Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2001-2002

Nicolas Burq

Estimations de Strichartz pour des perturbations à longue portée de l'opérateur de Schrodinger

Séminaire É. D. P. (2001-2002), Exposé n° X, 8 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2001-2002____A10_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

ESTIMATIONS DE STRICHARTZ POUR DES PERTURBATIONS À LONGUE PORTÉE DE L'OPÉRATEUR DE SCHRODINGER.

par

Nicolas Burq

Résumé. — On présente dans cet exposé une approche semi-classique déduite des résultats de N. Burq, P. Gérard et N. Tzvetkov [**4**] permettant de démontrer des inégalités de Strichartz pour un problème non captif. On retrouve ainsi des résultats de G. Staffilani et D. Tataru [**16**] (obtenus pour une perturbation de la métrique à support compact). On donne aussi des généralisations de ces résultats au cas d'une perturbation à longue portée

1. Introduction

Considérons $g = (g_{i,j}(x))$ une métrique sur $\mathbb{R}^d$, Δ_g l'opérateur de Laplace Beltrami correspondant sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $u = e^{it\Delta_g}u_0$ la solution de l'équation de Schrödinger

$$(i\partial_t + \Delta_g)u = 0, \qquad u\mid_{t=0}= u_0 \tag{1.1}$$

Il est connu depuis les travaux de Ginibre-Velo [**9, 10**], Kato [**11**], Yajima [**19**], Cazenave-Weissler [**5**], que dans le cas où $g_{i,j}(x) = \delta_{i,j}$, on les estimations suivantes :

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^p(\mathbb{R},L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{1.2}$$

où p, q vérifient la condition de changement d'échelle :

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2} \tag{1.3}$$

et vérifent de plus $p \geq 2$, $(p,q) \neq (2,\infty)$ (dans le cas $p = 2$, on renvoie à l'article de M. Keel et T. Tao [**12**]). Une question naturelle est de se demander dans quelle mesure ces estimations (fondamentales pour la résolution des équations de Schrödinger non linéaires) sont stables quand on perturbe la métrique. Un début de réponse à cete question a été apporté par le travail de G. Staffilani et D. Tataru [**16**] qui démontrent que pour une perturbation C^2 *à support compact en x et non captive* (voir la définition à la section 2) alors l'estimation (1.2) reste vraie (au moins localement en temps). Par ailleurs, dans [**4**], des inégalités de Strichartz avec perte d'une demi dérivée ont été obtenus pour les solutions de l'équation de Schrödinger sur une variété compacte, en utilisant une approche semi-classique. Le but de cet exposé est de montrer comment cette approche semi-classique permet d'obtenir et de réinterpréter les résultats de G. Staffilani et D. Tataru. On présentera aussi quelques extensions de leurs résultats.

2. Hypothèses, effet régularisant

On considère une métrique $g = (g_{i,j}(x)) \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant les hypothèses suivantes :

1. La métrique g est une perturbation à longue portée de la métrique euclidienne :

$$\exists \varepsilon > 0; \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\partial_x^\alpha (g_{i,j}(x) - \delta_{i,j})| \leq \frac{C_\alpha}{(1+|x|)^{\varepsilon+|\alpha|}}. \tag{2.1}$$

2. La métrique g est non captive : tout courbe géodésique , $\gamma(s), s \in \mathbb{R}$, vérifie

$$\lim_{s\to\mp\infty} \gamma(s) = \infty \tag{2.2}$$

Notons

$$I = \begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } d \geq 3 \text{ et } g_{i,j}(x) = \delta_{i,j} \text{ pour } |x| >> 1, \\ [0,1] \text{ sinon.} \end{cases} \tag{2.3}$$

On a alors l'effet régularisant suivant :

Théorème 1. — *Sous les hypothèses précédentes et si I est défini par*(2.3), *alors pour tout* $s > 1/2$,

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \|\langle x\rangle^{-s} e^{it\Delta_g} u_0\|_{L^2(I;H^{1/2}(\mathbb{R}^d))} \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.4}$$

En effet, dans le cas général ($I = [0,1]$), ce théorème est démontré dans un cadre plus général par Doï [**8, 7**]. Dans le cas particulier d'une perturbation à support compact ($I = \mathbb{R}$), on obtient ce résultat comme conséquences des estimations sur la résolvante sortante $(-\Delta_g - (\lambda - i0)^2)^{-1}$ suivantes (voir [**1**]). On pourrait aussi retrouver le premier cas de la même manière, la différence entre ces deux cas est qu'on est capable dans le deuxième cas de démontrer les estimations pour les basses fréquences :

Proposition 2.1. — *Sous les hypothèses ci dessus, la résolvante de l'opérateur Δ_g, $(-\Delta_g-\lambda)^{-1}$ (qui est analytique dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^+$) vérifie :*

$$\begin{gathered} \forall s > 1/2, a > 0, \exists C > 0; \forall 0 < \varepsilon << 1, \lambda \in \mathbb{R}; |\lambda| \geq a, \\ \|\langle x\rangle^{-s}(-\Delta_D - (\lambda \pm i\varepsilon))^{-1}\langle x\rangle^{-s}\|_{L^2\to L^2} \leq \frac{C}{1+\sqrt{|\lambda|}} \end{gathered} \tag{2.5}$$

De plus si $g_{i,j}(x) = \delta_{i,j}$ for $|x| >> 1$ (perturbation à support compact), on peut choisir $a = 0$.

Ce résultat a été obtenu avec une généralité de plus en plus grande pour $|\lambda| >> 1$ par P. Lax et R. Phillips [**13**], R. Melrose et J. Sjöstrand [**14, 15**]), T. Tang et M. Zworski [**17**] (voir aussi [**3**] pour une preuve auto contenue). La preuve pour $|\lambda| << 1$ peut être trouvée dans [**2**, Annexe B.2] (dans le cas d'un problème de Dirichlet ; cependant une adaptation de la preuve permet de généraliser au cas étudié ici). On renvoie aussi aux travaux de B. Vainberg [**18**].

3. Inégalités de Strichartz semi-classiques

Dans [**4**] on a démontré le résultat suivant :

Proposition 3.1. — *Sous les hypothèses de la section précédente, pour toute fonction* $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^*)$*,il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* $0 < h < h_0$,

$$\|e^{it\Delta_g}\Psi(h^2\Delta_g)u_0\|_{L^p([0,h],L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{3.1}$$

où p, q vérifient la conditions de changement d'échelle (1.3)

Remarque 3.2. — *Les hypothèses dans* [**4**] *sont moins restrictives que celles que nous imposons. En effet, aucune hypothèse de non capture n'est nécessaire, pas plus que la convergence vers la métrique euclidienne de g. On utilise en effet seulement que la métrique g est bornée dans* C_b^∞ *et qu'il existe* $c, C > 0$ *tels que pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$, $cId \leq g(x) \leq CId$. *Cette remarque sera importante à la section suivante.*

Remarque 3.3. — *Par invariance par translation du temps (et conservation de la norme* L^2*) la relation* (3.1) *reste vraie si on remplace l'intervalle* $[0, h]$ *par n'importe quel intervalle de taille h et plus généralement (en changeant C) de taille Kh.*

Remarque 3.4. — *La proposition 3.1 peut être obtenue comme conséquence d'un résultat intermédiaire de G. Staffilani et D. Tataru* [**16**]

Rappelons rapidement la stratégie suivie dans [**4**] pour démontrer ce résultat : On note $u(t, x) = e^{it\Delta_g}\Psi(h^2\Delta_g)u_0$ et $v(s, x) = e^{ihs\Delta_g}\Psi(h^2\Delta_g)u_0 = u(hs, x)$ solution de l'équation de Schrödinger semi-classique :

$$(ih\partial_s + h^2\Delta_g)v = 0, \qquad v\mid_{t=0} = \Psi(h^2\Delta_g)u_0 \tag{3.2}$$

On peut alors en utilisant des techniques semi-classiques standard, écrire une paramétrixe pour v et temps s petit, ce qui permet, en appliquant une formule de phase stationnaire, de démontrer une estimation de dispersion pour $|s| \leq \varepsilon$:

$$\|e^{ihs\Delta_g}\Psi(h^2\Delta_g)u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C}{(hs)^{d/2}}\|\Psi(h^2\Delta_g)u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}. \tag{3.3}$$

Revenant à u on obtient une estimation de dispersion en temps $|t| \leq \varepsilon h$ qui implique une inégalité de Strichartz (voir [**12**]) sur tout intervalle de temps I de taille h.

4. Perturbation à support compact

On suppose dans cette partie que $g_{i,j}(x) = \delta_{i,j}$ pour $|x| >> 1$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 2. — *Soit g une métrique vérifiant les hypothèses 1) et 2) de la section 2 et telle que* $g_{i,j}(x) = \delta_{i,j}$ *pour* $|x| >> 1$. *Alors pour tous* (p, q) *vérifiant la condition* (1.3) *et* $p > 2$, *on a*

$$\|e^{it\Delta_g}u_0\|_{L^p(\mathbb{R},L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.1}$$

Remarque 4.1. — *La version locale en temps de ce résultat est due à G. Staffilani et D. Tataru. Le caractère global (en temps) est ici du au caractère global en temps de l'effet régularisant. Notre but ici est juste de montrer comment l'approche semi-classique permet de réinterpréter leur résultat.*

La stratégie pour démontrer le Théorème 2 consiste à décomposer $u = e^{it\Delta_g}u_0$ en somme de deux termes $u = \chi u + (1-\chi)u$ où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est égale à 1 près de la région où $g \neq (\delta_{i,j})$. Notons $v = \chi u$ et $w = (1-\chi)u$.

4.1. Etude de $v = \chi u$. — On a

$$(i\partial_t + \Delta_g)v = [\Delta_g, -\chi]u, \qquad v\mid_{t=0} = \chi u_0 \tag{4.2}$$

Soient $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^*)$, $\varphi \in C_0^\infty(]-1,2[$ égale à 1 sur $[0,1]$. Notons $v_h = \Psi(h^2\Delta_g)v$ et pour $l \in \mathbb{Z}$, $v_{h,l} = \varphi(t/h - l)v_h$, solution de

$$(i\partial_t + \Delta_g)v_{h,l} = \varphi(t/h-l)\Psi(h^2\Delta_g)[\Delta_g,\chi]u + i\frac{\varphi'(t/h-l)}{h}\Psi(h^2\Delta_g)\chi, \tag{4.3}$$

$$v_{h,l}\mid_{t<hl-h} = 0, \qquad v_{h,l}\mid_{t>hl+2h} = 0 \tag{4.4}$$

Si on note $V_{h,l}$ le second membre dans (4.3), la Proposition 3.1, la formule de Duhamel et l'inégalité de Minkovski impliquent

$$\begin{aligned}\|v_{h,l}\|_{L^p([hl-h,hl+2h];L^q(\mathbb{R}^d))} &\le C\int_{hl-h,hl+2h}\|V_{h,l}(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}ds\\ &\le Ch^{1/2}\|V_{h,l}\|_{L^2([hl-h,hl+2h];L^2(\mathbb{R}^d))}\end{aligned} \tag{4.5}$$

et puisque $p \ge 2$,

$$\begin{aligned}\|v_h\|^p_{L^p(\mathbb{R};L^q(\mathbb{R}^d))} &\le Ch^{p/2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\|V_{h,l}\|^p_{L^2([hl-h,hl+2h];L^2(\mathbb{R}^d))}\\ &\le Ch^{p/2}\left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\|V_{h,l}\|^2_{L^2([hl-h,hl+2h];L^2(\mathbb{R}^d))}\right)^{p/2}\end{aligned} \tag{4.6}$$

Par ailleurs, grace à la présence de la troncature spectrale Ψ, on obtient

$$\begin{aligned}&\|V_{h,l}\|_{L^2([hl-h,hl+2h];L^2(\mathbb{R}^d))}\\ &\quad= \|\varphi(t/h-l)\Psi(h^2\Delta_g)[\Delta_g,\chi]u + i\frac{\varphi'(t/h-l)}{h}\Psi(h^2\Delta_g)\chi u\|_{L^2([hl-h,hl+2h];L^2(\mathbb{R}^d))}\\ &\qquad\le Ch^{-1/2}\|\varphi(t/h-l)\Psi(h^2\Delta_g)[\Delta_g,\chi]u\|_{L^2([hl-h,hl+2h];H^{-1/2}(\mathbb{R}^d))}\\ &\qquad\qquad+ Ch^{1/2}\|\frac{\varphi'(t/h-l)}{h}\Psi(h^2\Delta_g)\chi u\|_{L^2([hl-h,hl+2h];H^{1/2}(\mathbb{R}^d))}\end{aligned} \tag{4.7}$$

si $\widetilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\widetilde{\Psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^*)$ et $\widetilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ sont égaux à 1 sur le support de φ, Ψ et χ respectivement, on obtient modulo des restes en $\mathcal{O}(h^\infty)$

$$\|V_{h,l}\|_{L^2([hl-h,hl+2h];L^2(\mathbb{R}^d))} \le Ch^{-1/2}\|\widetilde{\varphi}(t/h-l)\widetilde{\Psi}(h^2\Delta_g)\widetilde{\chi}u\|_{L^2([hl-h,hl+2h];H^{1/2}(\mathbb{R}^d))}, \tag{4.8}$$

d'où d'après (4.6)

$$\|v_h\|^p_{L^p(\mathbb{R};L^q(\mathbb{R}^d))} \le C\|\widetilde{\Psi}(h^2\Delta_g)\widetilde{\chi}u\|^p_{L^2(\mathbb{R};H^{1/2}(\mathbb{R}^d))} \tag{4.9}$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser le théorème 1 (où on a remplacé le poids $\langle x\rangle^{-s}$ par $\widetilde{\chi}$) et le lemme suivant (voir [**4**, Corollary 2.3])

Lemme 4.2. — *Soit $\tilde\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^*)$ tels que*

$$\tilde\varphi(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(2^{-mk}\lambda) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4.10}$$

Alors pour tout $q \in [2, +\infty[$, on a

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C_q \left(\|\tilde\varphi(-\Delta_g) f\|_{L^q(M)} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi(-2^{-2k}\Delta_g) f\|^2_{L^q(\mathbb{R}^d)} \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

4.2. Etude de $w = (1-\chi)u$. — On suit ici l'approche suggérée par G. Staffilani et D. Tataru : On a

$$(i\partial_t + \Delta_g) w = [\Delta_g, -\chi]u, \qquad w\,|_{t=0} = (1-\chi)u_0. \tag{4.11}$$

Comme sur le support de w on a $g = (\delta_{i,j})$ on peut remplacer dans (4.11) Δ_g par Δ_0 le laplacien euclidien et on obtient

$$w = e^{it\Delta_0}(1-\chi)u_0 + \int_0^t e^{i(t-s)\Delta_0}[\Delta_g, -\chi]u(s)ds. \tag{4.12}$$

La contribution du premier terme se traite sans probleme. Pour traiter le second terme, on utlilise le lemme suivant du a M. Christ et A. Kisselev [**6**] :

Lemme 4.3 **(M. Christ et A. Kisselev)**. — *Soit $T : L^p(\mathbb{R}; B_1) \to L^q(\mathbb{R}; B_2)$ un opérateur borné défini par un noyau localement intégrable $K(t,s)$ à valeurs opérateurs de B_1 dans B_2 où $B_{1;2}$ sont des espaces de Banach. Supposons que $p < q$. Alors l'opérateur*

$$\widetilde{T} f(t) = \int_{s<t} K(t,s) f(s) ds \tag{4.13}$$

est borné de $L^p(\mathbb{R}; B_1)$ dans $L^q(\mathbb{R}; B_2)$ par

$$\|\widetilde{T}\|_{L^p(\mathbb{R};B_1)\to L^q(\mathbb{R};B_2)} \leq (1 - 2^{-(p^{-1}-q^{-1})})^{-1} \|T\|_{L^p(\mathbb{R};B_1)\to L^q(\mathbb{R};B_2)}. \tag{4.14}$$

Ce lemme permet (puisque $p > 2$) de remplacer l'étude du deuxième terme dans le membre de droite de (4.12) par celle de

$$W = \int_0^{+\infty} e^{i(t-s)\Delta_0}[\Delta_g, -\chi]u(s)ds = T_0 T_0^* \tag{4.15}$$

où $T_0 = e^{it\Delta_0}$ est borné de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}; L^q(\mathbb{R}^d)$ et T_0^* est (d'après l'estimation duale de celle du Théorème 1, où on a remplacé $\langle x\rangle^{-s}$ par χ) borné de $L^2; H^{-1/2}_{\text{comp}}$ dans L^2, ce qui implique l'estimation pour W (et donc pour w).

5. Perturbations Longues portées

Dans le cas général on obtient

Théorème 3. — *Soit g une métrique vérifiant les hypothèses 1) et 2) de la section 2. Alors pour tous (p,q) vérifiant la condition (1.3) et tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\|e^{it\Delta_g} u_0\|_{L^p([0,1], L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C \|u_0\|_{H^\varepsilon(\mathbb{R}^d)}. \tag{5.1}$$

Remarque 5.1. — *Le caractère local en temps de notre résultat vient de ce que l'estimation d'effet régularisant* (2.4) *est locale en temps.*

Dans la section précédente, on n'a pas utilisé l'effet régularisant avec le poids $\langle x\rangle^{-s}$ mais plutot avec une troncature χ, la partie non bornée étant traitée par des estimations explicites sur l'opérateur libre $e^{it\Delta_0}$. Pour traiter le cas d'une perturbation a longue portée nous ne disposons plus de telles estimations. Comme à la section précédente, il suffit de démontrer le théorème 3 où on a remplacé u par $\Psi(h^2\Delta_g)u$. Supposons dans un premier temps qu'on peut prendre dans (2.4) $s = 1/2$ (ce qui est faux). Cette estimation d'effet régularisant serait alors (au moins en ce qui concerne les termes principaux) invariante par le changement d'échelle

$$u(t,x) \mapsto u_\lambda(t,x) = \lambda^{d/2}u(\lambda^2 t, \lambda x). \tag{5.2}$$

Considérons alors si

$$\tilde\chi(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\chi(2^{-k}x) = 1, \quad x\in\mathbb{R}^d, \tag{5.3}$$

$$u^0 = \tilde\chi(x)u, \qquad u^k = \chi(2^{-k}x)u, \tag{5.4}$$

On traite u^0 comme à la section précédente et pour traiter u^k, on fait le changement d'échelle $(t,x)\mapsto(2^{-2k}t, 2^{-k}x)$, et on définit $v^k(t,x) = 2^{kd/2}u^k(2^{2k}t, 2^k x)$. On obtient ainsi une famille de solutions d'équations de Schrödinger associées à une famille de métriques $(g_{i,j,k})(x) = (g_{i,j})(2^k x)$ qui est d'après (2.1) uniformément bornée dans C^∞ sur le support (en x) de v^k (qui est une couronne fixe). On applique alors à chaque v^k la méthode de la section précédente. Revenant à u^k, en utilisant l'invariance par changement d'échelle de (5.1) pour $s = 1/2$, on peut alors recoller (en x) toutes les estimations et obtenir (4.1). Malheureusement, l'estimation (2.4) avec $s = 1/2$ est fausse et cette stratégie donne pour tout $\varepsilon > 0$

$$\|\langle x\rangle^{-\varepsilon}e^{it\Delta_g}u_0\|_{L^p([0,1],L^q(\mathbb{R}^d))} \le C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{5.5}$$

Ayant des applications à l'équation de Schrödinger non linéaire en vue, on préfèrerait que la perte porte sur des dérivées plutôt que sur un poids en x. Pour cela, il faut modifier la méthode.

Considérons donc pour $\tilde\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ égale à 1 près de 0, $u_K = (1-\tilde\chi)(2^{-K}x)u$ et $v_K = u_K(2^{2K}t, 2^K x)$ solution de

$$(i\partial_t + \Delta_{g_K})v_K = 2^{2K}[\Delta_{g_K}, -\tilde\chi]U, \qquad v_K\mid_{t=0} = (1-\tilde\chi)\Psi(h^2\times 2^{-K}\Delta_{g_K})U_0 \tag{5.6}$$

On remarque alors que sur le support de v_K qui est l'extérieur d'une boule), la métrique g_K est uniformément bornée dans C^∞. On peut donc suivant la méthode de [**4**] rappelée à la section précédente démontrer une inégalité de Strichartz (en temps $h_{\text{eff}} = 2^{-K}h$) :

$$\|v_K\|_{L^p([0,2^{-K}h],L^q} \le C2^{2K}\|[\Delta_{g_K}, -\tilde\chi]U\|_{L^1;L^2} + \|(1-\tilde\chi)\Psi(h^2 - K\Delta_{g_K})U_0\|_{L^2} \tag{5.7}$$

revenant à u_K on obtient (avec $\chi_K(x) = \chi(2^{-K}x)$),

$$\begin{aligned}
\|w\|_{L^p([0,2^K h],L^q)} &\le C\|[\Delta_g, -\tilde\chi_k]u\|_{L^1[0,2^K h];L^2} + \|(1-\tilde\chi_k)\Psi(h^2\Delta_g)u_0\|_{L^2}\\
&\le C2^K h\|[\Delta_g, -\tilde\chi_k]u\|_{L^\infty;L^2} + \|(1-\tilde\chi_k)\Psi(h^2\Delta_g)u_0\|_{L^2}\\
&\le C2^{-K}\|u\|_{L^\infty;L^2} + \|(1-\tilde\chi_k)\Psi(h^2\Delta_g)u_0\|_{L^2}\\
&\le C\|\Psi(h^2\Delta_g)u_0\|_{L^2}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Si $2^K \geq h^{-1}$, l'intervalle sur lequel on a obtenu cette inégalité, $[0, 2^K h]$ es de taille 1 et on a démontré l'estimation de Strichartz désirée pour u_K. En fait l'interprétation de la stratégie que nous venons d'évoquer est simple : pour u_K, en utilisant (2.1), le changement d'échelle et la méthode de [**4**], on est capable d'écrire une parametrixe (et donc de démontrer une inégalité de Strichartz) sur des intervalles de temps de taille $2^K h$ ce qui est suffisant si $2^K > h^{-1}$.

Il reste alors à traiter u^k pour $k \leq K$. Mais la stratégie précédente fonctionne alors, la perte sur le poids en $\langle x \rangle^\varepsilon$ pouvant être majorée par une perte en $h^{-\varepsilon}$ car sur le support de u^k, on a $|x| \leq C2^K = Ch^{-1}$.

Références

[1] M. Ben Artzi and S. Klainerman. Decay and regularity for the schrödinger equation. *Journal d'Analyse Mathematique*, 58 :25–37, 1992.

[2] N. Burq. Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel. *Acta Mathematica*, 180 :1–29, 1998.

[3] N. Burq. Semi-classical estimates for the resolvent in non trapping geometries. *To appear in I.M.R.N.*, 2001.

[4] N. Burq, P. Gérard, and N. Tzvetkov. Strichartz inequalities and the non linear Schrödinger equation on compact manifolds. *Prépublication Université d'Orsay, soumis*, 2001.

[5] T. Cazenave and F. Weissler. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, pages 807–836, 1990.

[6] Michael Christ and Alexander Kiselev. Maximal functions associated to filtrations. *J. Funct. Anal.*, 179(2) :409–425, 2001.

[7] Shin-ichi Doi. Remarks on the Cauchy problem for Schrödinger-type equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 21(1-2) :163–178, 1996.

[8] Shin-ichi Doi. Smoothing effects of Schrödinger evolution groups on Riemannian manifolds. *Duke Math. J.*, 82(3) :679–706, 1996.

[9] J. Ginibre and G. Velo. The global Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation. *Ann. I.H.P. (Anal. non lin.)*, 2 :309–327, 1985.

[10] J. Ginibre and G. Velo. Smoothing properties and retarded estimates for some dispersive evolution equations. *Commun. Math. Phys.*, 144 :163–188, 1992.

[11] T. Kato. On nonlinear Schrödinger equations. *Ann. I.H.P. (Phys. Théor.)*, 46 :113–129, 1987.

[12] M. Keel and T. Tao. Endpoint Strichartz estimates. *Amer. Jour. of Math.*, pages 955–980, 1998.

[13] P. D. Lax and R. S. Phillips. *Scattering theory.* Number 26 in Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 2 edition, 1989.

[14] R.B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems I. *Communications in Pure Applied Mathematics*, 31 :593–617, 1978.

[15] R.B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems II. *Communications in Pure Applied Mathematics*, 35 :129–168, 1982.

[16] G. Staffilani and D. Tataru. Strichartz estimates for a Schrödinger operator with nonsmooth coefficients. à paraître à Comm. in Part. Diff. Eq., 2002.

[17] Siu-Hung Tang and Maciej Zworski. Resonance expansions of scattered waves. *Comm. Pure Appl. Math.*, 53(10) :1305–1334, 2000.

[18] B. R. Vainberg. *Asymptotic methods in equations of matheatical physics.* Gordon and Breach, New York, 1988.

[19] K. Yajima. Existence of solutions for Schrödinger evolution equations. *Commun. Math. Phys.*, 110 :415–426, 1987.

NICOLAS BURQ, Université Paris Sud, Mathématiques, Bât 425, 91405 Orsay Cedex
E-mail : `Nicolas.burq@math.u-psud.fr`