



SEMINAIRE

**Equations aux
Dérivées
Partielles**

2001-2002

Grégoire Allaire

Homogénéisation et limite de diffusion pour une équation de transport

Séminaire É. D. P. (2001-2002), Exposé n° XIII, 12 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2001-2002____A13_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*
<http://www.cedram.org/>

Homogénéisation et limite de diffusion pour une équation de transport

Grégoire Allaire *

Résumé. Nous étudions l'homogénéisation d'une équation de transport dans un milieu périodique de période ϵ . Cette équation est un problème aux valeurs propres qui modélise l'équilibre d'une densité de particules réagissant avec un milieu sous-jacent. Le libre parcours moyen des particules est supposé être aussi de taille ϵ , ce qui entraîne que le modèle limite est une équation de diffusion. Lorsque les coefficients sont purement périodiques, on obtient une équation homogénéisée posée dans tout le domaine, tandis que si les coefficients sont périodiques modulés par une variation spatiale macroscopique il se produit un phénomène de localisation pour lequel l'équation homogénéisée est, après un changement d'échelle en $\sqrt{\epsilon}$, l'équation de l'oscillateur harmonique dans tout l'espace. Le principal résultat présenté ici a été obtenu en collaboration avec G. Bal et V. Siess (voir [3] pour des démonstrations détaillées).

1 Introduction

On considère l'équation de transport suivante

$$\begin{cases} \epsilon v \cdot \nabla \phi^\epsilon(x, v) + \Sigma^\epsilon(x, v) \phi^\epsilon(x, v) - \int_V \sigma^\epsilon(x, v', v) \phi^\epsilon(x, v') dv' \\ \qquad \qquad \qquad = \lambda^\epsilon \int_V f^\epsilon(x, v', v) \phi^\epsilon(x, v') dv' \text{ dans } \Omega \times V \\ \phi^\epsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_- = \{(x, v) \in \partial\Omega \times V, v \cdot n(x) < 0\} \end{cases} \quad (1)$$

où Ω est un domaine borné convexe de \mathbb{R}^N , V est l'ensemble des vitesses (un ouvert borné de \mathbb{R}^N qui ne contient pas 0, de mesure normalisée $|V| = 1$), et les coefficients sont des fonctions périodiques modulées définies par

$$\Sigma^\epsilon(x, v) = \Sigma\left(x, \frac{x}{\epsilon}, v\right), \quad \sigma^\epsilon(x, v', v) = \sigma\left(x, \frac{x}{\epsilon}, v', v\right), \quad f^\epsilon(x, v', v) = f\left(x, \frac{x}{\epsilon}, v', v\right), \quad (2)$$

où $\Sigma(x, y, v)$, $\sigma(x, y, v', v)$, et $f(x, y, v', v)$ sont des fonctions positives, régulières en $x \in \Omega$, périodiques en $y \in \mathbb{T}^N$ (le tore unité). Si l'on fait l'hypothèse (non optimale mais suffisante pour notre propos) qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} f(x, y, v', v) &\geq C, \\ \Sigma(x, y, v) - \int_V \sigma(x, y, v', v) dv' &\geq C, \\ \Sigma(x, y, v) - \int_V \sigma(x, y, v, v') dv' &\geq C, \end{aligned} \quad (3)$$

alors, grâce aux lemmes de moyenne [12], l'opérateur dans $L^2(\Omega \times V)$ associé au problème spectral (1) est compact et vérifie un théorème de type Krein-Rutman

*Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, (gregoire.allaire@polytechnique.fr)

[10], [20]. Par conséquent, le spectre de (1) est discret, au plus dénombrable, et il existe une première valeur propre réelle positive simple associée à une fonction propre positive.

A cause du coefficient ε devant le terme d'advection, (1) est un problème de perturbation singulière combiné à de l'homogénéisation. Cette mise à l'échelle de (1) correspond à un libre parcours moyen des particules de l'ordre de ε . L'équation (1) est un problème aux valeurs propres qui exprime l'équilibre entre les termes de transport, d'absorption et de collision à gauche et le terme de production à droite. En neutronique, (1) est connu sous le nom de problème de criticité et il est utilisé par les ingénieurs pour prédire le fonctionnement d'un réacteur nucléaire en régime permanent. L'inconnue est la première fonction propre $\phi^\varepsilon(x, v)$ (la seule positive qu'on peut interpréter comme un flux neutronique) et la première valeur propre λ^ε . Si $\lambda^\varepsilon = 1$, il y a équilibre parfait entre production et dissipation des neutrons (la réaction nucléaire est auto-entretenu et le réacteur est dit critique), si $\lambda^\varepsilon > 1$ il n'y a pas assez de fission et le réacteur, étant sous-critique, ne peut fonctionner, tandis que si $\lambda^\varepsilon < 1$ le réacteur est sur-critique et ne peut fonctionner que si l'on introduit des absorbants supplémentaires. Il existe d'autres applications physiques de (1) comme le transport photonique, le transfert radiatif et les semi-conducteurs.

Depuis les premiers travaux de Larsen [17, 18, 19], de nombreux auteurs se sont intéressés au problème d'évolution associé à (1) (voir par exemple [8], [11], [14], [15], [24]). Le problème aux valeurs propres a été plus spécifiquement étudié dans [2], [7]. Dans tous ces articles le cas général de coefficients dépendant à la fois de la variable macroscopique x et de la variable microscopique $y = x/\varepsilon$ n'est jamais abordé car il présente de nombreuses difficultés. Par exemple, l'article [2] suppose que les coefficients dépendent seulement de la variable rapide $y = x/\varepsilon$, mais pas de x . Au contraire, les articles [15] et [14] font une hypothèse de microréversibilité locale qui revient à dire que le comportement local de (1) dépend seulement de x et pas de $y = x/\varepsilon$. Dans ces deux cas, on obtient un comportement homogénéisé de type diffusion dans le domaine Ω .

Nous allons voir ici que dans le cas d'un vrai couplage entre les variables lente x et rapide y , et sous une hypothèse de structure géométrique générique, il se produit en plus du phénomène d'homogénéisation une localisation autour d'un point de concentration à une échelle $\sqrt{\varepsilon}$ (voir le Théorème 3.1 ci-dessous). Il s'agit d'un résultat obtenu en collaboration avec G. Bal et V. Siess [3].

Pour bien expliquer la portée de ce résultat nous rappellerons dans la section 2 les résultats de [2], [7] dans le cas purement périodique. La section 3 est consacré à l'énoncé des principaux résultats, tandis que la section 4 donne quelques éléments de démonstration.

2 Le cas purement périodique

Dans cette section on suppose que les coefficients définis par (2) sont purement périodiques, c'est-à-dire que $\Sigma \equiv \Sigma(y, v)$, $\sigma \equiv \sigma(y, v', v)$, et $f \equiv f(y, v', v)$ avec $(y, v, v') \in \mathbb{T}^N \times V \times V$. On introduit le problème de cellule (dit aussi de milieu infini)

$$\begin{aligned} v \cdot \nabla \psi(y, v) + \Sigma(y, v) \psi(y, v) &= \int_V \sigma(y, v', v) \psi(y, v') dv' \\ &+ \lambda^\infty \int_V f(y, v', v) \psi(y, v') dv' \text{ dans } \mathbb{T}^N \times V, \end{aligned} \quad (4)$$

ainsi que son adjoint

$$\begin{aligned} -v \cdot \nabla \psi^*(y, v) + \Sigma(y, v) \psi^*(y, v) &= \int_V \sigma^*(y, v', v) \psi^*(y, v') dv' \\ &+ \lambda^\infty \int_V f^*(y, v', v) \psi^*(y, v') dv' \text{ dans } \mathbb{T}^N \times V, \end{aligned} \quad (5)$$

avec les coefficients adjoints $f^*(x, y, v', v) = f(x, y, v, v')$ et $\sigma^*(y, v', v) = \sigma(y, v, v')$. Dans (4) et (5) ψ et ψ^* sont les premières fonctions propres qui sont associées à la même première valeur propre. On peut montrer de plus qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $C^{-1} \leq \psi(y, v), \psi^*(y, v) \leq C$.

On définit alors un flux de dérive par

$$J = \int_Y \int_V v \psi(y, v) \psi^*(y, v) dy dv. \quad (6)$$

Théorème 2.1 ([2]) *On suppose que le flux de dérive défini par (6) est nul, $J = 0$. Soit $(\lambda_\varepsilon^k)_{k \geq 1}$ les valeurs propres de (1) rangées par ordre croissant de leur partie réelle, et $(\phi_\varepsilon^k)_{k \geq 1}$ des vecteurs propres associés normalisés. Alors*

$$\lambda_\varepsilon^k = \lambda^\infty + \varepsilon^2 \nu^k + o(\varepsilon^2),$$

où ν^k est la k -ème valeur propre d'un problème homogénéisé de diffusion

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(D \nabla u^k) &= \nu^k \bar{\sigma} u^k \quad \text{dans } \Omega \\ u^k(x) &= 0 \quad \text{sur } \partial \Omega, \end{cases} \quad (7)$$

et, à une sous-suite près,

$$\frac{\phi_\varepsilon^k(x, v)}{\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}, v\right)} \rightarrow u^k(x) \text{ fortement dans } L^2(\Omega \times V),$$

où u^k est un vecteur propre associé à la valeur propre ν^k . Les coefficients homogénéisés sont donnés par

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \int_{\mathbb{T}^N} \int_V \int_V f(y, v', v) \psi^*(y, v') \psi(y, v) dy dv dv', \\ D_{ij} &= - \int_{\mathbb{T}^N} \int_V v_j \psi^*(y, v) \chi^i(y, v) dv dy, \end{aligned} \quad (8)$$

avec χ^i solution de

$$v \cdot \nabla \chi^i + \Sigma \chi^i = \int_V f \chi^i dv' + \lambda^\infty \int_V \sigma \chi^i dv' - v_i \psi \quad \text{dans } \mathbb{T}^N. \quad (9)$$

La condition $J = 0$ est exactement la condition de compatibilité dans l'alternative de Fredholm qui permet de résoudre l'équation (9). Une conséquence du Théorème 2.1 est que lorsque ε tend vers zéro il y a de plus en plus de valeurs propres pour (1) puisque le problème limite (7) en a une infinité. Si la valeur propre limite est simple (comme la première), alors toute la suite des vecteurs propres converge sans qu'il soit nécessaire d'extraire de sous-suite.

L'hypothèse $J = 0$ est très naturelle d'un point de vue mathématique et elle est souvent satisfaite dans les applications physiques. Elle s'interprète comme une condition de symétrie dans l'espace des phases. En effet, si $V = -V$ (au sens où $v \in V \Rightarrow -v \in V$) et si les coefficients sont isotropes (ou bien pairs en v avec une symétrie cubique en y), alors $\psi^*(y, v) = \psi(y, -v)$ et $J = 0$.

Lorsque $J \neq 0$, G. Bal a généralisé le Théorème 2.1 et montré qu'il se produit un phénomène de dérive exponentielle. Pour cela il faut introduire une variante

du problème de cellule (4) du type ondes de Bloch réelles. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}^N$ on considère le premier couple propre

$$\begin{cases} v \cdot \nabla_y \psi_\theta + \Sigma \psi_\theta = \int_V \sigma \psi_\theta dv' + \lambda^\infty(\theta) \int_V f \psi_\theta dv' & \text{dans } \mathbb{R}^N \times V \\ y \rightarrow \psi_\theta(y, v) \exp(-\theta \cdot y) \text{ } \mathbb{T}^N\text{-périodique,} \end{cases} \quad (10)$$

ainsi que la première fonction propre de l'adjoint

$$\begin{cases} -v \cdot \nabla_y \psi_\theta^* + \Sigma \psi_\theta^* = \int_V \sigma^* \psi_\theta^* dv' + \lambda^\infty(\theta) \int_V f^* \psi_\theta^* dv' & \text{dans } \mathbb{R}^N \times V \\ y \rightarrow \psi_\theta^*(y, v) \exp(\theta \cdot y) \text{ } \mathbb{T}^N\text{-périodique,} \end{cases}$$

normalisée par $\int_{\mathbb{T}^N} \int_V \int_V f \psi_\theta \psi_\theta^* dy dv dv' = 1$.

Théorème 2.2 ([7]) *Il existe un voisinage de 0 sur lequel la fonction $\theta \rightarrow \lambda^\infty(\theta)$ admet un unique point de maximum θ_0 qui vérifie*

$$\nabla \lambda^\infty(\theta_0) = J(\theta_0) = \int_{\mathbb{T}^N} \int_V v \psi_{\theta_0}(y, v) \psi_{\theta_0}^*(y, v) dy dv. \quad (11)$$

Soit $(\lambda_\varepsilon^k)_{k \geq 1}$ les valeurs propres de (1) rangées par ordre croissant de leur partie réelle, et $(\phi_\varepsilon^k)_{k \geq 1}$ des vecteurs propres associés normalisés. Alors

$$\lambda_\varepsilon^k = \lambda_\infty(\theta_0) + \varepsilon^2 \nu^k + o(\varepsilon^2),$$

où ν^k est la k -ème valeur propre d'un problème homogénéisé de diffusion

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(D_{\theta_0} \nabla u^k) & = \nu^k \bar{\sigma}_{\theta_0} u^k & \text{dans } \Omega \\ u^k(x) & = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et, à une sous-suite près,

$$\frac{\phi_\varepsilon^k(x, v)}{\psi_{\theta_0}(\frac{x}{\varepsilon}, v)} \rightarrow u^k(x) \text{ fortement dans } L^2(\Omega \times V),$$

où u^k est un vecteur propre associé à la valeur propre ν^k . Les coefficients homogénéisés sont donnés par des formules similaires à (8) où toutes les fonctions sont évaluées pour le facteur de dérive θ_0 .

La différence principale entre les Théorèmes 2.1 et 2.2 est que dans ce dernier les fonctions propres sont asymptotiquement le produit d'une fonction périodique, d'un vecteur propre homogénéisé, mais aussi d'une exponentielle $\exp(\frac{\theta_0 \cdot x}{\varepsilon})$. Par conséquent, lorsque $J \neq 0$, les fonctions propres de (1) se concentrent exponentiellement sur une partie du bord du domaine Ω . Un résultat similaire a lieu aussi pour des équations de diffusion [9].

Donnons quelques éléments de la preuve du Théorème 2.1. Une **première étape** consiste à procéder à un changement d'inconnue (principe de factorisation) en posant

$$u^\varepsilon(x, v) = \frac{\phi^\varepsilon(x, v)}{\psi(\frac{x}{\varepsilon}, v)}.$$

Le problème (1) est alors équivalent à

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} v \cdot \nabla u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} Q^\varepsilon(u^\varepsilon) = \nu^\varepsilon F^\varepsilon(u^\varepsilon) & \text{dans } \Omega \times V \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_-, \end{cases} \quad (12)$$

avec $\nu^\varepsilon = (\lambda^\varepsilon - \lambda^\infty) \varepsilon^{-2}$,

$$F^\varepsilon(u)(x, v) = \frac{1}{\psi(\frac{x}{\varepsilon}, v)} \int_V f^\varepsilon(x, v', v) \psi(\frac{x}{\varepsilon}, v') u(x, v') dv',$$

$$Q^\varepsilon(u)(x, v) = \frac{u(x, v) \int_V \sigma_\infty^\varepsilon(x, v', v) \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}, v'\right) dv' - \int_V \sigma_\infty^\varepsilon(x, v', v) \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}, v'\right) u(x, v') dv'}{\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}, v\right)},$$

avec la notation $\sigma_\infty = \sigma + \lambda^\infty f$. L'opérateur Q^ε s'interprète comme un noyau de collision qui relaxe les fonctions, dépendant de (x, v) , vers leur moyenne en vitesse, ne dépendant plus que de x . En effet, il vérifie

$$\text{Ker } Q^\varepsilon = \left\{ u \in L^2(\Omega \times V) \mid u(x, v) = \int_V u(x, v) dv \right\}.$$

L'analyse asymptotique du spectre de (12) est donnée par l'étude de la suite d'opérateurs de Green S_ε définis sur $L^2(\Omega \times V)$ par $S_\varepsilon(q) = u^\varepsilon$ où u^ε est désormais la solution de

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} v \cdot \nabla u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} Q^\varepsilon(u^\varepsilon) = F^\varepsilon(q) & \text{dans } \Omega \times V \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_- \end{cases} \quad (13)$$

En effet, S_ε a les mêmes vecteurs propres et valeurs propres (inverses) que (12).

La **deuxième étape** est donc l'homogénéisation du problème (13). Remarquons que (13) a exactement la mise à l'échelle usuelle lorsque l'on souhaite obtenir une limite de diffusion à partir d'une équation de transport. Effectivement, on peut obtenir de bonnes estimations a priori sur (13), alors que cela n'était pas possible pour l'équation d'origine (1). En multipliant (13) par $u^\varepsilon(x, v) \psi(x/\varepsilon, v) \psi^*(x/\varepsilon, v)$, en utilisant les équations (4) et (5) des problèmes de cellules et en intégrant par parties, on obtient

$$\frac{1}{\varepsilon} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_{+, |v \cdot n|})}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|u^\varepsilon - \int_V u^\varepsilon dv\|_{L^2(\Omega \times V)}^2 \leq C \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega \times V)} \|q\|_{L^2(\Omega \times V)}. \quad (14)$$

A l'aide d'une inégalité de type Poincaré, et en utilisant l'équation pour contrôler la dérivée $v \cdot \nabla u^\varepsilon$, on en déduit

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega \times V)} + \|v \cdot \nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega \times V)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_{+, |v \cdot n|})} \\ + \frac{1}{\varepsilon} \|u^\varepsilon - \int_V u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega \times V)} \leq C \|q\|_{L^2(\Omega \times V)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Avec ces estimations a priori, on peut appliquer une méthode d'homogénéisation (en l'occurrence la convergence à deux échelles [1], [21]) pour passer à la limite dans (13). On obtient ainsi la convergence forte dans $L^2(\Omega \times V)$ de la suite de solutions u^ε . Enfin, la **troisième étape** consiste à appliquer un théorème de convergence spectrale à la suite d'opérateurs S_ε . Plus précisément, on a démontré une convergence compacte collective de S_ε vers un opérateur limite S associé au problème limite (7). Ce type de convergence (plus faible que la convergence uniforme et plus fort que la convergence ponctuelle) permet d'obtenir la convergence du spectre [6].

3 Le cas périodique modulé

3.1 Notations et hypothèses

On revient maintenant au cas général des coefficients donnés par (2) qui dépendent à la fois de x et de y . Le problème de cellule est désormais paramétré par la variable macroscopique $x \in \Omega$

$$\begin{cases} v \cdot \nabla_y \psi(x, y, v) + \Sigma(x, y, v) \psi(x, y, v) = \int_V \sigma(x, y, v', v) \psi(x, y, v') dv' \\ \quad + \lambda^\infty(x) \int_V f(x, y, v', v) \psi(x, y, v') dv' \text{ dans } \mathbb{T}^N \times V, \end{cases} \quad (16)$$

où $\lambda^\infty(x)$ est la première valeur propre et $\psi(x, y, v)$ la première fonction propre. De même, le problème adjoint de cellule est

$$\begin{cases} -v \cdot \nabla_y \psi^*(x, y, v) + \Sigma(x, y, v) \psi^*(x, y, v) = \int_V \sigma^*(x, y, v', v) \psi^*(x, y, v') dv' \\ + \lambda^\infty(x) \int_V f^*(x, y, v', v) \psi^*(x, y, v') dv' \text{ dans } \mathbb{T}^N \times V, \end{cases}$$

avec les notations $f^*(x, y, v', v) = f(x, y, v, v')$ et $\sigma^*(x, y, v', v) = \sigma(x, y, v, v')$.

On fait alors une hypothèse de structure sur le comportement de la valeur propre $\lambda^\infty(x)$. On suppose qu'elle admet un unique point de minimum dans Ω (sans perte de généralité, ce point de minimum est l'origine) qui n'est pas dégénéré

$$\lambda^\infty(x) = \lambda^\infty(0) + \frac{1}{2} \nabla \nabla \lambda^\infty(0) x \cdot x + o(|x|^2), \quad (17)$$

où le Hessien $\nabla \nabla \lambda^\infty(0)$ est une matrice définie positive.

L'hypothèse (17) est en quelque sorte générique dès que l'on s'intéresse à une valeur propre $\lambda^\infty(x)$ non constante. Mentionnons au moins un cas où elle est explicitement vérifiée : il suffit de prendre $\Sigma(x, y, v) = \Sigma^0(y, v)$, $\sigma(x, y, v', v) = \sigma^0(y, v', v)$ et $f(x, y, v', v) = k(x) f^0(y, v', v)$ de telle manière que $\lambda^\infty(x) = \lambda^0/k(x)$, et (17) est vérifiée pour une fonction $k(x)$ proprement choisie.

Comme précédemment on introduit le flux de dérive

$$J(x) = \int_{\mathbb{T}^N} \int_V v \psi(x, y, v) \psi^*(x, y, v) dy dv. \quad (18)$$

On suppose encore que $J(0) = 0$ et nous renvoyons à la section précédente pour une discussion de cette hypothèse (voir cependant [3] pour un cas où on peut se passer de cette hypothèse).

3.2 Le problème homogénéisé

A cause d'un phénomène de localisation au point de minimum de $\lambda^\infty(x)$, on introduit une nouvelle variable d'espace $z = x/\sqrt{\varepsilon}$ et le problème homogénéisé est une équation de diffusion dans l'espace \mathbb{R}^N tout entier. Il s'agit en fait d'une équation de convection-diffusion avec un potentiel d'oscillateur harmonique

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\overline{D} \nabla u) + (\overline{A} z \cdot z + \overline{\gamma}) u + z \cdot (\overline{B}^* \nabla u) = \lambda \overline{\sigma} u \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L_z^2(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (19)$$

où $L_z^2(\mathbb{R}^N) = \{u(z) \in L^2(\mathbb{R}^N), |z| u(z) \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$. Les coefficients homogénéisés sont donnés par des formules similaires à celles de la section précédente

$$\begin{cases} \overline{\sigma} = \int_{\mathbb{T}^N} \int_V \int_V f(0, y, v', v) \psi(0, y, v') \psi^*(0, y, v) dy dv dv', \\ \overline{\gamma} = \int_{\mathbb{T}^N} \int_V v \cdot \nabla_x \psi(0, y, v) \psi^*(0, y, v) dy dv, \\ \overline{A}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \lambda^\infty}{\partial x_i \partial x_j}(0) \int_{\mathbb{T}^N} \int_V \int_V f(0, y, v', v) \psi(0, y, v') \psi^*(0, y, v) dy dv dv', \\ \overline{D}_{ij} = - \int_{\mathbb{T}^N} \int_V v_i \psi^*(0, y, v) \chi^j(y, v) dy dv, \\ \overline{B}_{ij} = \frac{\partial J_j}{\partial x_i}(0), \end{cases} \quad (20)$$

où les fonctions $\chi^j(y, v)$ sont les solutions de

$$v \cdot \nabla_y \chi^j + \Sigma \chi^j = \int_V \sigma \chi^j dv' + \lambda^\infty(0) \int_V f \chi^j dv' - v_j \psi \text{ dans } \mathbb{T}^N \times V. \quad (21)$$

avec des coefficients, ainsi que le terme source ψ , évalués au point de concentration $x = 0$. En vertu de l'alternative de Fredholm, l'hypothèse $J(0) = 0$ est précisément la condition pour l'existence d'une solution χ^j de (21).

Il est bien connu que le problème spectral (19) est compact dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ grâce au potentiel quadratique. Il n'est cependant pas autoadjoint en général. Néanmoins, par le théorème de Krein-Rutman il admet une première valeur propre réelle positive simple avec une première fonction propre positive.

L'équation homogénéisée est bien connue en mécanique quantique sous le nom d'oscillateur harmonique. Ses fonctions propres peuvent se calculer explicitement. En particulier, le premier couple propre est

$$u_1(z) = \exp\left(-\frac{Mz \cdot z}{2}\right), \quad \lambda^1 = \frac{\text{Tr}(M\bar{D}) + \bar{\gamma}}{\bar{\sigma}},$$

où M est une matrice, solution de l'équation de Riccati

$$M\bar{D}^s M + \bar{B}M + M\bar{B}^* = \bar{A}, \quad (22)$$

avec \bar{D}^s la partie symétrique de \bar{D} , et les matrices \bar{D} , \bar{B} , \bar{A} sont définies par (20). Comme \bar{D}^s et \bar{A} sont définies positives, il existe une unique matrice symétrique définie positive M solution de (22) (voir par exemple [23]).

3.3 Théorème de convergence

Le principal résultat est le suivant.

Théorème 3.1 ([3]) *Soit $(\lambda^\infty(x), \psi(x, y, v))$ le premier couple propre du problème de cellule (16). On suppose que 0 est l'unique point de minimum de $\lambda^\infty(x)$, non dégénéré au sens de (17), et que le flux de dérive est nul en ce point, $J(0) = 0$. Soit $(\lambda_m)_{1 \leq m \leq m_\infty}$ et $(\lambda_m^\varepsilon)_m$ les valeurs propres (répétées selon leur multiplicité et rangées par ordre croissant de leur partie réelle) du problème homogénéisé (19) et du problème d'origine (1), respectivement. Alors, pour tout $m \in \{1, \dots, m_\infty\}$ et pour ε suffisamment petit, il existe une m -ème valeur propre λ_m^ε de (1) et elle vérifie*

$$\lambda_m^\varepsilon = \lambda^\infty(0) + \varepsilon \lambda_m + o(\varepsilon).$$

Si ϕ_m^ε est un vecteur propre normalisé correspondant de (1), alors il vérifie

$$\phi_m^\varepsilon(x, v) = \psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, v\right) u_m^\varepsilon\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, v\right), \quad (23)$$

où, à une sous-suite près, $\varepsilon^{N/4} u_m^\varepsilon(z, v)$ (étendu convenablement à $\mathbb{R}^N \times V$) converge vers $u_m(z)$ fortement dans $L^2(\mathbb{R}^N \times V)$, et u_m est une fonction propre associée à λ_m du problème homogénéisé (19). De plus, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \phi_m^\varepsilon(x, v) - \varepsilon^{-N/4} \psi\left(0, \frac{x}{\varepsilon}, v\right) u_m\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \right\|_{L^2(\Omega \times V)} = 0. \quad (24)$$

Le coefficient $\varepsilon^{N/4}$ dans le Théorème 3.1 provient de la normalisation $\|\phi_m^\varepsilon\|_{L^2(\Omega \times V)} = 1$ qui implique que $\|\varepsilon^{N/4} u_m^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^N \times V)}$ est de l'ordre de l'unité. Si la valeur propre

limite est simple (comme la première, par exemple), alors toute la suite des fonctions propres converge, sans qu'il soit nécessaire d'extraire de sous-suite.

Même lorsque les coefficients n'oscillent pas (c'est-à-dire qu'ils ne dépendent pas de y), le Théorème 3.1 semble être nouveau. Ce résultat est en fait une extension d'une étude similaire faite dans [5] pour une équation de diffusion (d'autres résultats du même type en diffusion peuvent être trouvés dans [4], [16], [22]).

Remarque 3.2 *Il est possible d'effectuer des développements asymptotiques formels pour la première fonction propre de (1)*

$$\begin{cases} \phi_1^\varepsilon(x, v) = \exp\left(-\frac{Mx \cdot x}{2\varepsilon}\right) \left[\psi\left(0, \frac{x}{\varepsilon}, v\right) + x_k \phi_k^1\left(\frac{x}{\varepsilon}, v\right) + x_k x_l \phi_{kl}^2\left(\frac{x}{\varepsilon}, v\right) \right. \\ \left. + \varepsilon \phi^3\left(\frac{x}{\varepsilon}, v\right) + r^\varepsilon(x, v) \right], \\ \lambda^\varepsilon = \lambda^0 + \varepsilon \lambda^1 + o(\varepsilon). \end{cases}$$

La technique des développements à deux échelles couplée à un développement de Taylor à l'ordre deux en x au voisinage de zéro permet de retrouver formellement les résultats du Théorème 3.1.

4 Eléments de démonstration

La démonstration du Théorème 3.1 comporte quatre étapes. La **première étape** est encore un changement d'inconnue (principe de factorisation). On pose

$$u^\varepsilon(x, v) = \frac{\phi^\varepsilon(x, v)}{\psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, v\right)},$$

et (1) est équivalent à

$$\begin{cases} v \cdot \nabla u^\varepsilon + \alpha^\varepsilon u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} Q^\varepsilon(u^\varepsilon) + \frac{\lambda^\infty(x) - \lambda^\infty(0)}{\varepsilon} F^\varepsilon(u^\varepsilon) = \mu^\varepsilon F^\varepsilon(u^\varepsilon) & \text{dans } \Omega \times V \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_-, \end{cases} \quad (25)$$

avec

$$\begin{cases} \mu^\varepsilon = \frac{\lambda^\varepsilon - \lambda^\infty(0)}{\varepsilon} \\ Q^\varepsilon(u)(x, v) = \frac{u(x, v)}{\psi^\varepsilon(x, v)} \int_V \sigma_\infty^\varepsilon(x, v', v) \psi^\varepsilon(x, v') dv' \\ \quad - \frac{1}{\psi^\varepsilon(x, v)} \int_V \sigma_\infty^\varepsilon(x, v', v) \psi^\varepsilon(x, v') u(x, v') dv' \\ F^\varepsilon(u)(x, v) = \frac{1}{\psi^\varepsilon(x, v)} \int_V f^\varepsilon(x, v', v) \psi^\varepsilon(x, v') u(x, v') dv' \\ \alpha^\varepsilon(x, v) = \frac{v \cdot (\nabla_x \psi)^\varepsilon(x, v)}{\psi^\varepsilon(x, v)}. \end{cases} \quad (26)$$

Remarquons que, par rapport au cas périodique de la section 2, il manque un facteur ε^{-1} dans l'équation (25). Cela est dû en partie au terme supplémentaire $\alpha^\varepsilon u^\varepsilon$ qui n'a pas de signe bien défini et qu'on ne peut pas contrôler par le terme $Q^\varepsilon(u^\varepsilon)$ dans une estimation a priori. C'est pourquoi on a besoin d'une étape supplémentaire de mise à l'échelle qui n'était pas nécessaire dans le purement périodique.

La **deuxième étape** est donc un changement de variables qui permet de faire un zoom sur le point de concentration

$$\begin{cases} \Omega \longrightarrow \Omega^\varepsilon = \varepsilon^{-1/2} \Omega \\ x \longmapsto z = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \end{cases} \quad (27)$$

Pour toute fonction $g(x, y, v)$, définie sur $\Omega \times \mathbb{T}^N \times V$, on introduit la notation

$$\tilde{g}^\varepsilon(z, v) = g\left(\sqrt{\varepsilon}z, \frac{z}{\sqrt{\varepsilon}}, v\right), \text{ avec } z = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \in \Omega^\varepsilon.$$

On définit de la même manière des opérateurs \tilde{Q}^ε et \tilde{F}^ε à partir de Q^ε et F^ε . On vérifie alors que l'équation (25) devient

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}v \cdot \nabla \tilde{u}^\varepsilon + \tilde{\alpha}^\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \tilde{Q}^\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon) + \frac{\lambda^\infty(\sqrt{\varepsilon}z) - \lambda^\infty(0)}{\varepsilon} \tilde{F}^\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon) = \mu^\varepsilon \tilde{F}^\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon) \\ \tilde{u}^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_-^\varepsilon. \end{cases} \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon \times V, \quad (28)$$

La justification du changement d'échelle (27) vient de ce qu'avec l'hypothèse (17) de concentration en 0, le terme $2\varepsilon^{-1}(\lambda^\infty(\sqrt{\varepsilon}z) - \lambda^\infty(0))$ se comporte comme $\nabla \nabla \lambda^\infty(0)z \cdot z$ au voisinage de l'origine, et n'est donc plus singulier en ε . De même, la mise à l'échelle de (28) est exactement du type de celle qui permet d'obtenir une limite de diffusion à partir d'une équation de transport, en prenant garde que le petit paramètre est désormais $\sqrt{\varepsilon}$ (c'est aussi la période d'oscillation des coefficients).

L'analyse asymptotique du spectre de (28) est donnée par l'étude de la suite d'opérateurs de Green S_ε définis sur $L^2(\mathbb{R}^N \times V)$ par $S^\varepsilon(\tilde{q}) = \tilde{u}^\varepsilon$ où \tilde{u}^ε est désormais la solution de

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}v \cdot \nabla \tilde{u}^\varepsilon + \tilde{\alpha}^\varepsilon \tilde{u}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \tilde{Q}^\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon) + \left(\frac{\lambda^\infty(\sqrt{\varepsilon}z) - \lambda^\infty(0)}{\varepsilon}\right) \tilde{F}^\varepsilon(\tilde{u}^\varepsilon) = \tilde{F}^\varepsilon(\tilde{q}) \text{ dans } \Omega^\varepsilon \times V \\ \tilde{u}^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_-^\varepsilon, \end{cases} \quad (29)$$

et on étend \tilde{u}^ε à $\mathbb{R}^N \times V$ en imposant

$$v \cdot \nabla \tilde{u}^\varepsilon + e^{\frac{1}{\varepsilon}} \tilde{u}^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } (\mathbb{R}^N \setminus \Omega^\varepsilon) \times V,$$

la continuité de $\tilde{u}^\varepsilon(x, v)$ à travers $\partial\Omega^\varepsilon \times V$, et en supposant qu'aucune particule n'arrive de l'infini. Clairement, S^ε a les mêmes vecteurs propres et valeurs propres (inverses) que (28).

Le **troisième étape** est l'étude de l'homogénéisation de (29). Grâce à sa "bonne" mise à l'échelle on peut obtenir des estimations a priori sur (29).

Lemme 4.1 *Soit \tilde{u}^ε la solution de (29). Il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε et de \tilde{q} telle que*

$$\begin{aligned} & \|\tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon \times V)} + \|v \cdot \nabla \tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon \times V)} + \left\| |z| \int_V \tilde{u}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon \times V)} \\ & + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left\| \tilde{u}^\varepsilon - \int_V \tilde{u}^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon \times V)} + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{4}}} \|\tilde{u}^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_{+, |v \cdot n|}^\varepsilon)} \leq C \|\tilde{q}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon \times V)}. \end{aligned}$$

avec $L^2(\Gamma_{+, |v \cdot n|}^\varepsilon)$ l'espace des traces u vérifiant $\int_{\Gamma_{+, |v \cdot n|}^\varepsilon} (v \cdot n) |u|^2 d\Gamma < \infty$ (on rappelle que $\Gamma_{+, |v \cdot n|}^\varepsilon = \{(x, v) \in \partial\Omega^\varepsilon \times V \mid v \cdot n(x) > 0\}$ et $d\Gamma = dv d\sigma$ où $d\sigma$ est la mesure surfacique sur $\partial\Omega^\varepsilon$).

La démonstration du Lemme 4.1 commence par l'obtention d'une égalité d'énergie en multipliant (29) par $\tilde{u}^\varepsilon \tilde{\psi}^\varepsilon \tilde{\psi}^{*\varepsilon}$ et en utilisant les équations de cellule (16). La borne sur $|z| \int_V \tilde{u}^\varepsilon dv$ utilise encore l'hypothèse (17) de non-dégénérescence de $\lambda^\infty(x)$ au point de concentration.

Une fois les estimations a priori obtenues on passe à l'homogénéisation de (29) proprement dite. Il est commode d'utiliser la méthode de la convergence à deux échelles [1], [21]. Rappelons brièvement de quoi il s'agit. Comme la période des oscillations est $\sqrt{\varepsilon}$ dans notre contexte, la définition de la convergence à deux échelles est la suivante.

Définition 4.2 Une suite de fonctions $g^\varepsilon(x, v)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N \times V)$ converge à deux échelles vers une limite $g(x, y, v) \in L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{T}^N \times V)$ si, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times V; \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^N))$, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \int_V g^\varepsilon(x, v) \psi \left(x, \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, v \right) dx dv = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{T}^N} \int_V g(x, y, v) \psi(x, y, v) dx dy dv,$$

où $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^N)$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur le tore unité.

Cette définition est naturelle au vu du résultat suivant de compacité.

Théorème 4.3 ([1], [21]) Soit $g^\varepsilon(x, v)$ une suite bornée dans $L^2(\mathbb{R}^N \times V)$. Alors il existe une limite $g(x, y, v) \in L^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{T}^N \times V)$ telle que, à une sous-suite près, g^ε converge à deux échelles vers g .

Les estimations a priori du Lemme 4.1 permettent de montrer qu'il existe $u^0(z) \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L_z^2(\mathbb{R}^N)$ et $u^1(z, y, v) \in L^2(\mathbb{R}^N \times V; H^1(\mathbb{T}^N))$ tels que, à une sous-suite près, $\tilde{u}^\varepsilon(z, v)$ converge fortement vers $u^0(z)$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, $v \cdot \nabla \tilde{u}^\varepsilon$ converge à deux échelles vers $v \cdot \nabla_z u^0 + v \cdot \nabla_y u^1$, et $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\tilde{u}^\varepsilon - \int_V \tilde{u}^\varepsilon)$ converge à deux échelles vers $u^1 - \int_V u^1$.

En multipliant l'équation (29) par une fonction test régulière à support compact du type $\sqrt{\varepsilon} \phi(z, z/\varepsilon, v)$, on montre alors facilement que la limite u^1 est donnée par

$$u^1(z, y, v) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial u^0}{\partial z_j}(z) \theta^j(y, v),$$

où $\theta^j(y, v)$ est la solution (unique à une constante additive près) de

$$v \cdot \nabla_y \theta^j + Q(0, \theta^j) = -v_j \quad \text{dans } \mathbb{T}^N \times V. \quad (30)$$

L'opérateur $Q(x, \cdot)$ est défini par

$$Q(x, u)(y, v) = \frac{u(y, v)}{\psi(x, y, v)} \int_V \sigma_\infty(x, y, v', v) \psi(x, y, v') dv' - \frac{1}{\psi(x, y, v)} \int_V \sigma_\infty(x, y, v', v) \psi(x, y, v') u(y, v') dv'.$$

Puis, on multiplie l'équation (29) par une fonction test du type

$$\phi^\varepsilon(z, v) = \phi(z) + \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi}{\partial z_j}(z) \theta^{*j} \left(\frac{z}{\sqrt{\varepsilon}}, v \right).$$

où $\phi(z)$ est régulière à support compact, et θ^{*j} est la solution de l'équation adjointe de (30). Après simplification et passage à la limite on obtient que la suite $\tilde{u}^\varepsilon(z, v)$ converge fortement dans $L^2(\mathbb{R}^N \times V)$ vers $u^0(z)$, solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\overline{D} \nabla u) + (\overline{A} z \cdot z + \overline{\gamma}) u + z \cdot (\overline{B}^* \nabla u) = \overline{F}(\tilde{q}), \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L_z^2(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (31)$$

où \overline{D} , \overline{A} , \overline{B} , $\overline{\sigma}$, et $\overline{\gamma}$ sont donnés par (20) et

$$\overline{F}(\tilde{q}) = \int_{\mathbb{T}^N} \int_V \int_V f(0, y, v', v) \psi(0, y, v') q(z, v') \psi^*(0, y, v) dy dv dv'.$$

Le **quatrième étape** consiste à appliquer un théorème de convergence spectrale à la suite d'opérateurs de Green S_ε définis par l'équation (29). On vient de montrer

que la suite S_ε converge ponctuellement (pour la topologie forte de $L^2(\mathbb{R}^N \times V)$) vers un opérateur limite S défini sur $L^2(\mathbb{R}^N \times V)$ par $Sq = u$ où u est la solution unique de l'équation homogénéisée (31). L'opérateur S est compact puisque $H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2_\varepsilon(\mathbb{R}^N)$ s'injecte compactement dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. On a en fait une convergence plus forte que la simple convergence ponctuelle de S_ε . En effet, il est facile de vérifier le corollaire suivant de la troisième étape.

Corollaire 4.4 *Soit \tilde{q}^ε une suite bornée de $L^2(\mathbb{R}^N \times V)$. Soit \tilde{u}^ε la suite des solutions de (29), où \tilde{q} a été remplacé par \tilde{q}^ε . Alors, après extension convenable à tout \mathbb{R}^N , la suite \tilde{u}^ε est relativement compacte dans $L^2(\mathbb{R}^N \times V)$.*

On déduit du Corollaire 4.4 que la suite S^ε converge de manière collectivement compacte vers S au sens de [6], c'est-à-dire que S est compact et pour toute suite \tilde{q}^ε bornée dans $L^2(\mathbb{R}^N \times V)$, la suite $S^\varepsilon(\tilde{q}^\varepsilon)$ est relativement compacte dans $L^2(\mathbb{R}^N \times V)$. Ce type de convergence (plus faible que la convergence uniforme et plus fort que la convergence ponctuelle) permet d'obtenir la convergence du spectre [6].

Références

- [1] G. ALLAIRE, *Homogenization and two scale convergence*, SIAM, 23 (1992), pp. 1482–1518.
- [2] G. ALLAIRE AND G. BAL, *Homogenization of the critically spectral equation in neutron transport*, M2AN, 33 (1999), pp. 721–746.
- [3] G. ALLAIRE, G. BAL AND V. SIESS, *Homogenization and localization in locally periodic transport*, to appear in ESAIM/COCV.
- [4] G. ALLAIRE AND Y. CAPDEBOSCQ, *Homogenization of a spectral problem in neutronic multigroup diffusion*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 187, (2000), pp. 91–117.
- [5] G. ALLAIRE AND A. PIATNITSKI, *Uniform spectral asymptotics for singularly perturbed locally periodic operators*, Com. in PDE 27, (2002), pp. 705–725.
- [6] P. ANSELONE, *Collectively compact operator approximation theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.
- [7] G. BAL, *Homogenization of a spectral equation with drift in linear transport*, ESAIM COCV 6 (26), (2001), pp. 613–627.
- [8] A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS, AND G. PAPANICOLAOU, *Boundary layer and homogenization of transport processes*, Publ. RIMS Kyoto Univ., (1979), pp. 53–157.
- [9] Y. CAPDEBOSCQ, *Homogenization of a neutronic critical diffusion problem with drift*, Roy. Soc. Edin. Proc. A, 132, (2002), pp. 1–28.
- [10] R. DAUTRAY AND J.-L. LIONS, *mathematical analysis and numerical methods for science and technology*, Springer Verlag, Berlin, 1993.
- [11] P. DEGOND, T. GOUDON, AND F. POUPAUD, *Diffusion limit for nonhomogeneous and non-micro-reversible processes*, Indiana Univ. Math. J. 49, (2000), pp. 1175–1198.
- [12] F. GOLSE, P. L. LIONS, B. PERTHAME, AND R. SENTIS, *Regularity of the moments of the solution of a transport equation*, Journal of functional analysis 76, (1988), pp. 110–125.
- [13] F. GOLSE, B. PERTHAME, AND R. SENTIS, *Un résultat de compacité pour les équations de transport et application au calcul de la limite de la valeur propre principale d'un opérateur de transport*, C. R. Acad. Sc. Paris, (1985), pp. 341–344.

- [14] T. GOUDON AND A. MELLET, *Discrete version of the SHE asymptotics : multigroup neutron transport equations*, preprint.
- [15] T. GOUDON AND F. POUPAUD, *Approximation by homogenization and diffusion of kinetic equations*, Comm. Partial Differential Equations 26, (2001), pp. 537–569.
- [16] S. KOZLOV, *Reductibility of quasiperiodic differential operators and averaging*, Transc. Moscow Math. Soc. 2, (1984), pp. 101–126.
- [17] E. LARSEN, *Neutron transport and diffusion in inhomogeneous media i*, J. Math. Phys., (1975), pp. 1421–1427.
- [18] E. LARSEN, *Neutron transport and diffusion in inhomogeneous media ii*, Nuclear science and engineering, (1976), pp. 357–368.
- [19] E. LARSEN AND J. KELLER, *Asymptotic solution of neutron transport problems for small mean free paths*, J. Math. Phys., (1974), pp. 75–81.
- [20] M. MOKHTAR-KHAROUBI, *Mathematical topics in neutron transport theory*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1997.
- [21] NGUETSENG, G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.*, 20 (1989), 608–623.
- [22] A. PIATNITSKI, *Asymptotic behaviour of the ground state of singularly perturbed elliptic equations*, Commun. Math. Phys. 197, (1998), pp. 527–551.
- [23] J. E. POTTER, *Matrix quadratic solutions*, J. Siam Appl. Math., 14, (1966), pp. 496–501.
- [24] R. SENTIS, *Study of the corrector of the eigenvalue of a transport operator*, SIAM J. Math. Anal., (1985), pp. 151–166.