construction de l'opérateur d'ondes.

2 Le système auxiliaire et sa dynamique

On établit ici le système auxiliaire qui va remplacer le système (1.1) et on commence l'étude du problème de Cauchy aux grands temps pour ce système. En préparation à l'étude de ce problème avec temps initial infini, on considère d'abord le problème de Cauchy pour le système (1.1) avec temps initiaux t_0 pour l'équation de Schrödinger et t_1 pour l'équation des ondes, avec $t_0 \leq t_1$ et avec l'intention de faire tendre t_1 et t_0 vers l'infini dans cet ordre. On résoud d'abord l'équation des ondes par

$$A = A_0 + A_1^{t_1}(|u|^2) \ , \tag{2.1}$$

$$A_0 = \dot{K}(t)\ A_+ + K(t)\ \dot{A}_+ \ , \tag{2.2}$$

$$A_1^{t_1}(|u|^2) = \int_{t_1}^{t} dt'\ K(t-t')|u(t')|^2 \ , \tag{2.3}$$

où

$$K(t) = \omega^{-1} \sin \omega t \quad , \quad \dot{K}(t) = \cos \omega t \quad \text{et} \quad \omega = (-\Delta)^{1/2} \ .$$

Pour $t_1 = \infty$, $(A_+, \dot{A}_+)$ s'interprète naturellement comme l'état asymptotique pour A. On remplace désormais l'équation des ondes dans (1.1) par (2.1). On effectue maintenant sur (u, A) un changement de variables adapté à l'étude du comportement asymptotique en temps. Il résulte de la représentation de l'opérateur $U(t) = \exp(i(t/2)\Delta)$, qui résoud l'équation de Schrödinger libre, par un noyau de convolution, que cet opérateur peut être représenté par

$$U(t) = M(t)\ D(t)\ F\ M(t) \tag{2.4}$$

où $M(t)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction

$$M(t) = \exp(ix^2/2t) \ , \tag{2.5}$$

$$D(t) = (it)^{-n/2}\ D_0(t) \qquad , \qquad (D_0(t)f)(x) = f(x/t)\ , \tag{2.6}$$

et F est la transformation de Fourier. Il résulte de (2.4) que le comportement asymptotique en temps d'une solution générique de l'équation de Schrödinger libre est donné par

$$u(t) = U(t)\ u_+ = MDFM\ u_+ \sim MDF\ u_+ = MD\ w_+ \tag{2.7}$$

où $w_+ = Fu_+$. Guidé par (2.7), on paramétrise u en termes d'une amplitude w et d'une phase φ par

$$u(t) = M(t)\ D(t) \exp[-i\varphi(t)] w(t)\ . \tag{2.8}$$

Il est alors naturel d'exprimer A en terme d'une nouvelle fonction B par

$$A = t^{-1}\ D_0\ B \tag{2.9}$$

et des formules analogues pour A_0 et $A_1^{t_1}$, si bien que (2.1) devient

$$B = B_0 + B_1^{t_1}(w, w) \tag{2.10}$$

en définissant

$$B_1^{t_1}(w_1, w_2) = \int_1^{t_1/t} d\nu\ \nu^{-3}\ \omega^{-1} \sin(\omega(\nu - 1)) D_0(\nu) \left(\mathrm{Re}\ \bar{w}_1 w_2\right)(\nu t)\ . \tag{2.11}$$

Substituant (2.8) (2.9) dans la première équation de (1.1), on obtient

$$\left\{ i\partial_t + (2t^2)^{-1}\Delta - i(2t^2)^{-1}(2\nabla\varphi \cdot \nabla + \Delta\varphi) + t^{-1}B + \partial_t\varphi - (2t^2)^{-1}|\nabla\varphi|^2 \right\} w = 0\ . \tag{2.12}$$

On a maintenant une seule équation d'évolution pour deux fonctions (w, φ). Suivant une méthode standard, on impose arbitrairement une équation de Hamilton-Jacobi pour la phase. Dans ce but, on décompose $B_1^{t_1}$ en une partie à courte portée et une partie à longue portée selon

$$B_1^{t_1} = B_S^{t_1} + B_L^{t_1}\ ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_S^{t_1} = F^{-1}\ \chi(|\xi| > t^\beta) F\ B_1^{t_1} \\ \\ B_L^{t_1} = F^{-1}\ \chi(|\xi| \le t^\beta) F\ B_1^{t_1}\ , \end{array} \right. \tag{2.13}$$

où $\chi(\mathcal{P})$ est la fonction caractéristique de l'ensemble où $\mathcal{P}$ est vraie, et β est un paramètre satisfaisant $0 < \beta < 1$ (on peut si on veut prendre $\beta = 1/2$ dans la suite de cet exposé). On décompose alors (2.12) dans le système suivant, où la seconde équation est l'équation de Hamilton-Jacobi imposée à la phase, où la première est l'équation de transport résultante pour l'amplitude

$$\begin{cases} \partial_t w = i(2t^2)^{-1}\Delta w + t^{-2}Q(\nabla\varphi, w) + it^{-1}\left(B_0 + B_S^{t_1}(w,w)\right)w \\ \partial_t \varphi = (2t^2)^{-1}|\nabla\varphi|^2 - t^{-1}B_L^{t_1}(w,w)\ , \end{cases} \tag{2.14}$$

et où on a défini $Q(s,w) = s\cdot\nabla w + (1/2)(\nabla\cdot s)w$. On remarque enfin que les seconds membres de (2.14) ne dépendent de φ que par son gradient $s = \nabla\varphi$. Il est commode de prendre le gradient de la seconde équation pour obtenir un système ne contenant que s, à partir duquel φ peut être obtenu par intégration en temps. On obtient ainsi le système auxiliaire

$$\begin{cases} R_1(w,s) \equiv -\partial_t w + i(2t^2)^{-1}\Delta w + t^{-2}Q(s,w) + it^{-1}\left(B_0 + B_S^{t_1}(w,w)\right)w = 0 \\ R_2(w,s) \equiv -\partial_t s + t^{-2}s\cdot\nabla s - t^{-1}\nabla B_L^{t_1}(w,w) = 0\ , \end{cases} \tag{2.15}$$

qui, complété par (2.10), remplace le système initial (1.1).

La suite de cette section est consacrée à l'étude préliminaire de la dynamique à grand temps pour ce système. Une première difficulté qui apparaît dans cette étude est le fait que le problème de Cauchy pour le système (2.15) avec données initiales $(w,s)t_0) = (w_0,s_0)$ n'est pas un problème de Cauchy usuel pour un système d'EDP en raison de la dépendance de $B_1^{t_1}$ en w, qui est non locale en temps. On surmonte cette difficulté en considérant le système partiellement linéarisé

$$\begin{cases} \partial_t w' = i(2t^2)^{-1}\Delta w' + t^{-2}Q(s,w') + it^{-1}\left(B_0 + B_S^{t_1}(w,w)\right)w' \\ \partial_t s' = t^{-2}s\cdot\nabla s' - t^{-1}\nabla B_L^{t_1}(w,w) \end{cases} \tag{2.16}$$

Pour (w,s) fixé, on résoud tout d'abord le problème de Cauchy linéaire pour le système (2.16) avec données initiales $(w',s')(t_0) = (w_0,s_0)$. On définit ainsi une application $\Gamma : (w,s) \to (w',s')$. Le problème de Cauchy pour (2.15) est alors ramené à la recherche d'un point fixe de Γ, et se résoud dans les cas favorables par une méthode de contraction.

Avec en vue l'étude ultérieure du système MS, on étudie le système OS sous la forme (2.15) par une méthode simple et robuste, en l'occurrence une méthode d'énergie dans des espaces de Sobolev basés sur L^2. Plus précisément, on cherche des solutions de (2.15) dans des espaces du type $\mathcal{C}(I, X^{k,\ell})$ où $I = [T, \infty)$ et

$$X^{k,\ell} = \Big\{(w, s) : w \in H^k, \nabla s \in H^\ell \text{ et } s \in L^6\Big\} \ . \tag{2.17}$$

Le caractère non linéaire du système (2.15) impose alors des bornes inférieures sur k et ℓ. Bien que le système (1.1) ne soit pas invariant par dilatation et qu'il n'y ait pas à proprement parler d'exposant critique, il ne semble pas possible d'éviter les conditions $k > 1$, $\ell \geq k$ et $\ell > 3/2$. On se heurte alors à une difficulté sérieuse due à la différence des propriétés de propagation de l'équation de Schrödinger et de l'équation des ondes. Pour l'équation de Schrödinger, d'après (2.7), la fonction u s'étale au cours du temps par dilatation (normalisée dans L^2) et la fonction w doit tendre vers une limite quand $t \to \infty$. Pour l'équation des ondes, la solution, en l'occurrence A_0, se propage dans les directions du cône de lumière. En particulier, pour des données à support compact, si

$$\text{Supp}\left(A_+, \dot{A}_+\right) \subset \{x : |x| \leq R\} \tag{2.18}$$

alors

$$\text{Supp}\ A_0 \subset \{(x, t) : |\ |x| - t| \leq R\} \tag{2.19}$$

par le principe d'Huyghens. Dans la variable B_0 qui figure dans (2.15), obtenue par (2.9), cette dernière condition devient

$$\text{Supp}\ B_0 \subset \{(x, t) : |\ |x| - 1| \leq R/t\} \tag{2.20}$$

i.e. B_0 se concentre au voisinage de la sphère unité. L'usage d'espaces du type (2.17) pour (w, s) nécessitera l'estimation de dérivées de B_0 et il est clair d'après (2.20) que chaque dérivée sur B_0 engendre un facteur t dans l'estimation. Pour des solutions de régularité optimale A_0 de l'équation des ondes, on ne pourra disposer au mieux que de

$$\| \ \omega^m B_0 \ \|_r \leq \ C \ t^{m-1/r} \ . \tag{2.21}$$

(On rappelle que $\omega = |\nabla|$ et on note $\| \cdot \|_r$ la norme dans L^r). Cette difficulté se manifeste clairement dans les résultats qu'on peut obtenir pour le problème de Cauchy pour le système (2.15) avec t_0 fini, $t_1 \geq t_0$, $(w, s)(t_0) = (w_0, s_0)$ par les estimations d'énergie standard dans des espaces du type (2.17) :

(1) Si $t_1 = t_0$, les estimations sont insuffisantes pour empêcher une explosion en temps fini, si grand que soit t_0. Ce défaut peut sembler surprenant en regard du fait que pour $t_1 = t_0$, on est revenu à un problème de Cauchy classique pour un système

d'EDP, et que le système (1.1) est globalement bien posé dans l'espace d'énergie. Cependant, il n'y a pas de contradiction, car rien n'exclut une perte de régularité dans les normes (2.17), qui ne sont pas celles de l'espace d'énergie, ou l'introduction de singularités artificielles dans la séparation (2.8) en phase et amplitude.

(2) Si $t_1 > t_0$ et si $A_0 \neq 0$, les estimations sont insuffisantes pour empêcher une explosion en temps fini avant t_1 si t_1 est suffisamment grand.

(3) Si $A_0 = 0$, les difficultés de propagation précédentes disparaissent, et on obtient un résultat satisfaisant : le problème de Cauchy pour le système (2.15) est bien posé dans l'intervalle $[t_0, t_1]$ pour t_0 assez grand, uniformément en t_1 et en particulier pour $t_1 = \infty$. On énonce ce résultat dans la proposition suivante. On utilise la notation

$$[\lambda]_+ = \ \mathrm{Max}(\lambda, 0) \quad \text{si } \lambda \neq 0 \quad , \quad [0]_+ = \varepsilon > 0 \ .$$

Proposition 2.1. *Soit $k > 1$, $\ell \geq k$, $\ell > 3/2$, $0 < \beta < 1$ et*

$$(0 <)\beta_2 \equiv \beta\left(\ell + 1 - k + [3/2 - k]_+\right) < 1 \ . \tag{2.22}$$

Soit $A_0 = 0$ (i.e. $B_0 = 0$), et soit $(w_0, \widetilde{s}_0) \in X^{k,\ell}$. Alors il existe $T_0 = T_0(w_0, \widetilde{s}_0) < \infty$ tel que pour tout $t_0 \geq T_0$, il existe $T < t_0$ tel que pour tout t_1 avec $t_0 \leq t_1 \leq \infty$, le système (2.15) avec données initiales $(w, s)(t_0) = (w_0, t_0^{\beta_2}\widetilde{s}_0)$ a une solution unique (w, s) dans l'intervalle $I = [T, t_1]$ telle que $(w, t^{-\beta_2}s) \in (\mathcal{C} \cap L^\infty)(I, X^{k,\ell})$. La solution est continue en $(w_0, \widetilde{s}_0)$ dans des normes convenables.

Ainsi, c'est seulement dans le cas particulier $A_0 = 0$ qu'on sait démontrer que le système (2.15) définit une dynamique asymptotique. Dans la section suivante, on construira des opérateurs d'ondes pour ce système, i.e. on résoudra le problème de Cauchy à l'infini, i.e. on construira des solutions de comportement asymptotique donné, dans le cas général $A_0 \neq 0$. La difficulté qu'on vient de rencontrer laisse prévoir que ces solutions ne seront pas génériques en un sens naturel, et on devra effectivement faire une hypothèse spécifique sur les états asymptotiques, sous la forme d'une condition de support, pour éliminer les difficultés de propagation qui empêchent d'étendre la Proposition 2.1 au cas général $A_0 \neq 0$.

3 Problème de Cauchy à l'infini et opérateurs d'ondes

Dans cette section, on construit les opérateurs d'ondes, i.e. on résoud le problème de Cauchy à l'infini, i.e. on construit des solutions de comportement asymptotique donné, d'abord pour le système auxiliaire (2.15) et ensuite pour le système initial (1.1), dans le cas général $A_0 \neq 0$. On prend désormais $t_1 = \infty$ et on omet l'indice t_1 and B_1, B_S et B_L.

On commence par le système (2.15). Le comportement asymptotique de (w, s) sera donné sous la forme d'un couple (W, S) à choisir convenablement, et auquel (w, s) devra être asymptotique quand $t \to \infty$. Il est commode de prendre pour nouvelles variables les différences

$$(q, \sigma) = (w - W, s - S) \ . \tag{3.1}$$

Dans ces variables, le système auxiliaire (2.15) devient

$$\begin{cases} \partial_t q = i(2t^2)^{-1}\Delta q + t^{-2}Q(s, q) + it^{-1}\left(B_0 + B_S(w, w)\right) q \\ +t^{-2}Q(\sigma, W) + it^{-1}B_S(q, q + 2W)W + R_1(W, S) \\ \partial_t \sigma = t^{-2}(s \cdot \nabla\sigma + \sigma \cdot \nabla S) - t^{-1}\nabla B_L(q, q + 2W) + R_2(W, S) \end{cases} \tag{3.2}$$

où R_1 et R_2 sont définis dans (2.15) et sont pris désormais avec $t_1 = \infty$. Comme pour le système (2.15) et pour les mêmes raisons, on utilisera comme étape intermédiaire une version partiellement linéarisée du système (3.2), obtenue en faisant les changements de variables (3.1) et

$$(q', \sigma') = (w' - W, s' - S) \tag{3.3}$$

dans le système linéarisé (2.16). La résolution du système (3.2) s'effectue par la même méthode que précédemment, complétée par un passage à la limite. Plus précisément

(1) On résoud le système linéarisé pour (q', σ'), avec donnée initiale $(q', \sigma')(t_0) = 0$, pour t_0 grand mais fini, dans un intervalle $[T, t_0]$.

(2) On prend la limite $t_0 \to \infty$ de la solution, ce qui donne une solution (q', σ') du système linéarisé définie dans $[T, \infty)$ et tendant vers zéro à l'infini, et permet de définir une application $\Gamma : (q, \sigma) \to (q', \sigma')$.

(3) On montre par une méthode de contraction que Γ a un point fixe, ce qui donne la solution cherchée du système (3.2).

Le point technique essentiel qui assure le succès de la méthode est l'obtention pour T et pour la solution (q', σ') dans l'intervalle $[T, t_0]$ obtenue au (1), d'estimations uniformes en t_0 et reproduisant celles injectées pour (q, σ). En ce qui concerne la régularité locale, le problème pour le système (3.2) est essentiellement le même que pour le système (2.15), et on cherche donc (q, σ) dans un espace du type $\mathcal{C}(I, X^{k,\ell})$ pour $I = [T, \infty)$ et pour les mêmes valeurs de k et de ℓ. Le point crucial est le choix des décroissances en temps de (q, σ) qui expriment que (w, s) est asymptotique à (W, S). Le terme le plus dangereux dans les estimations est le terme en B_0 dans l'équation pour q, en raison des propriétés de propagation de l'équation des ondes qui entraînent que B_0 ne fait pas mieux que (2.21). L'estimation d'énergie de q dans H^k ne fait pas mieux que

$$\begin{aligned} \partial_t \parallel \omega^k q \parallel_2 &\leq t^{-1} \parallel [\omega^k, B_0] q \parallel_2 \ + \text{autres termes} \\ &\leq t^{-1} \parallel \omega^k B_0 \parallel_{r_1} \parallel q \parallel_{r_2} \ + \text{autres termes} \end{aligned}$$

avec $1/r_1 + 1/r_2 = 1/2$. Le choix le plus favorable s'avère être $r_1 = \infty$, $r_2 = 2$, ce qui donne par (2.21)

$$\cdots \leq t^{k-1} \parallel q \parallel_2 \ + \text{autres termes} \ . \tag{3.4}$$

Si on veut que $\omega^k q$ tende vers zéro à l'infini, sous la forme

$$\parallel \omega^k q \parallel_2 \leq C \ t^{-\lambda} \tag{3.5}$$

pour un $\lambda > 0$ on doit avoir

$$\parallel q \parallel_2 \leq C \ t^{-\lambda_0} \tag{3.6}$$

avec $\lambda_0 \geq \lambda + k$ (en fait on aura besoin de $\lambda_0 > \lambda + k$). Pour obtenir les décroissances (3.5) (3.6) à partir du système (3.2) on doit alors s'assurer que les décroissances injectées dans les termes au moins linéaires en (q, σ) sont correctement reproduites, mais surtout que (W, S) est une assez bonne solution approchée du système (2.15) en ce sens que les restes sont asymptotiquement petits, et en particulier que

$$\parallel R_1(W, S) \parallel \leq C \ t^{-1-\lambda_0} \quad , \quad \parallel \omega^k \ R_1(W, S) \parallel \leq C \ t^{-1-\lambda} \ . \tag{3.7}$$

Les décroissances à l'infini de σ et de R_2 suivent sans difficulté celles de q et de R_1. Il est naturel de choisir

$$\parallel \omega^{m+1} \sigma \parallel_2 \leq C \ t^{-\lambda_0 + \beta(m+1)} \qquad \text{pour } 0 \leq m \leq \ell \ , \tag{3.8}$$

ce qui impose la condition $\lambda_0 > \beta(\ell+1)$ et nécessite une décroissance de R_2 de la forme

$$\| \,\omega^{m+1}\ R_2(W,S)\, \|_2 \leq C\ t^{-1-\lambda_0+\beta(m+1)} \qquad \text{pour } 0 \leq m \leq \ell\ . \tag{3.9}$$

La résolution du système (3.2) est maintenant fractionnée en deux étapes. La première est de résoudre ce système par la méthode esquissée plus haut pour un couple (W,S) satisfaisant quelques estimations de nature générale et surtout la décroissance (3.7) (3.9) des restes. La deuxième étape est de construire (W,S) satisfaisant les hypothèse faites. La première étape aboutit à la proposition suivante.

Proposition 3.1. *Soit $k > 1$, $\ell \geq k$, $\ell > 3/2$, $0 < \beta < 1$, $\lambda > 0$, $\lambda_0 > \lambda + k$ et $\lambda_0 > \beta(\ell+1)$.*

Soit $1 \leq T_0 < \infty$, $I_0 = [T_0,\infty)$ et $(W,S) \in \mathcal{C}(I_0, X^{k+1,\ell+1})$ tel que $(U(1/t)W,S) \in \mathcal{C}^1(I_0, X^{k,\ell})$, $W \in L^\infty(I_0, H^{k+1})$, que

$$\| \,\omega^{m+1}\ S\, \|_2 \leq C\ t^{1-\eta+\beta(m-3/2)} \qquad \textit{pour } 0 \leq m \leq \ell+1 \tag{3.10}$$

pour un $\eta > 0$, et que $R_1(W,S)$ et $R_2(W,S)$ satisfassent les estimations (3.7) (3.9). Soit B_0 défini par (2.2) (2.9) et satisfaisant les estimations (2.21) pour $0 \leq m \leq k$ et $2 \leq r \leq \infty$. Alors il existe T, $T_0 \leq T < \infty$, tel que le système (3.2) a une solution unique $(q,\sigma) \in \mathcal{C}(I, X^{k,\ell})$, où $I = [T,\infty)$, satisfaisant les estimations (3.5) (3.6) (3.8) pour tout $t \in I$.

La deuxième étape est réalisée en résolvant le système (2.15) par itération, avec la contrainte que $W(t) \to w_+ = Fu_+$ quand $t \to \infty$, de manière à établir le contact avec le système initial (1.1) par l'intermédiaire de (2.8) et de (2.7) corrigé par une phase. Il s'avère que la j[eme] itération permet de traiter le cas $\lambda_0 < j$, donc $k < j$. On doit avoir $k > 1$ et il suffit de prendre $j = 2$ pour avoir un résultat non vide. On se limite à ce cas pour raison de simplicité. On prend donc

$$W(t) = w_0(t) + w_1(t) \qquad , \qquad S(t) = s_0(t) + s_1(t) \tag{3.11}$$

avec

$$\begin{cases} w_0(t) = U^*(1/t)\ w_+ \\ \\ s_0(t) = -\displaystyle\int_1^t dt'\ t'^{-1}\ \nabla B_L(w_0,w_0)(t') \end{cases} \tag{3.12}$$

et des formules analogues mais plus compliquées pour (w_1,s_1). Il est à noter qu'on a intérêt à effectuer cette itération en ignorant les termes en $B_0 + B_S(w,w)$ dans l'équation pour q, l'effet évident étant que ces termes se retrouvent entièrement dans le reste $R_1(W,S)$ où ils sont cependant moins nocifs qu'ils ne le seraient dans l'itération. Les restes prennent alors la forme

$$\begin{cases} R_1(W,S) = t^{-2}\left(Q(S,w_1) + Q(s_1,w_0)\right) + it^{-1}\left(B_0 + B_S(W,W)\right) W \\ \\ R_2(W,S) = t^{-2}\left(S \cdot \nabla s_1 + s_1 \cdot \nabla s_0\right) - t^{-1} \nabla B_L(w_1,w_1)\ . \end{cases} \tag{3.13}$$

Par le choix précédent, (W,S) dépend seulement de w_+ et il est facile de montrer que (W,S) satisfait les régularités utilisées dans la Proposition 3.1 et l'estimation (3.10) pour w_+ assez régulier, i.e. pour $w_+ \in H^{k_+}$ avec k_+ assez grand, dépendant de (k,ℓ,β). Il reste à assurer les conditions (3.7) (3.9) sur les restes. On voit facilement que les termes ne contenant pas B_0, qui ne dépendent que de w_+, satisfont les estimations requises pour w_+ assez régulier, c'est-à-dire pour k_+ assez grand. La principale difficulté vient du terme $B_0 W$, qui en première approximation se réduit à $B_0 w_+$. Une estimation factorisée ne donne pas mieux que

$$\| B_0 w_+ \|_2 \le \| B_0 \|_2 \ \| w_+ \|_\infty \le C\ t^{-1/2} \tag{3.14}$$

par (2.21), alors qu'on a besoin d'une décroissance en $t^{-\lambda_0}$ pour assurer (3.7). Plus généralement, pour assurer (3.7) avec $1 < k < \lambda_0 < 2$, on peut montrer qu'il suffit d'une estimation

$$\| (\partial^{\alpha_1} B_0)(\partial^{\alpha_2} w_+) \|_2 \le \ C\ t^{-\lambda_0 + |\alpha_1| + |\alpha_2|/2} \tag{3.15}$$

pour tous les multi-indices α_1, α_2 avec $|\alpha_1| \le 2$ et $|\alpha_2| \le 3$. Une telle estimation exprime que le produit $B_0 w_+$ décroît plus vite que ce que laisse attendre une estimation factorisée, et en raison de la concentration de B_0 au voisinage de la sphère unité, demande que w_+ soit petit au voisinage de celle-ci. Si on fait l'hypothèse de support sur w_+

$$\mathrm{Supp}\ w_+ \subset \{x : |\ |x| - 1| \ge \eta\} \tag{3.16}$$

et en même temps l'hypothèse de support (2.18) sur $(A_+, \dot{A}_+)$ qui entraîne la condition de support (2.20) pour B_0, la condition (3.15) est trivialement satisfaite, car le produit $(\partial^{\alpha_1} B_0)(\partial^{\alpha_2} w_+)$ s'annule pour tout α_1, α_2 dès que $t \ge R/\eta$. Plus généralement, si on garde la condition de support (3.16), on peut donner des conditions suffisantes sur $(A_+, \dot{A}_+)$ qui permettent d'assurer (3.15), sous la forme de conditions de décroissance à l'infini en x de normes de Sobolev locales appropriées de $(A_+, \dot{A}_+)$. La conclusion de la deuxième étape est la suivante

Proposition 3.2. *Soit* $1 < k < 2$, $\ell \geq k$, $\ell > 3/2$, $0 < \beta < 2/3$, $\beta(\ell - 1) < 1$, $\lambda > 0$, $\lambda + k < \lambda_0 < 2$, $\lambda_0 > \beta(\ell + 1)$, $k_+ \geq 4$ *et* $\beta(k_+ + 1) \geq 2$.

Soit $w_+ \in H^{k_+}$ *et* B_0 *défini par (2.2) (2.9), satisfaisant (2.21) pour* $0 \leq m \leq k$ *et* $2 \leq r \leq \infty$ *et satisfaisant (3.15) pour* $|\alpha_1| \leq 2$ *et* $|\alpha_2| \leq 3$. *Alors* (W, S) *défini par (3.11) satisfait les hypothèses de la Proposition 3.1.*

A des détails techniques près, les hypothèses sur les paramètres dans la Proposition 3.2 sont celles de la Proposition 3.1, complétées par $\lambda_0 < 2$ et k_+ assez grand. D'autre part, la condition (3.15) sur B_0 et w_+ est le reflet des difficultés dues aux propriétés de propagation. Elle exprime que w_+ s'annule sur la sphère unité en un sens convenable. Une telle propriété pourrait être dense dans H^m pour $m < 1/2$, mais ne l'est certainement pas dans H^k pour $k > 1$, et a fortiori dans H^{k_+} pour $k_+ \geq 4$. Par suite, les solutions du problème de Cauchy à l'infini pour le système auxiliaire (2.15) obtenues au moyen des Propositions 3.1 et 3.2 ne peuvent pas être considérées comme génériques en un sens raisonnable. C'est la même raison qui est à l'origine des difficultés à étendre la Proposition 2.1 au cas général $B_0 \neq 0$: on voit mal comment imposer une condition du type (3.15) par l'intermédiaire des données de Cauchy (w_0, s_0) à un temps t_0 fini.

Ayant résolu le problème de Cauchy à l'infini pour le système auxiliaire (2.15), on pourrait définir des opérateurs d'ondes pour ce système. On omet cette étape et on passe directement à la construction des opérateurs d'ondes pour le système initial (1.1). On part d'un état asymptotique $(u_+, A_+, \dot{A}_+)$ pour (u, A). On définit $w_+ = Fu_+$ et on définit (W, S) par (3.11) et B_0 par (2.2) (2.9). Sous les hypothèses des Propositions 3.1 et 3.2, on résoud le système (3.2) pour $(q, \sigma) \in \mathcal{C}(I, X^{k,\ell})$ avec $I = [T, \infty)$ et (q, σ) satisfaisant les estimations (3.5) (3.6) (3.8). Ceci fournit une solution $(w, s) = (W + q, S + \sigma) \in \mathcal{C}(I, X^{k,\ell})$ du système auxiliaire (2.15). Utilisant le fait que S et σ sont des gradients, on reconstruit facilement des phases ϕ et φ telles que $S = \nabla\phi$, $s = \nabla\varphi$, $\phi(1) = 0$ et telles que $\varphi - \phi$ tende vers zéro à l'infini dans le sens que $\sigma = \nabla(\varphi - \phi)$ satisfait (3.8). On définit enfin u par (2.8) et A par (2.1) (2.2) (2.3) avec $t_1 = \infty$. L'opérateur d'onde Ω est alors défini comme l'application $\Omega : (u_+, A_+, \dot{A}_+) \to (u, A)$ ainsi obtenue.

La régularité de u résultant de la construction précédente et du fait que $(w, s) \in$

$\mathcal{C}(I, X^{k,\ell})$ se traduit par le fait que $u \in \mathcal{X}^k(I)$ où

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^k(I) &= MD\, \mathcal{C}(I, H^k) = \left\{ u : D^* M^* u \in \mathcal{C}(I, H^k) \right\} \\ &= \left\{ u :< J(t) >^k \ u \in \mathcal{C}(I, L^2) \right\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

où

$$J(t) = x + it\nabla = i\ MD\ \nabla\ D^* M^* \tag{3.18}$$

est le générateur infinitésimal des transformations de Galilée. Enfin, il résulte de la Proposition 3.1 que (u, A) se comporte asymptotiquement comme $(MD \exp(-i\phi)W$, $A_0 + A_1^\infty(|DW|^2))$ au sens de la proposition suivante.

Proposition 3.3. *Soit $(u_+, A_+, \dot{A}_+) \in FH^{k_+} \oplus H^k \oplus H^{k-1}$. On suppose satisfaites les hypothèses des Propositions 3.1 et 3.2, avec w_+, W, S, ϕ, B_0 définis comme ci-dessus. Soit $(u, A) = \Omega(u_+, A_+, \dot{A}_+)$. Alors (u, A) satisfait les estimations suivantes pour tout $t \geq T$:*

$$\| u - MD \exp(-i\phi) W \|_2 \leq \ C\ t^{-\lambda_0}\ , \tag{3.19}$$

$$\| \, |J|^k \left(\exp(iD_0\phi) u - MDW \right) \|_2 \leq \ C\ t^{-\lambda}\ , \tag{3.20}$$

$$\| u - MD \exp(-i\phi) W \|_r \leq \ C\ t^{-\lambda_0 + (\lambda_0 - \lambda)\delta(r)/k} \tag{3.21}$$

pour $2 \leq r \leq \infty$, $\delta(r) = 3/2 - 3/r \leq k$, et avec A_2 défini par

$$A_2 = A - A_0 - A_1^\infty(|DW|^2)\ , \tag{3.22}$$

$$\| A_2 \|_2 \leq \ C\ t^{-\lambda_0 + 1/2}\ , \tag{3.23}$$

$$\| \nabla A_2 \|_2 \leq \ C\ t^{-\lambda_0 - 1/2}\ , \tag{3.24}$$

$$\| \omega^k \nabla A_2 \|_2 \leq \ C\ t^{-\lambda - k - 1/2} \tag{3.25}$$

pour $k > 3/2$, et des estimations analogues mais un peu plus compliquées pour $k \leq 3/2$.

Les estimations (3.19) (3.20) sont la traduction en termes de u des estimations (3.5) (3.6) (3.8) pour (q,σ), l'estimation (3.21) en résulte par une inégalité de Sobolev, et les estimations (3.23)-(3.25) sont des conséquences faciles de (3.5) (3.6). Noter en particulier que A contient asymptotiquement un terme $A_1^\infty(|DW|^2)$. Dans une première approximation où on remplace W par w_+ ce terme se réduit à

$$A_1^\infty(|Dw_+|^2) = t^{-1}\ D_0\ B_1^\infty(w_+,w_+)$$

et $B_1^\infty(w_+,w_+)$ est indépendant du temps. Ce terme s'étale par simple dilatation par t avec une décroissance en t^{-1} de la norme dans L^∞. Cette contribution ne peut en aucun sens raisonnable être considérée comme petite devant A_0.

References

[1] A. Bachelot : Problème de Cauchy pour des systèmes hyperboliques semi-linéaires, *Ann. IHP (Anal. non lin.)*, **1**, 453-478 (1984).

[2] J. Ginibre, T. Ozawa : Long range scattering for nonlinear Schrödinger and Hartree equations in space dimension $n \geq 2$, *Commun. Math. Phys.*, **151**, 619-645 (1993).

[3] J. Ginibre, G. Velo : Long range scattering and modified wave operators for some Hartree type equations I, *Rev. Math. Phys.*, **12**, 361-429 (2000).

[4] J. Ginibre, G. Velo : Long range scattering and modified wave operators for some Hartree type equations II, *Ann. H.P.*, **1**, 753-800 (2000).

[5] J. Ginibre, G. Velo : Long range scattering and modified wave operators for some Hartree type equations III, Gevrey spaces and low dimensions, *J. Diff. Eq.* **175**, 415-501 (2001).

[6] J. Ginibre, G. Velo : Long range scattering and modified wave operators for the Wave-Schrödinger system, *Ann. H.P.*, in press.

[7] J. Ginibre, G. Velo : Long range scattering and modified wave operators for the Maxwell-Schrödinger system, I The case of vanishing asymptotic magnetic field, Prétirage Orsay, juin 02.

[8] N. Hayashi, P. I. Naumkin : Scattering theory and large time asymptotics of solutions to Hartree type equations with a long range potential, preprint, 1997.

[9] N. Hayashi, P. I. Naumkin : Remarks on scattering theory and large time asymptotics of solutions to Hartree type equations with a long range potential, *SUT J. of Math.*, **34**, 13-24 (1998).

[10] N. Hayashi, T. Ozawa : Modified wave operators for the derivative nonlinear Schrödinger equation, *Math. Ann.*, **298**, 557-576 (1994).

[11] K. Nakanishi : Modified wave operators for the Hartree equation with data, image and convergence in the same space, *Commun. Pure Appl. Anal.*, in press.

[12] K. Nakanishi : Modified wave operators for the Hartree equation with data, image and convergence in the same space II, *Ann. HP*, in press.

[13] T. Ozawa : Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension, *Commun. Math. Phys.*, **139**, 479-493 (1991).

[14] T. Ozawa, Y. Tsutsumi : Asymptotic behaviour of solutions for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations, in Spectral and Scattering Theory and Applications, Adv. Stud. in Pure Math., Jap. Math. Soc., **23**, 295-305 (1994).

[15] Y. Tsutsumi : Global existence and asymptotic behaviour of solutions for the Maxwell-Schrödinger system in three space dimensions, *Commun. Math. Phys.*, **151**, 543-576 (1993).

J. Ginibre
Laboratoire de Physique Théorique*
Université de Paris XI, Bâtiment 210, F-91405 ORSAY Cedex, France

G. Velo
Dipartimento di Fisica, Università di Bologna
et INFN, Sezione di Bologna, Italie

*Unité Mixte de Recherche (CNRS) UMR 8627