Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2001-2002

Sandro Graffi

Méthodes KAM pour les opérateurs de Schrödinger non autonomes

Séminaire É. D. P. (2001-2002), Exposé n° XIV, 19 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2001-2002____A14_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Méthodes KAM pour les opérateurs de Schrödinger non autonomes

Sandro Graffi

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Piazza di Porta S Donato 5, 40127 Bologna, Italy.

email: graffi@dm.unibo.it

Résumé

On élimine par la méthode KAM la dépendance temporelle dans une classe d'équations différentielles linéaires en ℓ^2 avec dépendance quasi-périodique et non bornée du temps. Ceci entraîne la nature purement ponctuelle du spectre de Floquet de l'opérateur $H_0 + \epsilon P(\omega t)$ pour ϵ petit. Ici H_0 est l'opérateur différentiel de Schrödinger ordinaire $-\dfrac{d^2}{dx^2}+V$, $V(x) \sim |x|^\alpha, \alpha > 2$ lorsque $|x| \to \infty$, la perturbation quasi-périodique par rapport au temps P peut diverger comme $|x|^\beta, \beta < (\alpha-2)/2$, et le vecteur des fréquences ω n'est pas résonant. La preuve est fondée sur l'estimation de Kuksin pour les solutions des équations homologiques avec coefficients non constants.

1 Introduction et énoncé des résultats

Dans cet exposé je présenterai les résultats de [3]. Même si cette présentation a l'intention d'être complète, on fera référence à cet article pour des détails supplémentaires.

On considère l'équation différentielle linéaire non-autonome dans un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$

$$\mathrm{i}\dot{\psi}(t) = (A + \epsilon P(\omega_1 t, \omega_2 t, ..., \omega_n t))\psi(t), \quad \psi(t) \in \mathcal{H},\ \epsilon \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

sous les hypothèses suivantes :

A1 L'opérateur A est auto-adjoint positif. Spec(A) est discret, et toutes ses valeurs propres $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3, ...$ sont simples. Il existe $d > 1$ tel que

$$\lambda_i \sim i^d\ , \quad i \to \infty. \tag{1.2}$$

A2 $P(\phi_1, ..., \phi_n) \equiv P(\phi)$ est une fonction du tore $\mathbb{T}^n \equiv \mathbb{R}^n/2\pi Z^n$ à n dimensions à valeurs dans les opérateurs symétriques en $\mathcal{H}$; $\omega := (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in [0,1]^n$ est le vecteur des fréquences.

A3 Pour $\delta \geq 0$, on note $\mathcal{B}^\delta$ l'espace de Banach de tous les opérateurs fermés T dans $\mathcal{H}$ tels que $A^{-\delta/d}T$ est borné (en particulier: $\mathcal{B}^0 = \mathcal{L}(\mathcal{H})$). Sa norme est

$$\|T\|_\delta := \sup_{\|x\|_{\mathcal{H}}=1} \|A^{-\delta/d}Tx\|_{\mathcal{H}} \tag{1.3}$$

Alors la fonction $\mathbb{T}^n \ni \phi \to P(\phi) \in \mathcal{B}^\delta$ est analytique pour un certain $\delta < d-1$.

On veut montrer le résultat suivant.

Théorème 1.1 *Il existe $\epsilon_* > 0$, un sous-ensemble $\Pi^\epsilon \subset \Pi := [0,1]^n$ et, si $|\epsilon| < \epsilon_*$ et $\omega \in \Pi^\epsilon$, un opérateur unitaire $U_\epsilon(\omega t) \equiv U_\epsilon(\omega_1 t, \omega_2 t, ..., \omega_n t)$ de $\mathcal{H}$ avec les propriétés suivantes:*

T1 $U_\epsilon(\omega t)$ est analytique par rapport à t et quasi-périodique de fréquences ω ;

T2 $U_\epsilon(\omega t)$ transforme l'équation (1.1) en un système de la forme

$$\mathrm{i}\dot{\chi}(t) = A_\infty(\omega t)\chi(t) \tag{1.4}$$

$$A_\infty := \mathrm{diag}(\lambda_1^\infty + \mu_1^\infty(\omega t), \lambda_2^\infty + \mu_2^\infty(\omega t), \lambda_3^\infty + \mu_3^\infty(\omega t), ...) \tag{1.5}$$

Ici $\{\lambda_i^\infty\}_{i=1}^\infty \in \mathbb{R}$ et chaque fonction $\mu_i^\infty(\phi) : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ est analytique de moyenne nulle ;

T3 Il existe $C > 0$ tel que :

$$\|1 - U_\epsilon(\omega t)\|_0 \leq C\epsilon \ , \quad |\lambda_i^\infty - \lambda_i| \leq C i^\delta \epsilon \ , \quad |\mu_i(\omega t)| \leq C i^\delta \epsilon \ , \quad |\Pi - \Pi^\epsilon| \stackrel{\epsilon \to 0}{\to} 0 \ .$$

L'intégration directe de (1.4) réduit (1.1) à un système autonome dont les solutions sont à l'évidence toutes presque -périodiques.

Corollaire 1.1

1. *Si $|\epsilon| < \epsilon_*$, $\omega \in \Pi^\epsilon$ il existe une transformation unitaire $U_F(\omega t)$, quasipériodique de fréquences ω, et telle que $\|1 - U_F(\omega t)\|_\delta \leq C\epsilon$, qui transforme (1.1) en le système*

$$\mathrm{i}\dot{x} = A_F x, \quad A_F := \mathrm{diag}(\lambda_1^\infty, \lambda_2^\infty, \lambda_3^\infty, ...) \ ; \tag{1.6}$$

2. *Pour n'importe quelle donnée initiale* ψ_0 *la solution* $\psi(t)$ *de (1.1) est presque - périodique de fréquences* $2\pi/\lambda_1^\infty, 2\pi/\lambda_2^\infty, \ldots; \omega_1, \ldots, \omega_n$. *C'est à dire, elle est de la forme*

$$\psi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i^0(\omega t) e^{i\lambda_i^\infty t} \tag{1.7}$$

ou $\{\phi_i^0(\omega t)\}_{i=1}^\infty$ *sont les composantes de* $U_\epsilon(\omega t)\psi_0$ *sur la base des vecteurs propres de* A.

Le résultat ci-dessus admet une formulation équivalente en termes de spectre de Floquet ([22], et [13] pour le cas quasi-périodique). Considérons en effet dans l'espace de Hilbert $\mathcal{K} := \mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{T}^n)$ l'opérateur Hamiltonien de Floquet

$$K_F := -\mathrm{i} \sum_{l=1}^{n} \omega_l \frac{\partial}{\partial \phi_l} + A + \epsilon P(\phi) \ . \tag{1.8}$$

L'opérateur maximal engendré par l'expression différentielle (1.8) dans $\mathcal{K}$, noté encore K_F, est auto-adjoint en vertu de A3, condition qui rend $A + \epsilon P(\omega t)$ auto-adjoint sur $D(A)$ pour tout t. Alors :

Corollaire 1.2 *Pour* $|\epsilon| \leq \epsilon_*$ *et* $\omega \in \Pi^\epsilon$ *le spectre de* K_F *est purement ponctuel ; les valeurs propres sont* $\nu_{j,k} := \lambda_j^\infty + k \cdot \omega$, $j = 0, 1, 2 \ldots$, $k \in \mathbb{Z}^n$.

Remarque 1

1. Ce corollaire étend aux perturbations non bornées et quasi-périodiques le résultat valable pour les opérateurs K_F avec $P(\phi)$ périodique et différentiable en ϕ en tant qu'opérateur borné dans $\mathcal{H}$ [6, 7]. La condition sur l'espacement est la même que la condition A1.

2. Les méthodes KAM de [6, 7], introduites pour la première fois dans [2] (voir aussi [4]) ont permis de renforcer, pour des petits couplages, le résultat original de [11] (voir aussi [15],[18]), sur l'absence du spectre absolument continu à l'absence du spectre continu. De plus ici l'ensemble Π^ϵ est l'ensemble de toutes les fréquences qui satisfont une condition diophantienne par rapport aux différences $\lambda_i - \lambda_j$. En outre, un résultat du type du Corollaire 1.1 à une erreur d'ordre $\exp 1/\epsilon *-$ près a été montré dans [12] pour une classe de perturbations bornées par la méthode de Nekhoroshev.

3. Notre preuve étend aux espaces de dimension infinie la technique KAM pour éliminer la dépendance temporelle dans les équations différentielles ordinaire forcées quasi-périodiquement [1, 14, 21]. Le point technique à noter est que, bien que l'équation

homologique qui intervient dans le problème est à coefficients variables, elle admet une solution grâce à une technique développée par Kuksin[17] dans le contexte de son analyse de l'équation KdV par la théorie KAM.

Comme dans [4, 6, 7, 11, 15, 18, 12] la motivation plus importante pour ce corollaire est l'analyse spectrale (de Floquet) pour l'équation de Schrödinger ordinaire dépendant du temps, c'est à dire :

Théorème 1.2 *Soient l'équation de Schrödinger dépendant du temps*

$$H(t)\psi(x,t) = i\partial_t\psi(x,t),\ x \in \mathbb{R}; \quad H(t) := -\frac{d^2}{dx^2} + Q(x) + \epsilon V(x,\omega t),\ \epsilon \in \mathbb{R} \tag{1.9}$$

et l'hamiltonien de Floquet correspondant (1.8) sous les conditions suivantes:

1. $Q(x) \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $Q(x) \sim |x|^\alpha$ *pour un certain* $\alpha > 2$ *quand* $|x| \to \infty$ *;*

2. $V(x,\phi)$ *est une fonction holomorphe de* $\phi \in \mathbb{T}^n$ *à valeurs dans* $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$*, avec* $|V(x,\phi)||x|^{-\beta}$ *borné quand* $|x| \to \infty$ *pour un certain* $\beta < \dfrac{\alpha-2}{2}$.

Alors il existe $\epsilon^* > 0$ *tel que le spectre de* K_F *est purement ponctuel pour tout* $|\epsilon| < \epsilon^*$, $\omega \in \Pi^\epsilon$.

Remarque 2

1. On montrera le résultat dans une situation plus générale: $V = V(x,\xi;\phi)$ est fonction holomorphe de $\phi \in \mathbb{T}^n$ à valeurs dans $C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ avec $|V(x,\xi;\phi)|(|\xi|^2 + |x|^\alpha)^{-\delta/d}$ borné quand $|\xi| + |x| \to \infty$. Ici $V(\phi)$ est réalisé comme une famille d'opérateurs pseudodifférentiels dans $L^2(\mathbb{R})$ de classe G^β_ρ (voir par exemple [20], Chapitre 8) et de symbole de Weyl V.

2. Pour $\alpha = 4$ on tire $\beta < 1$. Donc la version quantique de l'oscillateur de Duffing proprement dit $H(t) = -\dfrac{d^2}{dx^2} + x^4 + \epsilon x \sin(\omega t)$ se trouve juste au delà de la validité du Corollaire.

3. Dans le cas périodique ($n = 1$) on voit bien que, comme en mécanique classique (voir par exemple [8], Chapt.5.13) même une perturbation non bornée n'est pas suffisante à délocaliser le système si son intensité ϵ est trop petite et sa fréquence n'est pas trop proche d'une résonance. Il n'y a pas non plus de diffusion (pour ϵ suffisamment petit) dans le système classique correspondant à (1.9) même pour des valeurs résonantes de ω, mais il y a des régions chaotiques dans l'espace des phases localisées autour des actions résonantes. Dans ce cas la nature ponctuelle ou pas du spectre de Floquet quantique est encore inconnue même pour des perturbations bornées. D'autre part, pour $0 < \alpha \le 2$, quand la condition (1.2) n'est pas vérifiée, la nature du spectre de Floquet n'est pas connue sauf pour le cas globalement résonant[9],[10].

2 La construction formelle

Sans rien perdre en généralité on peut écrire l'équation (1.1) comme un système du premier ordre en ℓ^2:

$$\mathrm{i}\dot{x} = (A + \epsilon P(\omega t))x \ , \qquad x \in \ell^2 \tag{2.1}$$

$$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...) \ , \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \ , \quad \lambda_i > 0 \tag{2.2}$$

ou λ_i et $P(\omega t) \equiv P(\omega_1 t, \omega_2 t, ..., \omega_n t)$ satisfont les conditions A1-A3.

Le point fondamental de toute méthode KAM réside en la construction d'un changement de coordonnées qui transforme le problème donné en un nouveau problème de forme identique mais avec une perturbation de taille beaucoup plus petite, typiquement le carré de la taille de la perturbation du problème donné. On va maintenant bâtir et estimer, à l'aide d'un algorithme très proche de [12], un opérateur unitaire qui transforme (2.1) en une équation de la même forme mais avec une perturbation d'ordre ϵ^2.

Dans cette section on exposera le procédé ; en Section 3 on établira les estimations, et en Section 4 on construira le procédé itératif et on montrera sa convergence.

Soit $B(\phi_1, ..., \phi_n) \in \mathcal{B}^0$ anti-autoadjoint $\forall \phi \in \mathbb{T}^n$. Étant donné l'opérateur unitaire $e^{\epsilon B(\phi)}$, pour $\omega \in \Pi$ fixé on fait le changement de base $x = e^{\epsilon B(\omega t)}y$. La substitution dans (2.1) donne

$$\mathrm{i}\dot{y} = (A + \tilde{P}^1(\omega t))y \tag{2.3}$$

La nouvelle perturbation $\tilde{P}^1$ est (on ne note pas la dépendance explicite de B par rapport à t):

$$\begin{aligned} \tilde{P}^1 := \epsilon \left\{ [A, B] - \mathrm{i}\dot{B} + P \right\} + \left(e^{-\epsilon B} A e^{\epsilon B} - A - \epsilon[A, B] \right) \\ + \epsilon \left(e^{-\epsilon B} P e^{\epsilon B} - P \right) - \mathrm{i}\epsilon \left(e^{-\epsilon B} \dot{B} e^{\epsilon B} - \dot{B} \right) . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Si B est tel que le premier terme au second membre s'annule $\tilde{P}^1$ devient d'ordre ϵ^2. Par conséquent on étudie l'équation

$$[A, B] - \mathrm{i}\dot{B} + P = 0 \ . \tag{2.5}$$

Calculant ses éléments de matrice sur les vecteurs propres de A cette équation devient

$$-\mathrm{i} \sum_{l=1}^{n} \omega_l \frac{\partial}{\partial \phi_l} B_{ij} + (\lambda_i - \lambda_j) B_{ij} = P_{ij} \ , \tag{2.6}$$

On développe maintenant le deux membres en série de Fourier, en écrivant

$$B_{ij} = \sum_{k \in Z^n} \hat{B}_{ijk} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot\phi}, \qquad P_{ij} = \sum_{k \in Z^n} \hat{P}_{ijk} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot\phi}.$$

Si l'on impose l'égalité des coefficients de Fourier des deux membres (2.6) devient

$$(\omega \cdot k + \lambda_i - \lambda_j)\hat{B}_{ijk} = \hat{P}_{ijk} \ .$$

Évidemment cette équation n'a pas de solution quand $i = j$ et $k = 0$. Si maintenant l'on suppose ω tel que $\omega \cdot k + \lambda_i - \lambda_j \neq 0$ quand $i \neq j$ ou $k \neq 0$, la définition naturelle de B est l'opérateur dont les éléments de matrice sont définis par

$$\begin{aligned} B_{ij} &:= \sum_{k \in Z^n} \frac{\hat{P}_{ijk}}{\omega \cdot k + \lambda_i - \lambda_j} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot\phi} \ , \quad i \neq j \\ B_{ii} &:= \sum_{k \in Z^n - \{0\}} \frac{\hat{P}_{iik}}{\omega \cdot k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot\phi} \end{aligned} \tag{2.7}$$

La deuxième ligne en (2.4) est d'ordre ϵ^2 seulement si l'opérateur B est borné. Or P n'est pas borné ; par conséquent l'opérateur $\mathrm{diag}(B_{ii})$ en général n'est pas borné non plus, et la définition précédente ne peut pas donner le résultat qu'on voudrait. L'idée est alors de définir B par la première des (2.7) avec $B_{ii} = 0$; on peut imaginer que, comme les dénominateurs $\omega \cdot k + \lambda_i - \lambda_j$ tendent vers l'infini si i ou j divergent, il devrait être possible d'engendrer un B borné même si P ne l'est pas. On va montrer exactement ceci dans le prochain paragraphe.

Avec la définition précédente de B le premier terme au second membre dans (2.4) devient l'opérateur $\epsilon\,\mathrm{diag}(P_{ii})$, et donc en fonction des variables y l'équation prend la forme

$$\mathrm{i}\dot{y} = (A^1 + \epsilon^2 P^1(\omega t))y \ ,$$

où $A^1 = A + \epsilon \mathrm{diag}(P_{ii}(\omega t))$. Ce système est défini seulement pour ω dans le sous-ensemble de Π où les dénominateurs dans (2.7) ne s'annulent pas. Dans le prochain paragraphe on supposera une condition de type diophantien pour ces dénominateurs aussi, valable dans un sous-ensemble Cantorien de Π. Alors on déterminera que P^1 a une dépendance Lipschitzienne par rapport à ω dans tel sous-ensemble.

Par itération de la construction on verra que l'opérateur A est remplacé par l'opérateur A^1 qui dépend aussi des angles ϕ. Ceci sera exactement le point ou le résultat de Kuksin [17] interviendra critiquement.

3 Redoublement de l'ordre de la perturbation

On exposera ici la construction et l'estimation de la transformation qui élève au carré l'ordre de la perturbation.

Soit $\mathbb{T}^n_s$ le tore complexifié avec $|\mathrm{Im}\phi_i| \leq s$. Si f est une fonction analytique de $\mathbb{T}^n_s$ à valeurs dans un espace de Banach (dans ce qui suit $\mathbb{C}$ ou bien la complexification de $\mathcal{B}^\delta$), on note

$$\|f\|_s = \sup_{\phi\in\mathbb{T}^n_s} \|f(\phi)\|$$

Pour toutes fonctions à valeurs dans $\mathcal{B}^\delta$ on utilise la notation

$$\|f\|_{\delta,s} := \sup_{\phi\in\mathbb{T}^n_s} \|f(\phi)\|_\delta \ .$$

Soit Π^- un sous-ensemble non vide fermé de Π de mesure positive. Si f dépend aussi (lipschitziennement) de $\omega \in \Pi^-$ on définit la norme

$$\|f\|^{\mathcal{L}}_s := \|f\|_s + \sup_{\phi\in\mathbb{T}^n} \sup_{\omega,\omega'\in\Pi^-} \frac{\|f(\phi,\omega) - f(\phi,\omega')\|}{|\omega-\omega'|} \ .$$

En particulier pour toutes fonctions à valeurs dans $\mathcal{B}^\delta$ on note $\|.\|^{\mathcal{L}}_{\delta,s}$.

On va maintenant insérer notre système dans un cadre plus général, qui grâce à la discussion qui précède est plus convenable pour le procédé itératif. Considérons dans ℓ^2 l'équation

$$\mathrm{i}\dot{x} = (A^- + P^-(\omega t))x \tag{3.1}$$

sous les conditions suivantes

H1)

$$A^- = \mathrm{diag}(\lambda_1^-(\omega) + \mu_1^-(\omega t,\omega), \lambda_2^-(\omega) + \mu_2^-(\omega t,\omega), \lambda_3^-(\omega) + \mu_3^-(\omega t,\omega), ...) \ , \tag{3.2}$$

Ici :

H1.a) $\forall i = 1, \dots$ la valeur propre $\lambda_i^-(\omega)$ est positive et lipschitzienne en $\omega \in \Pi^-$; en outre

$$\lambda_i^- \sim i^d \ ,$$

uniformément par rapport à $\omega \in \Pi^-$. Donc il existe $C_\lambda^- > 0$ indépendant de ω tel que

$$\left|\lambda_i^- - \lambda_j^-\right| \geq C_\lambda^- |i^d - j^d| \ . \tag{3.3}$$

H1.b) Il existe $C_\omega^- > 0$ (suffisamment petit) et $\delta < d-1$ tels que

$$\sup_{\omega,\omega'\in\Pi^-} \frac{|\lambda_i^-(\omega) - \lambda_i^-(\omega')|}{|\omega-\omega'|} \leq C_\omega^- i^\delta \tag{3.4}$$

H1.c) $\forall i = 1, \dots$ $\mu_i^-(\omega) : \mathbb{T}^n_s \times \Pi^- \to \mathcal{R}$ est analytique par rapport à ϕ, lipschitzienne par rapport à ω, et de moyenne nulle, c'est à dire :

$$\int_{\mathbb{T}^n} \mu_i(\phi,\omega)\, d\phi = 0.$$

En outre cette fonction vérifie les estimations

$$\|\mu_i\|_s \leq C_\mu^- i^\delta \tag{3.5}$$

$$\sup_{\phi\in\mathbb{T}_s^n} \sup_{\omega,\omega'\in\Pi^-} \frac{|\mu_i^-(\omega,\phi)-\mu_i^-(\omega',\phi)|}{|\omega-\omega'|} \leq C_\omega^- i^\delta \tag{3.6}$$

H2) La fonction à valeurs dans les opérateurs $P^- : \mathbb{T}_s^n \times \Pi^- \to \mathcal{B}^\delta$ est analytique par rapport à $\phi \in \mathbb{T}_s^n$ et lipschitzienne par rapport à $\omega \in \Pi^-$.

H3) Il existe $\gamma^- > 0$ et $\tau > n + 2/(d-1)$ tels que, pour tout $\omega \in \Pi^-$, on a

$$|\omega \cdot k| \geq \frac{\gamma^-}{|k|^\tau}\ , \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}\ , \tag{3.7}$$

$$|\lambda_i - \lambda_j + \omega\cdot k| \geq \frac{\gamma^-|i^d - j^d|}{1+|k|^\tau}\ ,\forall k \in \mathbb{Z}^n\ , \quad i \neq j \tag{3.8}$$

Remarque 1 Dans le prochain paragraphe on montrera qu'on peut construire un ensemble Π^- de mesure positive tel que le système de départ (1.1) vérifie aussi l'hypothèse précédente.

Soit maintenant

$$B : \mathbb{T}_s^n \ni (\phi_1,...,\phi_n) \mapsto B(\phi_1,...,\phi_n) \in \mathcal{B}^0 \tag{3.9}$$

une fonction analytique avec $B(\phi_1,...,\phi_n)$ anti-auto adjoint pour toute valeur réelle de $(\phi_1,...,\phi_n)$. Considérons l'opérateur unitaire correspondant $e^{B(\phi_1,...,\phi_n)}$, et (comme avant) pour tout $\omega \in \Pi^-$ considérons le changement de base unitaire $x = e^{B(\omega t)}y$. Sa substitution dans l'équation 3.1 donne

$$\mathrm{i}\dot{y} = (A^+ + P^+(\omega t))y \tag{3.10}$$

$$A^+ := A^- + \mathrm{diag}(P^-). \tag{3.11}$$

Ici $\mathrm{diag}(P^-)$ est la matrice diagonale formée des éléments diagonaux de P^-, c'est à dire $\mathrm{diag}(P^-) := \mathrm{diag}(P_{11}^-(\omega t), P_{22}^-(\omega t), P_{33}^-(\omega t)...)$.

La nouvelle perturbation P^+ est donnée par (on omettra de noter la dépendance explicite de t):

$$\begin{aligned} P^+ := &\Big\{[A^-,B] - \mathrm{i}\dot{B} + (P^- - \mathrm{diag}(P^-))\Big\} + \\ + &\Big(e^{-B}A^-e^B - A^- - [A^-,B]\Big) + \Big(e^{-B}P^-e^B - P^-\Big) - \mathrm{i}\Big(e^{-B}\dot{B}e^B - \dot{B}\Big). \end{aligned} \tag{3.12}$$

D'après le procédé standard on soustrait la moyenne de la perturbation. C'est à dire, on écrit $A^+ = \mathrm{diag}(\lambda_i^+ + \mu_i^+(\omega t))$ où $\lambda_i^+ = \lambda_i^- + \overline{P_{ii}(\phi)}$ (on note par $\overline{a}$ la moyenne de a

sur les angles). Donc les fonctions $\mu^+(\phi)$ ont une moyenne nulle ; les quantités λ_i^+ sont indépendantes de ϕ et d'après A3 vérifient l'estimation $|\lambda_i^+ - \lambda_i^-| \leq C_\mu^- i^\delta$.

Le point principal de la preuve est la construction de B tel que l'accolade dans (3.12) s'annule, c'est à dire la solution de l'équation en l'inconnue B

$$[A^-, B] - \mathrm{i}\dot{B} + (P^- - \mathrm{diag}(P^-)) = 0 \ . \tag{3.13}$$

Le procédé expliqué dans la section précédente doit être modifié parce qu'ici les valeurs propres de A^- dépendent aussi des angles ϕ. La construction se fonde sur un lemme de Kuksin [17] qu'on rappellera.

Soit l'équation sur le tore à n dimensions

$$-\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \omega_k \frac{\partial}{\partial \phi_k}\chi(\phi) + E_1\chi(\phi) + E_2 h(\phi)\chi(\phi) = b(\phi) \ . \tag{3.14}$$

On note ici χ l'inconnue, et b, h sont des fonctions analytiques données sur $\mathbb{T}_s^n$. h a une moyenne nulle ; E_1, E_2 sont des constantes positives et $\|h\|_s \leq 1$.
Sur le vecteur des fréquences $\omega = (\omega_1, ..., \omega_n)$ on imposera les hypothèses suivantes :

$$|\omega \cdot k| \geq \frac{\gamma_2}{|k|^\tau} \ , \forall k \in \mathbb{Z}^n - \{0\} \ , \quad |\omega \cdot k + E_1| \geq \frac{\gamma_1}{1 + |k|^\tau} \ , \forall k \in \mathbb{Z}^n \ . \tag{3.15}$$

L'hypothèse finale est une relation d'ordre sur la taille des différents paramètres, à savoir : étant donnés $0 < \theta < 1$ et $C > 0$ on supposera que

$$E_1^\theta \geq C E_2 \tag{3.16}$$

Lemme 3.1 *(Kuksin) Sous les hypothèses précédentes l'équation (3.14) admet une et une seule solution analytique χ qui pour tout $0 < \sigma < s$ vérifie l'estimation*

$$\|\chi\|_{s-\sigma} \leq C_1 \frac{1}{\gamma_1 \sigma^{a_1}} \exp\left(\frac{C_2}{\gamma_2^{a_2}\sigma^{a_3}}\right) \|b\|_s \tag{3.17}$$

où a_1, a_2, a_3, C_1, C_2 sont des constantes qui ne dépendent pas de $E_1, E_2, \sigma, s, \gamma_1, \gamma_2, \omega$.

Pour appliquer ce lemme à la construction et à l'estimation de B, on note $\mathcal{G}$ l'espace de Banach de tous les opérateurs bornés B dans ℓ^2 tels que $A^{-\delta/d} B A^{\delta/d}$ admet une extension en tant qu'opérateur linéaire borné. La norme de $\mathcal{G}$ est notée

$$\|B\|^{\mathcal{G}} := \max\left\{\|B\|_0, \|A^{-\delta/d} B A^{\delta/d}\|_0\right\}. \tag{3.18}$$

En outre pour les $s-$ normes d'une fonction analytique sur le tore à valeurs dans $\mathcal{G}$ (éventuellement Lipschitzienne par rapport à $\omega \in \Pi^-$) on emploiera la notation

$$\|B\|_s^{\mathcal{G}} \ , \qquad \|B\|_s^{\mathcal{G},\mathcal{L}} \ .$$

Dans ce qui suit la notation $a \leq\!\cdot\, b$ signifie : "il existe une constante C indépendante de $C_\omega^\pm, C_\mu^\pm, \gamma^\pm, s, \sigma, i, j, K$ (certains paramètres seront définis plus loin) telle que $a \leq Cb$. De même on notera $b \cdot\!\geq a$.

Lemme 3.2 *Soient* $\frac{\delta}{d-1} < \theta < 1$, $\gamma_* > 0$, $C_\omega^* > 0$, *et* $C^* > 0$ *fixés. On fait l'hypothèse que*

$$C^* > \frac{C_\mu^-}{C_\lambda^-} \ , \quad \gamma \geq \gamma_* \ , \quad C_\omega \leq C_\omega^* \ . \tag{3.19}$$

Alors pour tout $0 < \sigma < s$ *l'équation (3.13) a une solution unique* $B \in \mathcal{G}$ *analytique sur* $\mathbb{T}^n_{s-\sigma}$*, qui vérifie l'estimation*

$$\|B\|_{s-\sigma}^{\mathcal{G},\mathcal{L}} \leq \cdot \frac{1}{\sigma^{b_1}} \exp\left(\frac{c}{\sigma^{b_2}}\right) \|P^-\|_{\delta,s}^{\mathcal{L}} \ . \tag{3.20}$$

où c, b_1, b_2 *sont des constantes qui dépendent seulement de* $\theta, n, \tau, \delta, C^*, \gamma_*, C_\omega^*$.

Preuve. Si l'on calcule les éléments de matrice sur les vecteurs propres de A^-, l'équation (3.13) devient

$$-\mathrm{i}\sum_{k=1}^n \omega_k \frac{\partial}{\partial \phi_k} B_{ij} + (\lambda_i^- - \lambda_j^-) B_{ij} + (\mu_i^-(\phi) - \mu_j^-(\phi)) B_{ij} = P_{ij}, \quad i \neq j \tag{3.21}$$

La première inégalité de (3.19) assure la validité de (3.16) avec une constante C convenablement choisie indépendante de toutes les constantes qui interviennent. Alors une application directe du Lemme de Kuksin implique que (3.13) a une solution analytique unique qui vérifie l'estimation

$$\|B_{ij}\|_{s-\sigma} \leq \cdot \frac{1}{\gamma |i^d - j^d|} \frac{1}{\sigma^{a_1}} \exp\left(\frac{c}{\gamma^{a_2}\sigma^{a_3}}\right) \|P_{ij}\|_s \tag{3.22}$$

Pour estimer la norme sup de B on utilise le Lemme 5.2. À ce propos, remarquons dans un premier temps que $|i^d - j^d| \geq |i-j|(i^\delta + j^\delta)$. Ensuite on considère les matrices infinies d'éléments

$$\frac{P_{ij}}{(i^\delta + j^\delta)} \ , \quad \frac{P_{ij}}{j^\delta} \frac{i^\delta}{(i^\delta + j^\delta)}$$

L'hypothèse H2 entraîne a fortiori que ces matrices infinies représentent des opérateurs bornés en ℓ^2. Alors le Lemme 5.2 donne l'estimation de la norme sup de B et aussi de $A^{-\delta/d} B A^{\delta/d}$, c'est à dire que l'on a :

$$\|B\|_{s-2\sigma}^{\mathcal{G}} \leq \cdot \frac{1}{\sigma^{a_1+n}} \exp\left(\frac{c}{\sigma^{a_3}}\right) \|P^-\|_{\delta,s} \tag{3.23}$$

après redéfinition de σ comme 2σ et de la constante c. Pour obtenir l'estimation de la norme de Lipschitz on fait le raisonnement suivant. Pour une fonction donnée B de ω posons

$$\Delta B := B(\omega) - B(\omega'). \tag{3.24}$$

Par application de l'opérateur Δ à (3.21) on tire que ΔB_{ij} vérifie une équation analogue. Donc grâce au Lemme de Kuksin on peut estimer sa solution ΔB par le même argument utilisé dans l'estimation de B. Faisant la division par $|\omega - \omega'|$ et appliquant encore une fois le Lemme 5.2 on obtient

$$\left\| \frac{\Delta B}{\Delta \omega} \right\|_{s-3\sigma} \leq\cdot \left[\|P\|^{\mathcal{L}}_{\delta,s} + \frac{1}{\sigma^{a_1}} \exp\left(\frac{c}{\sigma^{a_3}}\right) \|P^-\|^{\mathcal{L}}_{\delta,s} \right]$$

ce qui donne la preuve après la redéfinition de σ comme 3σ et prenant le sup comme ci-dessus. □

Nous sommes maintenant en position d'énoncer et montrer le résultat principal de ce paragraphe.

Lemme 3.3 *Soit le système (3.1) sous les hypothèses énoncées, et l'hypothèse supplémentaire (3.19). Alors il existe un opérateur anti-autoadjoint $B \in \mathcal{G}$ qui dépend analytiquement de $\phi \in \mathbb{T}^n_{s-\sigma}$, et lipschitzien par rapport à $\omega \in \Pi^-$, tel que*

1. *B vérifie l'estimation(3.20) ;*
2. *Pour tout $\omega \in \Pi^-$ l'opérateur unitaire $e^{B(\omega t)}$ transforme le système (3.1) en le système (3.10) ;*
3. *La nouvelle perturbation P^+ vérifie l'estimation*

$$\|P^+\|^{\mathcal{L}}_{\delta,s-\sigma} \leq\cdot \left(\|P^-\|^{\mathcal{L}}_{\delta,s}\right)^2 \exp\left(\frac{c}{\sigma^{b_1}}\right) \tag{3.25}$$

4. *Pour tout K positif tel que $(1+K^\tau) < \dfrac{\gamma^-}{\|P^-\|_{\delta,s}}$, il existe un ensemble fermé $\Pi^+ \subset \Pi^-$ et une constante $d_4 > 1$ (indépendante de K) tels que*

$$|\Pi^- - \Pi^+| \leq\cdot \gamma^- \left(1 + \frac{1}{K^{d_4}}\right) \tag{3.26}$$

5. *Si $\omega \in \Pi^+$ alors les hypothèses H1-H3 ci-dessus sont vérifiées aussi par A^+ pourvu que l'on remplace les constantes avec des nouvelles constantes définies par*

$$\gamma^+ = \gamma^- - \|P^-\|_{\delta,s}(1+K^\tau) \ , \quad C^+_\mu = C^-_\mu + \|P^-\|_{\delta,s} \ , \tag{3.27}$$

$$C^+_\omega = C^-_\omega + \|P^-\|^{\mathcal{L}}_{\delta,s} \ , \quad C^+_\lambda = C^-_\lambda - 2\|P^-\|_{\delta,s} \ . \tag{3.28}$$

Preuve. Les estimations sur B sont une conséquence directe du Lemme 3.2 ci-dessus. À son tour la majoration (3.25) est une conséquence directe des Lemmes 5.3 et 5.4. Pour ce qui concerne (3.27) et (3.28) le seul fait non trivial à montrer est l'existence d'un ensemble Π^+ tel que, pour $\omega \in \Pi^+$ (3.7) et (3.8) sont vérifiées avec la nouvelle valeur de γ. Comme (3.7) est à l'évidence valide, il faut examiner (3.8). On remarque d'abord que l'on a

$$|\lambda^-_i - \lambda^+_i| \leq \|P^-\|_{\delta,s} i^\delta \ ;$$

donc, puisque $|k| \leq K$ on peut écrire, en vertu de (3.8) et de l'inégalité $|i^d - j^d| \geq (i^\delta + j^\delta)$:

$$\begin{aligned}\left|\lambda_i^+ - \lambda_j^+ - \omega \cdot k\right| &\geq \left|\lambda_i^- - \lambda_j^- - \omega \cdot k\right| - \|P^-\|_{\delta,s} (i^\delta + j^\delta) \\ &\geq \frac{\gamma^- - \|P^-\|_{\delta,s} (1 + K^\tau)}{1 + |k|^\tau} |i^d - j^d| \ .\end{aligned}$$

Donc (3.8) est vérifiée pour ces valeurs de k. Pour i, j, k fixés on pose :

$$\mathcal{R}_{ijk}(\alpha) := \left\{\omega \in \Pi \ : \ \left|\lambda_i^+ - \lambda_j^+ - \omega \cdot k\right| \leq \alpha\right\} \tag{3.29}$$

$$\Pi^+ := \Pi^- - \bigcup_{|k| \geq K} \mathcal{R}_{ijk}\left(\frac{\gamma |i^d - j^d|}{1 + |k|^\tau}\right) \ . \tag{3.30}$$

En vertu du Lemme 5.5 l'ensemble (3.29) est non vide seulement si $|k| \geq |i^d - j^d|(C_\lambda^- - \gamma^-)$, et en vertu du Lemme 5.6, on a

$$\left|\mathcal{R}_{ijk}\left(\frac{\gamma |i^d - j^d|}{1 + |k|^\tau}\right)\right| \leq \cdot \frac{\gamma |i^d - j^d|}{(1 + |k|^\tau)|k|} \ .$$

Comme $|i^d - j^d| \geq |i - j|(i^{d-1} + j^{d-1})$, la cardinalité de l'ensemble $\{(i,j) \mid |i^d - j^d| \leq L\}$ est bornée par le produit d'une constante absolue par $L^{2/(d-1)}$. Donc si $\tau > n + 2/(d-1)$ on a

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{ijk : |k| \geq K} \mathcal{R}_{ijk}\left(\frac{\gamma |i^d - j^d|}{1 + |k|^\tau}\right)\right| &\leq \cdot \sum_{|k| \geq K, |i^d - j^d| \leq C|k|} \frac{\gamma |i^d - j^d|}{(1 + |k|^\tau)|k|} \\ &\leq \cdot \gamma \sum_{s \geq K} \frac{1}{s^{\tau - n + 1 - 2/(d-1)}} \leq \cdot \frac{\gamma}{K^{d_4}} \ ,\end{aligned}$$

ce qui montre l'assertion. □

4 Itération

Dans ce paragraphe on établira l'itération nécessaire à montrer les résultats énoncés. D'abord on assignera les valeurs de toutes les constantes qui entrent dans les estimations itératives. Donc on fixe ϵ, K, s et γ et on définit, pour $l \geq 1$,

$$\epsilon_l := \epsilon^{(4/3)^l} \ , \quad \sigma_l := \frac{s}{4l^2} \ , \quad s_l = s_{l-1} - \sigma_l \ , \quad K_l := lK \tag{4.1}$$

$$\gamma_l = \gamma_{l-1} - 4\epsilon_l(1 + K_l^\tau) \ , \quad C_{\mu,l} = C_{\mu,l-1} + \epsilon_l \ , \tag{4.2}$$

$$C_{\lambda,l} = C_{\lambda,l-1} - 2\epsilon_l \ , \quad C_{\omega,l} = C_{\omega,l-1} + \epsilon_l \ . \tag{4.3}$$

Les valeurs initiales des suites sont choisies comme suit:

$$\gamma_0 := \gamma \ , s_0 = s, \quad C_{\mu,0} := 0 \ , \quad C_{\lambda,0} := C_\lambda \ , \quad C_{\omega,0} := 0 \ .$$

Proposition 4.1 *Il existe $\epsilon_* = \epsilon_*(\gamma) > 0$ et, pour tout $l \geq 1$, un ensemble fermé $\Pi_l^\gamma \subset \Pi$ tels que, si $|\epsilon| < \epsilon_*$, on peut construire, pour $\omega \in \Pi_l^\gamma$ une transformation unitaire U_ϵ^l, analytique et quasipériodique par rapport à t de fréquences ω, qui transforme le système (2.1) en le système*

$$\mathrm{i}\dot{x} = (A^l + P^l(\omega t))x \tag{4.4}$$

où :

1. *$U_\epsilon^l(\omega t)$ a la forme suivante : $U_\epsilon^l(\phi) = \mathrm{e}^{B_\epsilon^1(\phi)}\mathrm{e}^{B_\epsilon^2(\phi)}...\mathrm{e}^{B_\epsilon^l(\phi)}$; les opérateurs anti-auto-adjoints $B_\epsilon^j \in \mathcal{G}$, j=1,...,l dépendent analytiquement de $\phi \in \mathbb{T}^n_{s-\sigma_l}$, sont lipschitziens par rapport à $\omega \in \Pi_l^\gamma$ et vérifient (3.20) avec P_{l-1}, σ_l à la place de P^-, σ, respectivement.*

2. *A^l est de la forme (3.2) avec l'indice en haut "moins" remplacé par l, c'est à dire*

$$A^l = \mathrm{diag}(\lambda_1^l(\omega) + \mu_1^l(\omega t, \omega), \lambda_2^l(\omega) + \mu_2^l(\omega t, \omega), \lambda_3^l(\omega) + \mu_3^l(\omega t, \omega), ...) \ , \tag{4.5}$$

3. *Les λ_i^l et μ_i^l correspondants vérifient les conditions H1, H2, H3 du paragraphe précédent, pourvu que λ_i^-, μ_i^- soient remplacées par λ_i^l, μ_i^l, respectivement.*

4. *On a les majorations suivantes*

$$\left\|P^l\right\|_{\delta,s_l} \leq \epsilon_l \ , \quad \left\|B_\epsilon^l\right\|_{\delta,s_{l+1}}^{\mathcal{G},\mathcal{L}} \leq \epsilon_l \ , \quad \left|\Pi_l^\gamma - \Pi_{l+1}^\gamma\right| \leq \gamma_l \left(1 + \frac{1}{(lK)^{d_4}}\right). \tag{4.6}$$

Preuve. On raisonne par récurrence appliquant le Lemme 3.3. D'abord on l'applique au système de départ (2.1) pour aboutir à un système de la forme (4.4) avec $l = 1$. A ce propos on remarque que (2.1) vérifie toutes les hypothèses du Lemme (3.3) exceptées les conditions de non résonance (3.7) et (3.8) sur les fréquences. Il faut restreindre l'ensemble des fréquences. On va alors définir

$$\Pi_0^\gamma := \Pi - \bigcup_{ijk} \mathcal{R}_{ijk}\left(\frac{\gamma|i^d - j^d|}{1 + |k|^\tau}\right)$$

et remarquer que, en vertu du Lemme 5.6, $|\Pi - \Pi_0^\gamma| \leq \cdot \gamma$. Donc on peut appliquer le Lemme 3.3 et l'on a initialisé la récurrence.

Pour passer de l à $l+1$ il faut vérifier les hypothèses du Lemme 3.3 pour tout l. Plus précisément, si l'on définit $\gamma^* := \gamma/2$ et on prend C^* et C_ω^* fixées, il faut vérifier (3.19). Il est facile de le montrer pourvu que ϵ soit plus petit qu'une constante qui en particulier s'annule quand $\gamma \to 0$. Alors on voit immédiatement que les conclusions du Lemme 3.3 impliquent le résultat si ϵ est suffisamment petit (indépendamment de l). □

Preuve du Théorème 1.1 La Proposition 4.1 assure l'existence de $\epsilon^* > 0$ tel que, pour $|\epsilon| < \epsilon^*(\gamma)$, $\lim_{l\to\infty} \gamma_l = \gamma^\infty$, $\gamma^\infty > \gamma/2$, et $\lim_{l\to\infty} s_l = s/2$. Ceci entraîne la convergence uniforme de la suite de fonctions U_ϵ^l sur $\mathbb{T}^n_{s/4}$ à valeurs dans les opérateurs. Donc la limite, notée $U_\epsilon^\infty(\omega t)$, sera analytique et quasi-périodique. De plus, en écrivant $A_\infty := \mathrm{diag}(\lim_{l\to\infty}(\lambda_i^l + \mu_i^l))$, on a

$$\lim_{l\to\infty} \|A_l(\phi) - A_\infty(\phi)\|_\delta = 0$$

uniformément sur $\mathbb{T}^n_{s/4}$. Ceci montre T1 et T2. Les deux premières estimations de T3 sont aussi clairement impliquées par la convergence ci-dessus. Maintenant on pose: $\Pi^\gamma = \bigcap_{l=1}^{\infty} \Pi_l^{\gamma/2}$. Grâce à la deuxième des estimations (4.6) on a

$$|\Pi - \Pi^\gamma| \leq \cdot \gamma_0 = \gamma$$

On note $\gamma(\epsilon^*)$ la fonction inverse de $\gamma \mapsto \epsilon^*(\gamma)$, et on définit $\Pi^\epsilon := \Pi^{\gamma(\epsilon)}$. Ceci donne la troisième estimation de l'assertion T3. $\square$

Preuve des Corollaires 1.1 et 1.2 L'intégration de (1.4) donne:

$$\chi_i(t) = \chi_i(0)e^{\mathrm{i}\lambda_i^\infty t}e^{iF_i^\infty(t)}, \qquad F_i^\infty(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n-\{0\}} \frac{\mu_{i,k}^\infty}{\omega\cdot kt}(e^{\mathrm{i}\omega\cdot k} - 1), \quad i = 0, 1, \ldots$$

où $\mu_{i,k}^\infty, k = \mathbb{Z}^n$, sont les coefficients de Fourier de $\mu_i(\phi)$. Si l'on pose $x_i := \mathrm{e}^{\mathrm{i}F_i^\infty(t)}\chi_i$ on obtient $\mathrm{i}\dot{x}_i = \lambda_i^\infty x_i$. On obtient la formule (1.7) avec la position $\chi = U_\epsilon\phi$. Ensuite, on vérifie trivialement que $\phi_i^0(\omega t)e^{i\lambda_i^\infty t}$ est une solution de (1.1) si et seulement si $\lambda_i^\infty + \langle k, \omega\rangle$ est une valeur propre de (1.8). $\square$

Preuve du Théorème 1.2 Soit A l'opérateur maximal de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par l'expression différentielle $-\frac{d^2}{dx^2} + Q(x)$. Il est bien connu que A est auto-adjoint, strictement positif avec résolvante compacte et que, si l'on note $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots$ ses valeurs propres, on a $\lambda_i \sim i^{\frac{2\alpha}{\alpha+2}}, i \to \infty$. Donc la condition A1 est vérifiée si $\alpha > 2$. A peut être réalisé aussi comme opérateur pseudodifférentiel de symbole $\sigma_A(x,\xi) := \xi^2 + Q(x)$ par rapport à la quantification de Weyl. $\sigma_A(x,\xi)$ appartient à la classe des symboles $\Gamma_\rho^\alpha(\mathbb{R}) := \Gamma_\rho^\alpha$ pour tout $0 < \rho < 1$ (notations comme dans [20], Sect.23). Cette classe de symboles engendre la classe G_ρ^α d'opérateurs pseudodifférentiels dans $L^2(\mathbb{R})$ par la formule de quantification de Weyl:

$$(Au)(x) = \frac{1}{2\pi^n}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi}\sigma_A(\frac{x+y}{2}, \xi)u(y)\, dyd\xi, \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

L'inverse $[A+1]^{-1}$, dont le symbole principal est $\sigma_{(A+1)^{-1}}(x,\xi) = (\xi^2 + Q(x) + 1)^{-1}$, appartient à la classe $G_\rho^{-\alpha}$. On peut appliquer le calcul fonctionnel pour les opérateurs pseudodifférentiels (voir par exemple [20], Chapt.II.10,11 ou [5], Chapt.8) aux opérateurs dans ces classes. Par conséquent l'opérateur auto-adjoint $A^q, q > 0$ défini par le théorème spectral admet aussi une réalisation comme opérateur pseudodifférentiel dans $G^{\alpha q}_{\rho}$, avec symbole dans $\Gamma^{\alpha q}_{\rho}$. Son symbole principal est $\sigma_{A^q}(x,\xi) := (\xi^2 + Q(x))^q$, et le symbole principal de $[A^q+1]^{-1} \in G^{-\alpha q}_{\rho}$ est $\sigma_{(A^q+1)^{-q}}(x,\xi) := [(\xi^2+Q(x))^q+1]^{-1}$. Par hypothèse le symbole de la perturbation V est dans Γ^{β}_{ρ} pour tout $0<\rho<1$, et donc V est dans G^{β}_{ρ}. Par la propriété de composition, l'opérateur $T := V[A^q+1]^{-1}$ admet un symbole dans $\Gamma^{-\alpha q+\beta}_{\rho}$, et sera borné si $-\alpha q+\beta \le 0$ ([20], Thm. 24.3). Il suffit de vérifier cette proprieté pour le symbole principal, qui dans ce cas, en application de la formule de composition, est donné par

$$\sigma^P_T(x,\xi) = v(x,\xi;\phi)[(\xi^2+Q(x))^q+1]^{-1}.$$

Comme ici on a $q = \delta/d$, $|\sigma^P_T(x,\xi)|$ est borné $\forall\,(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ s'il existe $D>0$ tel que $|v(x,\xi;\phi)| \le D(\xi^2+|x|^{\alpha})^{\delta/d}$. Si $V \sim |x|^{\beta}$ as $|x| \to \infty$ l'inégalité est vérifiée pour $\beta \le \alpha\delta/d$. A ce point on pose $1 < d = \dfrac{2\alpha}{\alpha+2}$. Alors $\delta < d-1$ implique $0<\delta<\dfrac{\alpha-2}{\alpha+2}$ et donc $\beta < \dfrac{\alpha-2}{2}$. □

5 Lemmes techniques

Lemme 5.1 *Soient f_j des fonctions analytiques sur $\mathbb{T}^n_s$. Alors pour tout $0<\sigma<s$ on a*

$$\Big(\sum_{j\ge1}\|f_j\|^2_{s-\sigma}\Big)^{1/2} \le \frac{4^n}{\sigma^n}\|\Big(\sum_{j\ge1}|f_j|^2\Big)^{1/2}\|_s$$

Preuve. Il s'agit du Lemme B.3 de [16] ; on va reproduire sa preuve ici pour une lecture plus simple. On considère d'abord le cas $n=1$. Pour tout $j\ge1$ il existe un point $\phi_j \in \mathbb{T}_{s-\sigma}$ tel que

$$\|f_j\|_{s-\sigma} \le |f_j(\phi_j)|\ .$$

Par la formule intégrale de Cauchy

$$f_j(\phi_j) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial\Gamma_\rho}\frac{f_j(\zeta)}{\zeta-\phi_j}d\zeta\ ,$$

où $0<\rho<\sigma$, est un paramètre indépendant de j, et $\partial\Gamma_\rho$ est la frontière de l'ensemble $\Gamma_\rho := \{\phi\ :\ -\rho < \mathrm{Re}\phi < 2\pi+\rho\ ,\ -(s-\sigma+\rho) < \mathrm{Im}\phi < s-\sigma+\rho\}$. On a

$$\Big(\sum_{j\ge1}\|f_j\|^2_{s-\sigma}\Big) \le \Big(\sum_{j\ge1}\Big|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial\Gamma_\rho}\frac{f_j(\zeta)}{\zeta-\phi_j}d\zeta\Big|^2\Big)^{1/2}$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\rho}\Big(\sum_{j\ge1}\Big|\frac{f_j(\zeta)}{\zeta-\phi_j}\Big|^2\Big)^{1/2}|d\zeta| \le \frac{4}{\rho}\sup_{\mathbb{T}_s}\Big(\sum_{j\ge1}|f_j(\phi)|^2\Big)^{1/2}\ .$$

On montre le résultat par le calcul de la limite $\rho\to\sigma$. On traite d'une manière analogue le cas $n>1$. □

Lemme 5.2 *Soit $F = (F_{ij})$ un opérateur borné dans ℓ^2, et soient les éléments de matrice (F_{ij}) des fonctions analytiques de $\phi \in \mathbb{T}^n_s$. Soit $R = (R_{ij})$ un autre opérateur avec éléments de matrice qui dépendent analytiquement on $\phi \in \mathbb{T}^n_\sigma$ et tel que*

$$\sup_{\phi\in\mathbb{T}^n_s} |R_{ij}(\phi)| \le \frac{1}{|i-j|} \sup_{\phi\in\mathbb{T}^n_s} |F_{ij}(\phi)| \ , \quad i \neq j \ .$$

Alors, pour tout $\phi \in \mathbb{T}^n_s$, R est borné en ℓ^2 et pour tout $\sigma < s$ positif il vérifie l'estimation

$$\|R\|_{0,s-\sigma} \le \frac{4^{n+1}}{\sigma^n} \|F\|_{0,s} \ .$$

Preuve. C'est le lemme B.4 de [16]; on reproduit sa preuve ici encore pour simplifier la lecture. Soit $\phi \in \mathbb{T}_{s-\sigma}$ fixé. En vertu du Lemme 5.1 et de l'inégalité de Schwarz on a

$$\begin{aligned}\sum_{j\ge1} |R_{ij}(\phi)| \le \sum_{j\ge1} \|R_{ij}\|_{s-\sigma} &\le \Big(\sum_{j\ge1} \|F_{ij}\|^2_{s-\sigma}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{j\neq i} \frac{1}{|i-j|^2}\Big)^{1/2} \\ &\le \frac{4^{n+1}}{\sigma^n} \sup_{\mathbb{T}^n_s} \Big(\sum_{j\ge1} |F_{ij}|^2\Big)^{1/2} \le \frac{4^{n+1}}{\sigma^n} \|F\| 0, s \ .\end{aligned}$$

La même estimation est valable pour $\sum_{i\ge1} |F_{ij}(\phi)|$. Donc, pour $\phi \in \mathbb{T}^n_\sigma$

$$\begin{aligned}\|R(\phi)v\|^2 &= \sum_{i\ge1} \Big(\sum_{j\ge1} |R_{ij}(\phi)||v_j|\Big)^2 \le \sum_{i\ge1} \Big(\sum_{j\ge1} |R_{ij}(\phi)|\Big)\Big(\sum_{j\ge1} |R_{ij}(\phi)||v_j|^2\Big) \\ &\le \Big(\sum_{j\ge1} |R_{ij}(\phi)|\Big)\Big(\sum_{i\ge1} |R_{ij}(\phi)|\Big)\Big(\sum_{j\ge1} |v_j|^2\Big) \le \Big(\frac{4^{n+1}}{\sigma^n} \|F\|_{0,s}\Big)^2 \|v\|^2\end{aligned}$$

et cela montre le résultat. □

Lemme 5.3 *Soient $B \in \mathcal{G}$ un opérateur borné anti-autoadjoint, et $P \in \mathcal{B}^\delta$ un opérateur autoadjoint. Alors on a $e^{-B}Pe^B \in \mathcal{B}^\delta$ et, pourvu que $\|B\|^{\mathcal{G}} \le 1/2$, les majorations suivantes sont valides :*

$$\left\| e^{-B}Pe^B - P \right\|_\delta \le 4 \|P\|_\delta \|B\|^{\mathcal{G}} \tag{5.1}$$

En outre, si B et P sont aussi lipschitziens par rapport à $\omega \in \Pi$, on a

$$\left\| e^{-B}Pe^B - P \right\|^{\mathcal{L}}_\delta \le 4 \|P\|^{\mathcal{L}}_\delta \|B\|^{\mathcal{G},\mathcal{L}} \tag{5.2}$$

Preuve. On définit $P(t) := e^{-tB}Pe^{tB}$. Alors $P(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire

$$\dot{P} = [B, P] \ , \quad P(0) = P$$

d'où

$$\|\dot{P}(t)\|_\delta \le 2 \|B\|^{\mathcal{G}} \|P(t)\|_\delta \implies \|P(t)\|_\delta \le \exp\Big(2 \|B\|^{\mathcal{G}} t\Big) \|P\|_\delta \ .$$

Il vient alors (5.1) en vertu de

$$P(t) - P = \int_0^t [B, P(s)] ds \ .$$

Pour montrer l'estimation de Lipschitz on remarque que (la notation est comme dans la preuve du Lemme 3.2), ΔP vérifie l'équation

$$(\Delta P)^{\cdot} = [\Delta B, P] + [B, \Delta P] \ ,$$

et après on procède comme dans l'estimation de la norme opérationnelle. $\square$

Lemme 5.4 *Soit $B \in \mathcal{G}$ la solution de l'équation (3.13) et soit $0 < \sigma < s/2$. Alors :*

$$\left\| e^{-B} A^{-} e^{B} - A^{-} - [A^{-}, B] \right\|_{\delta, s-2\sigma} \leq \cdot \, \|B\|^{\mathcal{G}}_{s-\sigma} \left(\frac{1}{\sigma} \|B\|_{\delta, s-\sigma} + \|P^{-}\|_{\delta} \right) \tag{5.3}$$

$$\left\| e^{-B} A^{-} e^{B} - A^{-} - [A^{-}, B] \right\|^{\mathcal{L}}_{\delta, s-2\sigma} \leq \cdot \, \|B\|^{\mathcal{G}, \mathcal{L}}_{s-\sigma} \left(\frac{1}{\sigma} \|B\|^{\mathcal{L}}_{\delta, s-\sigma} + \|P^{-}\|^{\mathcal{L}}_{\delta} \right) \tag{5.4}$$

Preuve. La preuve se fait par l'argument du Lemme 5.3; il est suffisant d'utiliser la formule

$$e^{-B} A^{-} e^{B} - A^{-} - [A^{-}, B] = \int_0^1 ds \int_0^s e^{-s_1 B} [[A^{-}, B], B] e^{s_1 B} ds_1$$

et de calculer $[A^{-}, B]$ à partir de l'équation (3.13). L'assertion il s'ensuit sans difficulté. $\square$

Lemme 5.5 *On assume que la suite λ_i vérifie l'hypothèse H1 du chapitre 2 et l'inégalité 3.4, et on fixe $\alpha < C_\lambda/2$; alors l'ensemble $\mathcal{R}_{ijk}(\alpha |i^d - j^d|)$ est vide si $|k| < (C_\lambda/2)|i^d - j^d|$.*

La preuve de ce Lemme est immédiate et sera donc omise.

Lemme 5.6 *Si la suite λ_i vérifie l'hypothèse H1 et (3.4) $\exists C > 0$ tel que, si*

$$\frac{n C_\omega}{C_\lambda} \leq \frac{1}{2}$$

alors on a

$$|\mathcal{R}_{ijk}(\alpha)| \leq \frac{C\alpha}{|k|} \ .$$

Preuve. Comme dans la preuve du Lemme 5 de ref. [19] on fixe $v \in \{-1, 1\}^n$ tel que $v \cdot k = |k|$ et on écrit $\omega = av + w$ avec $w \in v^{\perp}$. On a alors

$$(\omega \cdot k)|_s^t = |k|(t - s), \qquad (\lambda_i - \lambda_j)\,|_s^t \leq C_\omega (i^\delta + j^\delta)|v|(t - s) \ .$$

donc, en vertu du Lemme 5.5, ou bien $\mathcal{R}_{ijk}$ est vide ou bien

$$(\omega \cdot k + \lambda_i - \lambda_j)|_s^t \geq |k|(t - s) \left(1 - \frac{n C_\omega 2}{C_\lambda} \right) \geq \frac{1}{2} |k|(t - s) \ ,$$

et par conséquent on arrive par hypothèse à la conclusion

$$|\mathcal{R}_{ijk}(\alpha)| \leq \frac{4}{|k|} \alpha \ .$$

$\square$

References

[1] V.I. Arnold: Chapitres supplémentaires de la théorie des equations différentielles ordinaires. Mir (Moscou 1980).

[2] J.Bellissard, *Stability and instability in quantum mechanics*, In Trends and Developments in the Eighties, (S.Albeverio and Ph.Blanchard, Editors), World Scientific, Singapore 1985, pp.1-106.

[3] D.Bambusi, S.Graffi *Time Quasi-periodic unbounded perturbations of Schrödinger operators and KAM methods* , Commun.Math.Phys. **177**, 327-347 (2001).

[4] M.Combescure, *The quantum stability problem for time-periodic perturbation of the harmonic oscillator*, An.Inst.H.Poincaré **47**, 62-82 (1987) ; Erratum *ibidem*, 451-454.

[5] M.Dimassi, J.Sjöstrand, *Spectral Asymptotics in the Semiclassical Limit*, London Math.Soc.Lecture Notes Serie 268, Cambridge University Press 1999

[6] P.Duclos, P.Stovicek, *Floquet Hamiltonians with Pure Point Spectrum*, Commun.Math.Phys. **177**, 327-347 (1996)

[7] P.Duclos, P.Stovicek, M.Vittot: *Perturbation of an eigen-value from a dense point spectrum: a general Floquet Hamiltonian.* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **71** 241–301 (1999).

[8] G.Gallavotti, *The Elements of Mechanics*, Springer-Verlag, 1983

[9] S.Graffi, K.Yajima, *Absolute Continuity of the Floquet Spectrum for a Nonlinearly Forced Harmonic Oscillator*, Commun.Math.Phys., to appear

[10] G. Hagedorn, M. Loss, J. Slawny : *Non-stochasticity of time-dependent quadratic Hamiltonians and the spectra of canonical transformations*, J.Phys.A **19**, 521–531 (1986)

[11] J.Howland, *Floquet Operators with Singular Spectrum, I*, Ann.Inst.H.Poincaré **49**, 309-323 (1989); II, *ibidem*, 325-334, (1989)

[12] H.R. Jauslin, F. Monti: *Quantum Nekhoroshev theorem for quasi-periodic Floquet Hamiltonians.* Rev. Math. Phys. **10** 393–428 (1998).

[13] H.R. Jauslin, J.L. Lebowitz: *Spectral and stability aspects of quantum chaos.* Chaos **1** 114–121 (1991).

[14] A.Jorba, C. Simó: *On the reducibility of linear differential equations with quasiperiodic coefficients.* J. Differential Equations **98** 111–124 (1992).

[15] A.Joye, *Absence of absolutely continuous spectrum of Floquet operators*, J.Stat.Phys. **75**, 929-952 (1994)

[16] T.Kappeler, J. Pöschel: Perturbation of KdV Equations – The KAM preuve. Preprint 1997.

[17] S.B. Kuksin: *On small–denominator equations with large variable coefficients* J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) **48**, 262–271, (1997).

[18] G.Nenciu, *Floquet operators without absolutely continuous spectrum*, Ann.Inst.H.Poincaré **59**, 91-97 (1993)

[19] J. Pöschel: *A KAM–Theorem for some Partial Differential Equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **23**, 119–148 (1996).

[20] M.A.Shubin, *Pseudodifférential Operators and Spectral Theory* , Springer-Verlag 1987

[21] J. Xu, Q. Zheng: *On the reducibility of linear différential equations with quasiperiodic coefficients which are degenerate.* Proc. Amer. Math. Soc. **126**, 1445–1451 (1998).

[22] K.Yajima, *Scattering Theory for Schrödinger Operators with Potentials Periodic in Time*, J.Math.Soc.Japan **29**, 729-743 (1977)