SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2001-2002

Gerd Grubb

Conditions au bord spectrales et formules de trace

Séminaire É. D. P. (2001-2002), Exposé n° XV, 12 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2001-2002____A15_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

CONDITIONS AU BORD SPECTRALES ET FORMULES DE TRACE

Gerd Grubb

Copenhagen Univ. Math. Dept., Universitetsparken 5,
DK-2100 Copenhague, Danemark. E-mail grubb@math.ku.dk

English summary: The lecture presents current results on heat trace expansions, and the related resolvent trace and zeta function expansions, for elliptic operators with boundary conditions on n-dimensional compact manifolds. As a background, we recall the set-up of elliptic differential operators with differential boundary conditions having heat trace expansions in powers $\sum_{k\geq -n} c_k t^{k/m}$. Then we consider the spectral boundary conditions of Atiyah, Patodi and Singer for Dirac-type first-order operators, leading to expansions with additional logarithmic terms $\sum_{k\geq 0} c'_k t^{k/2}\log t$ (joint work with Seeley 1995); an extension to "well-posed" problems is included in a general study of pseudo-normal boundary conditions (1999). New results are presented on the vanishing or stability of the c'_k-coefficients; special features appear when n is odd. Finally, we study the pseudodifferential projection boundary conditions proposed by Vassilevich (2001) in string- and brane-theory, showing that they too have heat expansions with log-terms, under suitable hypotheses. In all cases, the lowest log-coefficient c'_0 vanishes, which assures that the zeta function is regular at 0.

1. Conditions au bord.

Considérons un opérateur différentiel elliptique P dans un fibré vectoriel E (C^∞ et de dimension N) sur une variété compacte X de dimension n et à bord $\partial X = X'$. Posons $E' = E|_{X'}$. On peut supposer qu'un voisinage de X' ait la forme $X_c = X' \times [0, c[$, que $E_c = E|_{X_c}$ soit le relèvement de E', et que $\partial_{x_n} = \partial/\partial x_n$ soit bien défini dans E_c. E est provenue d'une structure hermitienne et X d'une mesure (de la forme $dx = dx' dx_n$ sur X_c) qui permettent de définir les espaces de sections L_2 dans E et dans E', $L_2(E)$ et $L_2(E')$, ainsi que des espaces de Sobolev $H^s(E)$, etc. On définit $\gamma_j u = (\partial_{x_n}^j u)|_{X'}$.

Rappellons quelques conditions au bord pour P:

Exemple 1.1. Considérons $P = -\Delta I$, le Laplacien (scalaire) dans E par rapport à une structure Riemannienne sur X. On utilise par exemple une des conditions suivantes:

$$\gamma_0 u = 0, \ \text{(cond. de Dirichlet)} \tag{1.1}$$

$$\gamma_1 u = 0, \ \text{(cond. de Neumann)} \tag{1.2}$$

$$(\gamma_1 + B\gamma_0) u = 0, \ \text{(cond. de Neumann oblique)} \tag{1.3}$$

où B est un opérateur différentiel d'ordre 1 dans E'.

En général, on cherche des conditions au bord définies par des opérateurs de trace T tels que le problème

$$Pu = f \text{ dans } X, \quad Tu = \varphi \text{ sur } X', \tag{1.4}$$

admet une solution unique (modulo un espace de dimension finie) pour tout couple $\{f, \varphi\}$ donné dans C^∞ ou des espaces de Sobolev convenables (modulo un espace de dimension finie). Dans l'Exemple 1.1, γ_0 et γ_1 définissent de tels problèmes, et $\gamma_1 + B\gamma_0$ le fait sous des conditions supplémentaires sur B.

Plus généralement, on considère la situation suivante (comme par exemple dans Greiner [Gre71] et dans [G73], [G74]): Quand P est elliptique d'ordre m dans E, on pose

$$\varrho = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}\} \quad \text{(les données de Cauchy).} \tag{1.5}$$

On donne des fibrés $F_0, F_1, \dots, F_{m-1}$ sur X' de dimensions $M_j \geq 0$ et une matrice S d'opérateurs différentiels S_{jk} de E' dans F_j d'ordres $j - k$ pour $j, k \in \{0, \dots, m-1\}$, et on met

$$T = S\varrho, \tag{1.6}$$

$F = F_0 \oplus \cdots \oplus F_{m-1}$, $M = \sum_j M_j$. La matrice S a une forme triangulaire:

$$S = \begin{pmatrix} S_{00} & 0 & \dots & 0 \\ S_{10} & S_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m-1,0} & S_{m-1,1} & \dots & S_{m-1,m-1} \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

parce que les opérateurs différentiels d'ordre négatif sont nuls. Noter que $M_j = 0$ est permis (le fibré zéro). Un cas particulier est le cas où $F_j = E'$ pour $j \in J \subset \{0, \dots, m-1\}$, $F_j = 0$ pour $j \in \{0, \dots, m-1\} \setminus J$. Dans l'Exemple 1.1, $\{F_0, F_1\} = \{E', 0\}$ pour (1.1) et $\{0, E'\}$ pour (1.2) et (1.3).

Définition 1.2. *Soit P elliptique d'ordre m, et soient ϱ, S comme dans* (1.5)–(1.7). *Le système $\{P, S\varrho\}$ est appellé* **elliptique** *quand l'opérateur modèle formé des symboles principaux, $\{p^0(x', 0, \xi', D_{x_n}), s^0(x', \xi')\varrho\}$, est inversible de $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)^N$ dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)^N \times \mathbb{C}^M$ pour chaque $(x', \xi') \in T^*(X') \setminus 0$.*

Ici $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+) = r^+\mathcal{S}(\mathbb{R})$, la restriction à $\mathbb{R}_+$ de l'espace de Schwartz. Si $n \geq 3$ (et si $n = 2$ et P est "proprement elliptique"), il est nécessaire pour l'ellipticité que

$$M = mN/2, \tag{1.8}$$

une restriction non-triviale si on considère des opérateurs P d'ordre impair.

Il est bien connu que l'ellipticité assure la résolubilité de (1.4) (cf. (1.6)) modulo des espaces de dimension finie; on dit que $\{P, T\}$ est Fredholm.

On définit la *réalisation* P_T de P déterminée par T comme l'opérateur opérant comme P et de domaine

$$D(P_T) = \{u \in H^m(E) \mid Tu = 0\}. \tag{1.9}$$

L'ellipticité assure que P_T est Fredholm de $D(P_T)$ dans $L_2(E)$; son indice est défini par

$$\operatorname{ind} P = \dim Z(P_T) - \dim R(P_T)^\perp, \tag{1.10}$$

où $R(P_T)$ est l'image de P_T, et $Z(P_T)$ est le noyau

$$Z(P_T) = \{u \in D(P_T) \mid P_T u = 0\}. \tag{1.11}$$

Exemple 1.3. Considérons un opérateur $P = D$ elliptique d'ordre 1 allant d'un fibré E_1 à un autre E_2 sur X ($\dim E_1 = \dim E_2 = N$). Supposons en plus que D généralise l'opérateur de Dirac en étant de la forme suivante sur X_c:

$$D = \sigma(\partial_{x_n} + A_1), \quad A_1 = A + x_n A_{11}(x_n) + A_{10}(x_n), \tag{1.12}$$

où σ est un morphisme unitaire de E_1' à E_2', A est un opérateur elliptique d'ordre 1 auto-adjoint dans E_1' indépendant de x_n, et les A_{1j} sont des opérateurs dans E_1' d'ordre j dépendant de x_n. Le cas "produit" est le cas où les A_{1j} sont nuls.

Il n'est pas évident comment poser des conditions au bord pour avoir la résolubilité modulo des espaces de dimension finie. La condition de Dirichlet est trop restricitive. Si E_1' admet une décomposition globale $E_1' = F_0 \oplus F_0^\perp$ en fibrés de dimension $N/2$, il est possible que la condition de Dirichlet sur la partie de $\gamma_0 u$ dans F_0, plus précisement le choix $T = \operatorname{proj}_{F_0} \gamma_0$ allant de $C^\infty(X, E_1)$ dans $C^\infty(X', F_0)$, donne un problème elliptique au sens de la Définition 1.2. Mais il existe des cas où ceci n'est pas possible, un exemple simple est l'opérateur de Cauchy-Riemann $D = \begin{pmatrix} \partial_x & i\partial_y \\ -i\partial_y & \partial_x \end{pmatrix}$ sur $X \subset \mathbb{R}^2$.

S'il n'y a pas de conditions elliptiques au sens de la Définition 1.2, on peut au moins imposer la *condition spectrale* d'Atiyah-Patodi-Singer [APS75]

$$\Pi_\geq \gamma_0 u = 0, \tag{1.13}$$

où $\Pi_\geq$ désigne la projection orthogonale sur l'espace engendré par les vecteur-propres de A avec valeur-propre ≥ 0. La réalisation de D sous cette condition est appellée $D_\geq$. On trouve que $D_\geq$ est Fredholm de $D(D_\geq)$ à $L_2(E_2)$, mais $\{D, \Pi_\geq \gamma_0\}: C^\infty(E_1) \to C^\infty(E_2) \times C^\infty(E_1')$ n'est pas elliptique, puisque $\Pi_\geq \gamma_0$ est loin d'être surjectif. On peut dire qu'il est *injectivement elliptique* parce que l'opérateur formé des symboles principaux à X' est injectif.

R. Seeley [S69″] a clarifié la situation de cet exemple dans la définition suivante. Nous appellons projection pseudodifférentielle un opérateur Π qui est un opérateur pseudodifférentiel (o.ps.d.) classique d'ordre 0 et satisfait à $\Pi^2 = \Pi$.

Définition 1.4. *Soit D un opérateur différentiel elliptique d'ordre 1 de E_1 à E_2, et soit Π une projection pseudodifférentielle dans E_1'. La condition au bord $\Pi\gamma_0 u = 0$ est appellée* **bien posée** *pour D si en chaque $(x', \xi') \in T^*(X') \setminus 0$, le symbole principal $\pi^0(x', \xi')$ envoit $N_+(x', \xi')$ bijectivement sur $\pi^0(x', \xi')(\mathbb{C}^N)$, où $N_+(x', \xi')$ désigne le sous-espace de $\mathbb{C}^N$ parcouru par les valeurs au bord des solutions nulles dans le cas modèle:*

$$N_+(x', \xi') = \{\, z(0) \in \mathbb{C}^N \mid z(x_n) \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)^N,\ d^0(x', 0, \xi', D_{x_n}) z(x_n) = 0 \,\}. \tag{1.14}$$

Cette condition décrit les cas où le problème modèle *semi-homogène*

$$d^0(x', 0, \xi', D_{x_n}) u(x_n) = f(x_n) \text{ sur } \mathbb{R}_+, \quad \pi^0(x', \xi') u(0) = 0,$$

admet une solution unique dans $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)^N$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)^N$, $(x', \xi') \in T^*(X') \setminus 0$.

On dit aussi que Π est bien posé pour D. Dans ce cas, on trouve que la réalisation D_Π définie par la condition au bord $\Pi\gamma_0 u = 0$ est Fredholm (tandis que $\{D, \Pi\gamma_0\}$ est seulement injectivement elliptique). Un problème important est de montrer des formules d'indice pour D_Π (comme initié dans [APS75]).

Il existe toujours un choix bien posé pour D; c'est $\Pi = C^+$, la projection de Calderón (voir des détails par exemple dans [G99]); son symbole principal est une projection sur $N_+(x',\xi')$.

On peut toujours remplacer Π par une projection pseudodifférentielle orthogonale Π_{ort} définissant la même condition au bord.

2. Les trois familles d'opérateurs paramétrisés.

Sous des hypothèses convenables de parabolicité (que nous préciserons plus tard) on peut étudier, non seulement le problème (1.4) mais aussi le problème d'évolution

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + Pu(x,t) &= 0 \text{ sur } X\times\mathbb{R}_+,\\ Tu(x,t) &= 0 \text{ sur } X'\times\mathbb{R}_+,\\ u(x,0) &= u_0(x) \text{ sur } X, \end{aligned} \tag{2.1}$$

qui généralise le problème de la chaleur. L'opérateur de solution $e^{-tP_T}: u_0\mapsto u$ est appellé l'opérateur de la chaleur associé à $\{P,T\}$.

Cet opérateur a un intérêt aussi dans l'étude de certaines invariantes associées aux problèmes elliptiques. En effet, l'indice d'un opérateur de Fredholm $P'_{T'}$ satisfait à la formule

$$\operatorname{ind} P'_{T'} = \operatorname{Tr} e^{-tP'_{T'}{}^*P'_{T'}} - \operatorname{Tr} e^{-tP'_{T'}P'_{T'}{}^*}, \tag{2.2}$$

qui est souvent utilisée pour trouver l'indice.

C'est classique et bien connu comment la trace de e^{-tP_T}, dans le cas où (2.1) consiste d'opérateurs différentiels et est parabolique, admet un développement asymptotique pour $t\to 0+$:

$$\operatorname{Tr} e^{-tP_T} \sim \sum_{-n\le k<\infty} c_k t^{\frac{k}{m}}. \tag{2.3}$$

En particulier, pour $P_T = P'_{T'}{}^*P'_{T'}$ ou $P'_{T'}P'_{T'}{}^*$, les deux développements (2.3) ont les mêmes coefficients pour $k\neq 0$, et la formule (2.2) prend la forme

$$\operatorname{ind} P'_{T'} = c_0(P'_{T'}{}^*P'_{T'}) - c_0(P'_{T'}P'_{T'}{}^*). \tag{2.4}$$

Mais aussi les autres coefficients dans (2.3) ont un intérêt, en représentant de l'information géométrique; voir e.g. McKean-Singer [MS67] et les travaux de Gilkey (par exemple [Gi95]) et d'autres auteurs.

On s'interesse aussi à deux autres familles parametrisées d'opérateurs associés à P_T: la résolvante $(P_T-\lambda)^{-1}$ et les puissances complexes P_T^{-s} (paramétrisés par λ resp. s dans $\mathbb{C}$); les trois familles sont reliées par des formules de transition (voir par exemple [GS96] ou [G97] pour des détails):

$$\begin{aligned} P_T^{-s} &= \tfrac{1}{(s-1)\cdots(s-r)}\tfrac{i}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} \lambda^{r-s}\partial_\lambda^r(P_T-\lambda)^{-1}\,d\lambda = \tfrac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}e^{-tP_T}\,dt,\\ e^{-tP_T} &= t^{-r}\tfrac{i}{2\pi}\int_{\mathcal{C}'} e^{-t\lambda}\partial_\lambda^r(P_T-\lambda)^{-1}\,d\lambda = \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}s=c} t^{-s}\Gamma(s)P_T^{-s}\,ds. \end{aligned} \tag{2.5}$$

(Quand $Z(P_T) \neq 0$, les formules sont légèrement modifiées.) Remarquons que

$$\partial_\lambda^r (P_T - \lambda)^{-1} = r!(P_T - \lambda)^{-r-1}, \tag{2.6}$$

qui est d'ordre $-(r+1)m$, donc de classe de trace quand $(r+1)m > n$. La dérivation en λ est incluse dans (2.5) pour avoir des transitions pareilles pour les traces. En effet, le développement de trace (2.3) correspond à des développements de trace de la résolvante et la puissance complexe (dans le Théorème 2.4 plus loin on décrira un cas un peu plus compliqué). L'étude de ces développements a été initié par Minakshisundaram-Pleijel [MP49]; ils sont démontrés dans la géneralité de (1.5)–(1.7) par Greiner [Gre71], et pour des opérateurs matriciels par Seeley [S69], [S69′].

Pour construire e^{-tP_T} par des méthodes de calcul symbolique, il est utile de commencer par la résolvante $(P_T - \lambda)^{-1}$ parce que, si on remplace $-\lambda$ par μ^m, alors μ joue le rôle d'une variable cotangente, et on peut se servir de la théorie elliptique en $n+1$ variables (observation d'Agmon). Rappellons la définition d'ellipticité avec paramètre, et parabolicité, pour les problèmes différentiels:

Définition 2.1. *Soient P, ϱ et S comme dans la Définition* 1.2.

(i) $\{P + \mu^m, S\varrho\}$ *est appellée* **elliptique avec paramètre** *dans un secteur ouvert* Γ *de* $\mathbb{C}$ *quand* $p^0(x,\xi) + \mu^m$ *est inversible pour chaque* $(x,\xi,\mu) \in T^*(X) \times (\Gamma \cup \{0\})$ *avec* $(\xi,\mu) \neq (0,0)$, *et l'opérateur modèle* $\{p^0(x',0,\xi',D_{x_n}) + \mu^m, s^0(x',\xi')\varrho\}$ *est bijectif de* $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)^N$ *sur* $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+)^N \times \mathbb{C}^M$ *pour chaque* $(x',\xi',\mu) \in T^*(X') \times (\Gamma \cup \{0\})$ *avec* $(\xi',\mu) \neq (0,0)$.

(ii) *Le problême* (2.1) *est* **parabolique** *si* (i) *est vrai avec* $\Gamma \supset \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |\arg z| \leq \frac{\pi}{2m}\}$.

Quand (i) a lieu, la résolvante existe et est $O(|\lambda|^{-1})$ pour $\lambda = -\mu^m$, μ sur un rayon de Γ avec $|\mu|$ suffisamment grand. L'opérateur de la chaleur existe quand (ii) a lieu.

Soulignons que dans la Définition 2.1, l'opérateur modèle est considéré aussi pour $\xi' = 0$, où le symbole principal de S prend la forme

$$s^0(x',0) = \begin{pmatrix} s_{00}(x') & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_{11}(x') & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_{m-1,m-1}(x') \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Pour satisfaire à la définition, les morphismes $S_{jj} = s_{jj}$ doivent nécessairement être *surjectifs*, i.e., l'opérateur de trace être normal:

Definition 2.2. *L'opérateur de trace $S\varrho$ considéré dans la Définition* 1.2 *est appellé* **normal** *quand les morphismes $S_{jj}\colon E' \to F_j$ sont surjectifs pour $j = 0, \dots, m-1$.*

Considérons maintenant des problèmes où il entre des o.ps.d. dans la condition au bord. Par exemple, pour $D_\geq$ décrit dans l'Exemple 1.3, on veut bien utiliser des formules comme (2.2) et (2.4) pour étudier l'indice, mais il est beaucoup moins facile de construire et analyser l'opérateur de la chaleur $e^{-tD_\geq^* D_\geq}$ (et la résolvante $(D_\geq^* D_\geq - \lambda)^{-1}$ et la puissance complexe $(D_\geq^* D_\geq)^{-s}$). Dans [APS75] (concernant le cas "produit") ils font une analyse astucieuse qui évite justement de montrer des développements de trace de $e^{-tD_\geq^* D_\geq}$ et $e^{-tD_\geq D_\geq^*}$ séparément, mais fait référence aux développements associés à l'extension de D à la variété double (sans bord).

Le problème de décrire $\operatorname{Tr} e^{-tD^*_{\geq} D_{\geq}}$ (aussi dans des cas non-produits) a été résolu partiellement dans [G92] qui montre un développement jusqu'au terme c_0 avec reste $O(t^{3/8})$, et c'est complètement résolu dans [GS95], [GS96] (collaboration avec Seeley), montrant

$$\operatorname{Tr} e^{-tD^*_{\geq} D_{\geq}} \sim \sum_{-n \leq k \leq 0} c_k t^{\frac{k}{2}} + \sum_{k \geq 1} (c'_k \log t + c''_k) t^{\frac{k}{2}}, \tag{2.8}$$

où on voit apparaître des termes logarithmiques. Pour démontrer ce résultat on a introduit (dans [GS95]) un nouveau calcul de symboles paramétrisés — les symboles *faiblement polyhomogènes*, avec un choix particulier de conditions supplémentaires là où la homogénité en (ξ, μ) n'est pas valable d'une manière lisse. Les mots "fortement polyhomogène" sont réservés au cas où il y a homogénité de termes C^∞ en (ξ, μ) sans restrictions.

On peut traiter ce problème, et aussi des conditions au bord bien posées, dans le cadre d'un calcul géneral qui fait entrer les conditions au bord pseudo-normales:

Definition 2.3. *Soit S une matrice triangulaire comme dans* (1.7)*, mais où les S_{jk} sont des opérateurs* **pseudodifférentiels** *d'ordre $j-k$ allant de E' dans F_j. L'opérateur de trace $S\varrho$ est appellé* **pseudo-normal***, quand les S_{jj} sont surjectifs, $j = 0, \dots, m-1$.*

Dans [G99] nous avons montré:

Théorème 2.4. *Soient P et ϱ comme dans la Définition* 1.2 *et soit $T = S\varrho$ un opérateur de trace pseudo-normal. Supposons qu'il existe un secteur ouvert Σ de $\mathbb{C}$ tel que* (1) *et* (2) *ont lieu:*

(1) *Pour tout sous-secteur relativement fermé $\Sigma' \subset \Sigma$, $p^0(x, \xi) - \lambda$ est inversible avec une estimation $O((|\xi|^m + |\lambda|)^{-1})$ de l'inverse quand $(x, \xi, \lambda) \in T^*(X) \times \Sigma'$.*

(2) *$\{P, T\}$ est elliptique, et pour tout Σ' comme dans* (1)*, $P_T - \lambda$ est inversible pour $\lambda \in \Sigma'$ avec $|\lambda|$ suffisamment grand, la norme L_2 de $(P_T - \lambda)^{-1}$ étant $O(|\lambda|^{-1})$.*

Sous ces hypothèses on a un développement asymptotique de la trace de $\partial^r_\lambda (P_T - \lambda)^{-1}$ quand $(r+1)m > n$:

$$\operatorname{Tr} \partial^r_\lambda (P_T - \lambda)^{-1} \sim \sum_{k \geq -n} \tilde{c}_k (-\lambda)^{-\frac{k}{m} - r - 1} + \sum_{l \geq 0} (\tilde{c}'_l \log(-\lambda) + \tilde{c}''_l)(-\lambda)^{-\frac{l}{m} - r - 1}, \tag{2.9}$$

pour $\lambda \to \infty$ dans Σ. On a aussi une extension méromorphe de la fonction zeta $\zeta(P_T, s) = \operatorname{Tr} P_T^{-s}$ avec la structure des pôles décrite par:

$$\Gamma(s) \operatorname{Tr} P_T^{-s} \sim \sum_{k \geq -n} \frac{c_k}{s + \frac{k}{m}} - \frac{\dim Z(P_T)}{s} + \sum_{l \geq 0} \Big(\frac{-c'_l}{(s + \frac{l}{m})^2} + \frac{c''_l}{s + \frac{l}{m}} \Big). \tag{2.10}$$

Si le secteur $\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \arg \lambda \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]\}$ est contenu dans Σ, on a le développement asymptotique de la trace de la chaleur:

$$\operatorname{Tr} e^{-tP_T} \sim \sum_{k \geq -n} c_k t^{\frac{k}{m}} + \sum_{l \geq 0} (c'_l \log t + c''_l) t^{\frac{l}{m}}. \tag{2.11}$$

Les coefficients c_k, c'_k, c''_k sont reliés aux $\tilde{c}_k, \tilde{c}'_k, \tilde{c}''_k$ par des facteurs de proportionalité universels. Les coefficients $\tilde{c}_k$, $\tilde{c}'_k$, c_k, c'_k sont déterminés par les termes homogènes dans les symboles (sont "locaux").

Le terme avec $\dim Z(P_T)$ (cf. (1.11)) entre dans (2.10) parce qu'on définit P_T^{-s} comme 0 sur $Z(P_T)$.

La difficulté dans ce résultat réside dans le fait que les termes dans les symboles ne sont pas parfaitement homogènes en $(\xi, \lambda^{\frac{1}{m}})$; on a besoin de travailler dans le calcul faiblement polyhomogène. L'étude dans [G99] démontre non seulement le Théoreme 2.4, mais décrit aussi la structure des opérateurs comme des compositions d'opérateurs fortement polyhomogènes dans l'intérieur avec des o.ps.d. faiblement polyhomogènes sur le bord.

Ce théorème s'applique aux problèmes de premier ordre bien posés, de la manière suivante: Soient D et Π comme dans la Définition 1.4 et soit D_Π la réalisation définie par la condition au bord $\Pi\gamma_0 u = 0$. Comme déja remarqué, on peut supposer que $\Pi = \Pi^*$. Sur X_c, on peut toujours écrire D de la forme

$$D = \sigma(x_n)(\partial_{x_n} + A_1(x_n)), \tag{2.12}$$

où, pour chaque x_n, $\sigma(x_n)$ est un homéomorphisme de E_1' sur E_2' et $A_1(x_n)$ est elliptique de E_1' à E_2'. On a la formule de Green

$$(Du, v)_{E_2} - (u, D^*v)_{E_1} = -(\sigma(0)\gamma_0 u, \gamma_0 v)_{E_2'},$$

qui permet de démontrer que l'adjoint de D_Π est $(D_\Pi)^* = (D^*)_{\Pi_1}$, où $\Pi_1 = \sigma(0)(I - \Pi)\sigma^*(0)$. On considère alors les opérateurs $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_\mathcal{T}$ dans $E = E_1 \oplus E_2$ définis par:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & -D^* \\ D & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & -D_\Pi{}^* \\ D_\Pi & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Ici $\mathcal{D}_\mathcal{T}$ est la réalisation de $\mathcal{D}$ déterminée par la condition au bord

$$S_{00}\gamma_0 u = 0, \text{ avec } S_{00} = \begin{pmatrix} \Pi & (I - \Pi)\sigma^*(0) \end{pmatrix} : \begin{matrix} C^\infty(E_1') \\ \oplus \\ C^\infty(E_2') \end{matrix} \to C^\infty(E_1'). \tag{2.14}$$

L'opérateur $\mathcal{D}_\mathcal{T}$ est anti-auto-adjoint, donc la résolvante $\mathcal{R}_\mu = (\mathcal{D}_\mathcal{T} + \mu)^{-1}$ existe pour $\mu \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$ et est $O(|\mu|^{-1})$ sur les rayons là. On verifie facilement:

$$\mathcal{R}_\mu = (\mathcal{D}_\mathcal{T} + \mu)^{-1} = \begin{pmatrix} \mu(D_\Pi{}^* D_\Pi + \mu^2)^{-1} & D_\Pi{}^*(D_\Pi D_\Pi{}^* + \mu^2)^{-1} \\ -D_\Pi(D_\Pi{}^* D_\Pi + \mu^2)^{-1} & \mu(D_\Pi D_\Pi{}^* + \mu^2)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

De cette expression on peut retirer la résolvante $R_\lambda = (D_\Pi{}^* D_\Pi - \lambda)^{-1}$ que nous cherchons, par la formule

$$R_{-\mu^2} = \mu^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{R}_\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu^{-1}\mathcal{R}_{\mu,11}, \quad \lambda = -\mu^2. \tag{2.16}$$

Le système $\{\mathcal{D}, \mathcal{T}\}$ satisfait aux hypothèses du Théorème 2.4 avec $F_0 = E_1'$; notons en particulier que S_{00} est surjectif. Donc la trace de $\partial_\mu^r(\mathcal{D}_\mathcal{T} + \mu)^{-1}$ a un développement comme dans (2.9) avec $m = 1$. Pour obtenir la meilleure information sur $\partial_\lambda^r R_\lambda$ il est préferable de passer par les puissances R_λ^{r+1} (voir (2.6)) qu'on peut calculer directement de (2.16) en utilisant des règles de composition. Il en résulte:

Corollaire 2.5. *On a pour* ${D_\Pi}^*D_\Pi$ *(et également pour* $D_\Pi {D_\Pi}^*$*) des développements de traces (où* $\lambda \to \infty$ *sur les rayons de* $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}}_+$*):*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Tr} \partial_\lambda^r ({D_\Pi}^* D_\Pi - \lambda)^{-1} &\sim \sum_{k \geq -n} \tilde{a}_k (-\lambda)^{-\frac{k}{2}-r-1} + \sum_{l \geq 0} (\tilde{a}'_l \log(-\lambda) + \tilde{a}''_l)(-\lambda)^{-\frac{l}{2}-r-1}, \\
\Gamma(s) \operatorname{Tr}({D_\Pi}^* D_\Pi)^{-s} &\sim \sum_{k \geq -n} \frac{a_k}{s + \frac{k}{2}} - \frac{\dim Z(D_\Pi)}{s} + \sum_{l \geq 0} \Big(\frac{-a'_l}{(s+\frac{l}{2})^2} + \frac{a''_l}{s + \frac{l}{2}} \Big), \\
\operatorname{Tr} e^{-t{D_\Pi}^* D_\Pi} &\sim \sum_{k \geq -n} a_k t^{\frac{k}{2}} + \sum_{l \geq 0} (a'_l \log t + a''_l) t^{\frac{l}{2}}.
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Une idée fondamentale dans toutes ces études est “la réduction au bord”: Si l’opérateur en considération est de la forme $G(\lambda) = K(\lambda)S(\lambda)T(\lambda)$, où $K(\lambda)$ est un opérateur de Poisson (dans le calcul de Boutet de Monvel [BM71]) allant de X' en X, $T(\lambda)$ est un opérateur de trace allant de X en X', et $S(\lambda)$ est un o.ps.d. sur X', alors

$$
\operatorname{Tr}_X G(\lambda) = \operatorname{Tr}_X K(\lambda)S(\lambda)T(\lambda) = \operatorname{Tr}_{X'} S(\lambda)T(\lambda)K(\lambda) = \operatorname{Tr}_{X'} S'(\lambda), \tag{2.18}
$$

où $S'(\lambda) = S(\lambda)T(\lambda)K(\lambda)$ est un o.ps.d. sur X'. Donc il suffit d’avoir une analyse des formules de trace pour les opérateurs sur la variété sans bord X'.

Mais, compte-tenu du fait que tous les opérateurs ne sont pas des produits simples, et que les calculs peuvent devenir assez compliqués, nous avons trouvé utile de développer une théorie systématique d’opérateurs pseudodifférentiels au bord (généralisant [BM71]) dépendant d’un paramètre de la manière spéciale rencontré ci-dessus. C’est publié dans [G01].

3. Les coefficients des logarithmes.

Dans (2.17) on peut absorber les termes avec a_k, $k > 0$, dans les a''_k, obtenant par exemple

$$
\operatorname{Tr} e^{-t{D_\Pi}^* D_\Pi} \sim \sum_{-n \leq k < 0} a_k t^{\frac{k}{2}} + \sum_{k \geq 0} (a'_k \log t + a''_k) t^{\frac{k}{2}} \tag{3.1}
$$

(où les a''_k ont changé de valeur). Remarquons qu’il reste une différence entre (3.1) et (2.8): la présence du terme $a'_0 \log t$. Dans les applications en physique théorique c’est important de savoir si ce terme est présent ou non. En plus, on peut demander si les autres termes logarithmiques sont nécessairement là.

Voici quelques résultats pour le cas où D est comme dans l’Exemple 1.3:

Résultat 3.1. Dans le cas produit de la réalisation $D_\geq$, $a'_0 = 0$ ([G92]), et on a des formules explicites pour tous les coefficients, les reliant aux fonctions zeta et eta de A, [GS96]. Il résulte en particulier que tous les coefficients a'_k sont nuls si n est impair, et que les coefficients a'_{2j} avec $j \geq 0$ sont nuls si n est pair. Les autres coefficients sont non-nuls en géneral, [GG98].

Résultat 3.2. Dans le cas non-produit de la réalisation $D_\geq$, il est montré dans [G92] (voir aussi [GS95]) que $a'_0 = 0$. [G01′] montre que c’est encore vrai si $\Pi_\geq$ est perturbé par un o.ps.d. de degré $\leq -n$.

Le fait que $a_0' = 0$ assure que la fonction zeta $\zeta(D_{\geq}{}^*D_{\geq}, s) = \mathrm{Tr}(D_{\geq}{}^*D_{\geq})^{-s}$ est régulière en 0, voir (2.17).

Les premiers quatre coefficients a_k avec $k < 0$ one été analysés par Gilkey et al. [DGK99], [GK02], dans des cas d'opérateurs géométriques. Il y a peu de résultats sur les autres coefficients a_k' des termes logarithmiques. Recemment, nous avons étudié leur stabilité sous des perturbations:

Résultat 3.3. Si on perturbe la projection Π par un o.ps.d. d'ordre $J \leq -n$, alors les a_k' avec $k \leq J - n$ sont préservés, [G01′].

Résultat 3.4. Si on perturbe D par un opérateur $x_n^l P$ tangentiel d'ordre 1 ($l \geq 0$) en gardant la condition au bord $\Pi\gamma_0 u = 0$, alors pour $k \leq l$, les a_k' sont préservés, et les a_k'' sont perturbés par des termes locaux, [G02].

En particulier, le coefficient a_1' est stable si on remplace D par D_1 avec $D = D_1$ sur X'. Pour n pair, ce coefficient est génériquement non-nul, proportional au coefficient de $t^{\frac{1}{2}}$ dans la formule de trace pour e^{-tA^2}.

Nous avons aussi étudié des perturbations avec une certaine commutativité:

Résultat 3.5. Dans le cas produit de $D_{\geq}$, si on perturbe D par un terme $P_0 + \sum_{k\geq 1} x_n^k P_{1k}$ (P_0 d'ordre 0 et les P_{1k} tangentiels d'ordre 1), où P_0 et les P_{1k} *commutent avec* A, alors tous les a_k' sont nuls si n est impair, [G02].

Encore un résultat sur les problèmes bien posés est mentionné plus bas (dans le Corollaire 4.3).

On peut avoir l'impression, après ces résultats, que les termes logarithmiques sont à combattre à tout prix. Mais il existe aussi des situations où un tel terme est le plus important:

Wodzicki a introduit dans sa thèse [W84] (voir aussi [W84′]) une fonctionelle $\mathrm{res}(A)$ sur les o.ps.d. classiques d'ordre entier sur une variété compacte Y sans bord, telle que $\mathrm{res}([A, B]) = 0$ pour tout A, B (c'est une trace). C'est appellée *le résidu non-commutatif*, et c'est proportionnel au coefficient a_0' dans un développement asymptotique comme dans (3.1) pour $\mathrm{Tr}(Ae^{-tQ})$, $Q = -\Delta$ sur Y.

Fedosov, Golse, Leichtnam et Schrohe [FGLS96] ont généralisé l'idée au cas des variétés à bord, en définissant une trace sur l'algèbre d'opérateurs $\mathcal{A}$ dans le calcul de Boutet de Monvel opérant de $C^\infty(X, E) \oplus C^\infty(X', F)$ dans lui-même.

Dans un travail avec Schrohe [GSc01], nous avons montré comment cette fonctionnelle de trace est proportionnelle au premier coefficient logarithmique dans un développement asymptotique de $\mathrm{Tr}(\mathcal{A}e^{-t\mathcal{Q}})$, où $e^{-t\mathcal{Q}}$ est un opérateur de chaleur auxiliaire ($e^{-t\mathcal{Q}}$ est diagonal, formé des opérateurs de chaleur du problème de Dirichlet pour le Laplacien et d'un opérateur elliptique sur le bord).

Cette dernière étude est fondée sur des calculations assez différentes de celles de [G01].

4. Conditions spectrales dans la théorie des "branes".

Dans le traitement de $D_\Pi{}^* D_\Pi$ ci-dessus nous avons évité de considérer directement la réalisation de D^*D que cet opérateur représente. C'est défini par la condition au bord

$$\Pi\gamma_0 u = 0, \quad (I - \Pi)\sigma^*(0)\gamma_0 Du = 0, \tag{4.1}$$

où la deuxième équation, grâce à (2.12), peut s'écrire

$$(I-\Pi)(\gamma_1 + A_1(0)\gamma_0)u = 0. \tag{4.2}$$

Cependant, il paraît qu'on a besoin de considérer des conditions de ce genre en physique théorique. Dans l'article [V01] et l'exposé [V02] sur les "branes" dans la théorie des cordes, Vassilevich a proposé d'étudier des conditions au bord

$$\Pi\gamma_0 u = 0, \quad (I-\Pi)(\gamma_1 u + B\gamma_0 u) = 0, \tag{4.3}$$

pour une version du Laplacien entrant dans cette théorie; nous l'appellons P. Ici, on a mis une condition de Dirichlet sur une certaine partie de la fonction au bord, et une condition de Neumann oblique sur une autre partie, et il semble être intéressant d'effectuer cette partition a l'aide d'une projection spectrale. Nous allons dire qu'une projection pseudodifférentielle Π est une *projection spectrale* si

$$\Pi = \Pi_>(C) + \mathcal{S}, \tag{4.4}$$

où C est un opérateur pseudodifférentiel elliptique auto-adjoint d'ordre 1 dans E' et $\mathcal{S}$ est d'ordre $-\infty$. On peut en effet montrer que toute projection orthogonale pseudodifférentielle peut s'écrire sous cette forme. Posons

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \Pi, \quad \Pi_2 = I-\Pi, \\ T &= \{\Pi_1\gamma_0, \Pi_2(\gamma_1 + B\gamma_0)\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Vassilievich discute le problème de trouver un opérateur de type Dirac D comme dans l'Exemple 1.3 tel que $P = D^*D$ (une sorte de "racine carrée"), dont on peut tirer A et définir la condition (4.3) en mettant Π égal à $\Pi_\geq(A) + \mathcal{S}$ ou $\Pi_<(A) + \mathcal{S}$. Il pose comme problème ouvert de construire l'opérateur de la chaleur associé et son développement de trace, surtout avec des choix de B dans (4.3) pour lesquels la réalisation P_T n'est pas auto-adjointe.

Nous avons analysé (récemment, dans [G02′]) les conditions au bord $Tu = 0$ (4.5) du point de vue de notre calcul faiblement polyhomogène, et nous avons trouvé qu'on n'a pas besoin d'une factorisation $P = D^*D$ (même pas près de X') pour pouvoir définir des réalisations ayant une résolvante ou un opérateur de la chaleur avec un développement asymptotique du genre trouvé ci-dessus. Plus précisement on a, en notant par Σ_θ le secteur

$$\Sigma_\theta = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid |\pi - \arg\lambda| < \theta \,\},$$

le résultat suivant:

Théorème 4.1. *Soit P un opérateur différentiel elliptique dans E, de la forme*

$$P = -\partial_{x_n}^2 + P' + x_n P_2 + P_1 \ \textit{sur}\ X_c, \tag{4.6}$$

où P' est un opérateur elliptique auto-adjoint nonnégatif d'ordre deux dans E' indépendant de x_n, et les P_j sont d'ordre j et dépendent de x_n. Soit Π_1 une projection pseudodifférentielle dans E' et B un opérateur différentiel ou pseudodifférentiel d'ordre 1 dans E', et définissons P_T par la condition au bord $Tu = 0$ (4.5). Supposons que (a) *et* (b) *ont lieu:*

(a) *Les symboles principaux de* Π_1 *et* P' *commutent.*
(b) *Il existe* $\theta \in]0,\pi]$ *tel que les symbols principaux strictement homogènes vérifient:*

$$(4.7)\quad (p'^h(x',\xi')-\lambda)^{\frac12} - \pi_2^h(x',\xi')b^h(x',\xi')\pi_2^h(x',\xi') \quad \text{est inversible pour } (\xi',\lambda)\in(\mathbb{R}^n\times\Sigma_\theta)\setminus\{(0,0)\}.$$

Alors la résolvante $(P_T-\lambda)^{-1}$ *existe pour* $\lambda\in\Sigma_\theta$ *avec* $|\lambda|$ *grand (dépendant de l'argument), et on a des développements de trace:*

$$(4.8)\quad \begin{aligned} \operatorname{Tr}\partial_\lambda^r(P_T-\lambda)^{-1} &\sim \sum_{-n\le k<0}\tilde c_k(-\lambda)^{-\frac k2-r-1}+\sum_{k\ge 0}(\tilde c_l'\log(-\lambda)+\tilde c_k'')(-\lambda)^{-\frac k2-r-1},\\ \Gamma(s)\operatorname{Tr}P_T^{-s} &\sim \sum_{-n\le k<0}\frac{c_k}{s+\frac k2}-\frac{\dim Z(P_T)}{s}+\sum_{k\ge 0}\Big(\frac{-c_k'}{(s+\frac k2)^2}+\frac{c_k''}{s+\frac k2}\Big).\end{aligned}$$

En plus, si $\theta>\frac{\pi}{2}$, *l'opérateur de la chaleur est bien défini et sa trace a le développement asymptotique:*

$$(4.9)\qquad \operatorname{Tr}e^{-tP_T}\sim\sum_{-n\le k<0}c_kt^{\frac k2}+\sum_{k\ge 0}(c_k'\log t+c_k'')t^{\frac k2}.$$

La condition (a) est certainement vérifiée si Π_1 est une projection spectrale commutant avec P', mais elle est aussi verifiée simplement si le symbole principal de P' est scalaire. La condition (b) est vérifiée avec $\theta=\pi$ si b^h est anti-symétrique (propriété naturelle des opérateurs de premier ordre) et Π_1 est une projection orthogonale. Mais la condition (4.7) permet aussi à b^h d'avoir un spectre hors de $i\mathbb{R}$.

Ici on pose aussi la question de savoir si $c_0'=0$ (tel que la fonction zeta $\zeta(P_T,s)=\operatorname{Tr}P_T^{-s}$ est régulière à $s=0$). Nous avons trouvé:

Théorème 4.2. *Hypothèses comme dans le Théorème* 4.1.
Le coefficient c_0' *(égal à* $-\tilde c_0'$*) ne dépend pas de* B*; en effet,* $c_0'=\frac12\operatorname{res}(\Pi_2)$ *(le résidu non-commutatif).*
Il resulte que $c_0'=0$.

Pour la dernière conclusion, on utilise le résultat de Wodzicki (voir [W84′]): Pour toute projection pseudodifférentielle, le résidu non-commutatif est égal a zéro.

Il résulte en particulier:

Corollaire 4.3. *Pour toute réalisation* D_Π *bien posée d'un opérateur elliptique d'ordre* 1 *(cf. Définition* 1.4*),* $\tilde a_0'=a_0'=0$ *dans* (2.17) *et* (3.1).

Dans [G02′] nous donnons aussi une analyse de a_0'', et de la fonction eta associée à D_Π, montrant qu'elle est régulière en zéro dans des cas "produits" auto-adjoints où Π est une perturbation de $\Pi_>(A)$ par un opérateur d'ordre $\le -n$.

References

[APS75] M. F. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry, I*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), 43–69.

[BM71] L. Boutet de Monvel, *Boundary problems for pseudo-differential operators*, Acta Math. **126** (1971), 11–51.

[DGK99] J. S. Dowker, P. B. Gilkey and K. Kirsten, *Heat asymptotics with spectral boundary conditions*, AMS Contemporary Math. **242** (1999), 107–124.

[FGLS96] B. V. Fedosov, F. Golse, E. Leichtnam, E. Schrohe, *The noncommutative residue for manifolds with boundary*, J. Funct. Anal. **142** (1996), 1–31.

[Gi95] P. B. Gilkey, *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah–Singer Index Theorem*, CRC Press, Boca Raton, 1995.

[GG98] P. B. Gilkey and G. Grubb, *Logarithmic terms in asymptotic expansions of heat operator traces*, Comm. Part. Diff. Eq. **23** (1998), 777-792.

[GK02] P. B. Gilkey and K. Kirsten, *Heat asymptotics with spectral boundary conditions II*, preprint.

[Gre71] P. Greiner, *An asymptotic expansion for the heat equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **41** (1971), 163–218.

[G73] G. Grubb, *Weakly semibounded boundary problems and sesquilinear forms*, Ann. Inst. Fourier **23** (1973), 145–194.

[G74] ———, *Properties of normal boundary problems for elliptic even-order systems*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. IV **1** (1974), 1–61.

[G96] ———, *Functional Calculus of Pseudodifferential Boundary Problems, Second Edition*, Progress in Mathematics, vol. 65, Birkhäuser, Boston, 1996, 522 pp.

[G97] ———, *Parametrized pseudodifferential operators and geometric invariants*, Microlocal Analysis and Spectral Theory (l. Rodino, ed.), Kluwer, Dordrecht, 1997, pp. 115–164.

[G99] ———, *Trace expansions for pseudodifferential boundary problems for Dirac-type operators and more general systems*, Arkiv f. Mat. **37** (1999), 45–86.

[G01] ———, *A weakly polyhomogeneous calculus for pseudodifferential boundary problems*, J. Functional An. **184** (2001), 19–76.

[G01′] ———, *Poles of zeta and eta functions for perturbations of the Atiyah-Patodi-Singer problem*, Comm. Math. Phys. **215** (2001), 583–589.

[G02] ———, *Logarithmic terms in trace expansions of Atiyah-Patodi-Singer problems*, preprint.

[G02′] ———, *Spectral boundary conditions for second-order elliptic operators*, preprint.

[GSc01] G. Grubb and E. Schrohe, *Trace expansions and the noncommutative residue for manifolds with boundary*, J. Reine Angew. Math. (Crelle's Journal) **536** (2001), 167–207.

[GS95] G. Grubb and R. Seeley, *Weakly parametric pseudodifferential operators and Atiyah-Patodi-Singer boundary problems*, Inventiones Math. **121** (1995), 481–529.

[GS96] ———, *Zeta and eta functions for Atiyah-Patodi-Singer operators*, Journal of Geometric Analysis **6** (1996), 31–77.

[MS67] H.P. McKean and I.M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Diff. Geom. **1** (1967), 43–69.

[MP49] S. Minakshisundaram and Å. Pleijel, *Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds*, Canad. J. Math. **1** (1949), 242–256.

[S69] R. T. Seeley, *The resolvent of an elliptic boundary problem*, Amer. J. Math. **91** (1969), 889–920.

[S69′] ———, *Analytic extension of the trace associated with elliptic boundary problems*, Amer. J. Math. **91** (1969), 963–983.

[S69″] ———, *Topics in Pseudo-Differential Operators*, C.I.M.E. Conf. on Pseudo-Differential Operators, Edizioni Cremonese, Roma (1969), 169–305.

[V01] D. Vassilevich, *Spectral branes*, J. High Energy Phys. **0103** (2001), 023.

[V02] ———, *Spectral geometry for strings and branes*, Nuclear Physics B (Proc. Suppl.) **104** (2002), 208–211.

[W84] M. Wodzicki, *Spectral asymmetry and noncommutative residue*, (in Russian), Thesis, Steklov Institute of Mathematics, Moscow 1984.

[W84′] M. Wodzicki, *Local invariants of spectral asymmetry*, Inventiones Math. **75** (1984), 143-178.