SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2000-2001

Claude Bardos

Limites réversibles et irréversibles de systèmes de particules.

Séminaire É. D. P. (2000-2001), Exposé n° VIII, 22 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2000-2001____A8_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Limites réversibles et irréversibles de systèmes de particules.

Claude BARDOS [*]

Résumé

Il s'agit de comparer les différents résultats et théorèmes concernant dans un cadre essentiellement déterministe des systèmes de particules. Cela conduit à étudier la notion de hiérarchies d'équations et à comparer les modèles non linéaires et linéaires. Dans ce dernier cas on met en évidence le rôle de l'aléatoire. Ce texte réfère à une série de travaux en collaboration avec F. Golse, A. Gottlieb, D. Levermore et N. Mauser.

Table des matières

[*]CMLA, ENS-Cachan et LAN (Univ. Paris 6), France (bardos@math.jussieu.fr).

1 Introduction

L'étude de limites de systèmes de particules est le premier maillon de la chaine d'équations qui conduit enfin à des modèles d'approximations très macroscopiques utilisés en météorologie ou aérodynamique.

$$\begin{array}{c}\text{Dynamique de Particules}\\ \Downarrow \quad (1)\\ \text{Equations Cinétiques comme Boltzmann ou Vlasov}\\ \Downarrow \quad (2)\\ \text{Equations macroscopiques comme Navier Stokes}\\ \Downarrow \quad (3)\\ \text{Modèles “moyennés” comme les équations } k-\epsilon\end{array}$$

L'étape (2) est maintenant très bien comprise (cf. [BGL2], [BGL3], [LM] et d'autres). Pour l'étape (3) qui pourtant est la plus utilisée dans les applications il n'existe aucun résultat rigoureux ni même aucune formulation mathématique précise. L'étape (1) semble présenter des difficultés intermédiaires et ainsi à part son intéret propre peut peut être servir à la compréhension de l'étape (3). Plusieurs problèmes et outils sont communs à ces différentes étapes.

1. Utilisation d'hiérarchies finies ou infinies d'équations.
2. Problèmes de fermetures
3. Apparition de l'irréversibilité et de l'entropie.
4. Rôle respectifs de la non linéarité et de l'aléatoire.

2 Hiérarchie d'équations

La notion d'hiérarchie d'équations est présente pratiquement à tous les niveaux de la chaine. Dans l'étape (1) on part d'un système de N particules (classiques ou quantiques) en interaction binaire. Pour cela il est commode et cela sera utilisé dans tout cet exposé d'introduire les notations suivantes :

$$
\begin{aligned}
X_N &:= (x_1, x_2, ..., x_N)\,, X_n := (x_1, x_2, ..., x_n)\,, X_N^n := (x_{n+1}, ..., x_N) \\
Y_N &:= (y_1, y_2, ..., y_N)\,, Y_n := (y_1, y_2, ..., y_n)\,, Y_N^n := (y_{n+1}, ..., y_N) \\
Z_N &:= (z_1, z_2, ..., z_N)\,, Z_n := (z_1, z_2, ..., z_n)\,, Z_N^n := (z_{n+1}, ..., z_N) \quad (2.1) \\
V_N &:= (v_1, v_2, ..., v_N)\,, V^n := (v_1, v_2, ..., v_n)\,, V_N^n := (v_{n+1}, ..., v_N)
\end{aligned}
$$

L'équation de Liouville s'écrit alors :

$$
\begin{aligned}
\partial_t f + \{H_N, f\} = \partial_t f(X_N, V_N, t) + \sum_{1\le i\le N} v_i \nabla_{x_i} f(X_N, V_N, t) \\
-C_N \sum_{1\le i\le N} \nabla_{x_i}(\sum_{1\le j\neq k\le N} V(|x_j - x_k|))\nabla_{v_i} f(X_N, V_N t) = 0 \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

Dans (2.2) $f(X_N, V_N, t)$ est la densité de N particules qui à l'instant t ont au point x_i la vitesse v_i ($1 \le i \le N$) et C_N est une constante de couplage.

On suppose que les particules sont indistinguables : pour toute permutation σ de l'ensmble $1 \le i \le N$, on a la relation :

$$
f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(N)}, v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(N)}, t) = f(x_1, x_2, \dots, x_N, v_1, v_2, \dots, v_N, t) \qquad (2.3)
$$

et ainsi la densité de particules qui au point x et à l'instant t ont la vitesse v est :

$$
f_N^1(x, v, t) = \int f(x, x_2, ..., v, v_2, ..., v_N, t) dx_2 dx_3 ... dx_N dv_2 dv_3 ... dv_N =
$$

$$
\int f(X_N, V_N, t) dX_N^2 dV_N^2 \,.
$$

Cependant l'équation déduite de (2.2) pour $f_N^1(x, t)$ implique :

$$
f_N^2(x_1, \dots, x_2, v_1, v_2, \dots, v_N, t) = \iint f(X_N, V_N, t) dX_N^3 dV_N^3 \,, \qquad (2.4)
$$

l'équation pour f_N^2 implique f_N^3 et ainsi de suite ce qui conduit à un système de N équations linéaires que l'on peut écrire abstraitement sous la forme :

$$
\partial_t f_N^n + A_n f_N^n = C_{N,n,n+1} f_N^{n+1} \text{ with } C_{N,N,N+1} = 0 \qquad (2.5)
$$

appelée la hiérarchie BBGKY (Bogolyubov, Born, Green, Kirkwood). En faisant tendre N vers l'infini on obtient une hiérarchie infinie.

$$
\partial_t f^n + A_n f^n = C_{n,n+1} f^{n+1} \qquad (2.6)
$$

avec des opérateurs A_n et $C_{n,n+1}$ qui sont linéaires mais en général non bornés et qui dépendent de n.

De même, pour déduire une équation macroscopique d'une équation cinétique

$$\partial_t f(x,v,t) + v\nabla_x f(x,v,t) = C(f) \tag{2.7}$$

on introduit les moments en multipliant (2.7) par $\{1, v, \frac{|v|^2}{2}\}$ et on intégre sur l'espace des vitesses. Mais comme ci dessus, l'équation pour

$$\int v^{\otimes p} f(x,v,t)dv$$

implique des quantités du type :

$$\int v^{\otimes (p+1)} f(x,v,t)dv$$

et ainsi on génère une hiérarchie infinie d'équations.

Enfin, en théorie statistique de la turbulence on considère l'équation de Navier Stokes pour les fluides visqueux incompressibles avec une donnée initiale (ou un forcage) qui dépend d'une variable aléatoire ω

$$\partial_t u(x,t,\omega) - \nu\Delta u(x,t,\omega) + u(x,t,\omega)\nabla_x u(x,t,\omega) = -\nabla_x p\,, \quad \nabla_x u(x,t,\omega) \equiv 0\,. \tag{2.8}$$

A cause de la nonlinéarité, une équation pour $< u(x,t,\omega) >$ implique le terme $< u(x,t,\omega) \otimes u(x,t,\omega) >$ ce qui conduit aussi à une hierarchie infinie.

Il est important d'observer que le même type d'hiérarchie apparait (sans introduction de l'aléatoire) si on considère des limites faibles de solutions deterministes de l'équation (2.8) avec $\nu \to 0$. On peut avoir :

$$\lim_{\nu\to 0}(u_\nu \otimes u_\nu) \neq (\lim_{\nu\to 0} u_\nu) \otimes (\lim_{\nu\to 0} u_\nu) \tag{2.9}$$

Il faut alors une équation pour $\lim_{\nu\to 0}(u_\nu \otimes u_\nu)$ qui implique les limites des moments d'ordre 3 et ainsi de suite.

Il convient de remarquer que les hiérarchies apparaissent comme des outils de linéarisation de problèmes non linéaires. Dans certains cas elles peuvent être considérées comme des solutions "faibles" du problème non linéaire initial. Un exemple "naif" mais instructif est fourni par la hiérachie de Riccati. On part de l'équation élémentaire :

$$y' = y^2, \text{ avec } y(0) > 0 \text{ donné}\,. \tag{2.10}$$

Avec la suite $y_n(t) = (y(t))^n$ (2.10) est équivalent à la hiérarchie infinie :

$$y_n' = n y_{n+1}\,, \quad y_n(0) = y(0)^n\,. \tag{2.11}$$

Ignorant l'intégration explicite de (2.10), on analyse (2.11) avec la version Nirenberg-Nishida du théorème de Cauchy Kowalesky (cf. [Nir] and [Nis]). On mesure $Y(t) = \{y_n(t), 1 \leq n < \infty\}$ dans l'échelle d'espaces de Banach X_ρ normés par :

$$\|Y\|_{X_\rho} = \sum_{0 \leq n < \infty} \rho^n |y_n| \,. \tag{2.12}$$

On écrit l'équation (2.11) sous la forme abstraite :

$$Y'(t) = C(Y(t)) \tag{2.13}$$

En appliquant la formule de Cauchy à la série

$$\sum_{0 \leq n < \infty} n\rho^n |y_n| = z\frac{d}{dz}(\sum_{0 \leq n < \infty} z^n |y_n|)_{z=\rho} \tag{2.14}$$

on trouve (sans surprise) que la solution de (2.13) est bien définie et unique pour $0 \leq t < (y(0))^{-1}$. On généralise cet exemple à des hiérarchies de la forme

$$\partial_t f^n + A_n f^n = C_{n,n+1} f^{n+1} \tag{2.15}$$

dès que A_n est générateur d'un semi groupe à contraction dans H^n et dès que $C_{n,n+1}$ est un opérateur de H_{n+1} dans H_n de norme bornée par Mn (avec M indépendant de n). En revenant à la hiérarchie de Ricatti on remarque que le problème 2.13 admet une unique solution dès que l'on a :

$$|y_n(0)| \leq C^n \tag{2.16}$$

sans que l'hypothèse de *factorisation*

$$y_n(0) = y(0)^n \tag{2.17}$$

soit satisfaite. Par contre la seule manière que je connais de prouver que la solution de la hiérarchie de Riccati est donnée par

$$y_n(t) = (\frac{y(0)}{1 - ty(0)})^n \tag{2.18}$$

est de remarquer que (2.18) fournit bien une solution et d'invoquer suivant Cauchy Kowalewsky le résultat *d'unicité*. Bien entendu dans un exemple aussi évident cela n'apporte pas grand chose mais on retrouve systématiquement cette dichotomie. Il est souvent plus facile de prouver que la limite d'un système de N équations est une hiérarchie donnée que de prouver l'unicitié de la solution de cette dernière hiérarchie (comme cela se produit souvent pour des notions de solutions faibles) et ce qui manque alors c'est un théorème de *fermeture*.

3 Limite reversible de la hiérarchie de Liouville

Les remarques ci dessus s'appliquent en particulier bien à la hiérarchie de Liouville déduite de l'équation (2.2) dans le cas d'un couplage faible.

$$\partial_t f(X_N, V_N, t) + \sum_{1\le i\le N} v_i \nabla_{x_i} f(X_N, V_N, t) \tag{3.19}$$

$$-\frac{1}{2N}\sum_{1\le i\le N} \nabla_{x_l}\Big(\sum_{1\le j\ne k\le N} V(|x_j - x_k|)\Big)\nabla_{v_i} f(X_N, V_N t) = 0$$

Proposition 3.1 *On suppose que le potentiel d'interaction $V(x) = V(|x|)$ est continu et borné inférieurement tandis que ∇V est continu et borné.*

On suppose que les données intiales $f_N(X_N, V_N, t)$ sont des densités de probabilités positives avec des énergies d'odre N,

$$f_N \ge 0, \quad \iint f_N(X_N, V_N, 0) dX_N dV_N = 1, \iint H_N(X_N, V_N) f_N(X_N, V_N, 0) dX_N dV_N \le CN, \tag{3.20}$$

et satisfont l'hypothèse d'indistinguabilité. On suppose enfin que l'on a :

$$\iint \frac{|X_N|^2}{2} f_N(X_N, V_N, 0) dX_N dV_N < CN.$$

Alors (modulo l'extraction d'une sous suite de N') les marginales

$$f^n_{N'}(X_n, V_n, t) = \iint f_{N'}(X_{N'}, V_{N'}, t) dX^n_{N'} dV^n_{N'} \tag{3.21}$$

convergent faible (dans le dual des fonctions continues bornées) vers des mesures de probabilité μ_n solutions au sens des distributions de la hiérarchie de Vlasov*

$$\partial_t \mu_n + \sum_{1\le i\le n} v_i \cdot \nabla_{x_i}\mu_n = \sum_{1\le i<j\le n} \nabla_{v_i}\left(\iint \nabla V(x_i - x^*)\mu_{n+1}(X_n, x^*, V_n v^*) dx^* dv^*\right) \tag{3.22}$$

Démonstration : On utilise l'invariance de la positivité, de la densité totale et de l'énergie sous l'action du flot Hamiltonien H_N. En particulier on a :

$$\iint \frac{|v_i|^2}{2} f_N(X_N, V_N, t) dX_N dV_N = \frac{1}{N}\iint \frac{|V_N|^2}{2} f_N(X_N, V_N, t) dX_N dV_N \le C. \tag{3.23}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\iint \frac{|x_i|^2}{2} f_N(X_N,V_N,t)dX_NdV_N &= -\iint \frac{|x_i|^2}{2}\{H_N, f_N(X_N,V_N,t)\}dX_NdV_N \\
= \iint x_iv_if_N(X_N,V_N,t)dX_NdV_N &\le \iint \frac{|x_i|^2+|v_i|^2}{2} f_N(X_N,V_N,t)dX_NdV_N \\
&\le C + \iint \frac{|x_i|^2}{2} f_N(X_N,V_N,t)dX_NdV_N .
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Avec le lemme de Gronwall on en déduit l'existence d'une constante C_T telle que l'on ait

$$\iint \frac{|x_i|^2+|v_i|^2}{2} f_N(X_N,V_N,t)dX_NdV_N \le C_T . \tag{3.25}$$

Ce qui montre que pour tout n fixé, la suite $\{f_N^n\}$ est “étroite” au sens de la théorie des probabilité. On en déduit l'existence d'une sous suite N' telle que pour tout n $\{f_{N'}^n\}$ converges vers une mesure de *probabilité* μ_n.

Avec l'indistinguabilité, l'équation pour la marginale f_N^n est

$$\begin{aligned}
&\partial_t f_N^n + \sum_{1\le i\le n} v_i\cdot\nabla_{x_i} f_N^n - \frac{1}{N}\sum_{1\le i<j\le n}\nabla_{v_i}\left(\nabla_{x_i}V(x_i-x_j)f_N^n\right) \\
&= \frac{N-n}{N}\sum_{1\le i\le n}\nabla_{v_i}\left(\iint \nabla V(x_i-x^*)f_N^{n+1}(X_n,x^*,V_nv^*)dx^*dv^*\right) .
\end{aligned} \tag{3.26}$$

On conclut la démonstration en passant à la limite au sens des distributions. L'équation de Vlasov pour un potentiel V s'écrit :

$$\partial_t f(x,v,t) + v\nabla_x f(x,v,t) = (\iint \nabla V(x_i-x^*)f(x^*,v^*)dx^*dv^*)\nabla_v f(x,v,t) \tag{3.27}$$

et on observe que si $f(x,v,t)$ est solution de (3.27) alors

$$\mu_n(X_n,V_n,t) = \prod_{1\le i\le n} f(x_i,v_i,t) \tag{3.28}$$

produit une solution de (3.22). Ainsi des données intiales factorisées et un théorème d'uncité pour la hiérarchie (3.22) conduiraient à une caractérisation complète de la limite. Mais en fait la situation est beaucoup plus complexe car à cause de la dérivation en v (qui ne gène pas pour un passage à la limite au sens des distributions) l'opérateur

$$\mu_{n+1} \mapsto \sum_{1\le i<j\le n}\nabla_{v_i}\left(\iint \nabla V(x_i-x^*)\mu_{n+1}(X_n,x^*,V_nv^*)dx^*dv^*\right) \tag{3.29}$$

est loin de satisfaire les hypothèses de type Cauchy Kowalewsky de la hiérarchie de Riccati.

Cette difficulté peut être tournée de deux manières :

Remarque 3.1 *1. On peut selon [BH] et en supposant que le potentiel est deux fois continument dérivable, remplacer le procédé de limite faible par une construction plus explicite semblable à une méthode numérique de "points vortex" ce qui conduit à identifier à posteriori la solution de la hiérarchie comme donnée par (3.27) et (3.28).*

2. On peut compenser la perte de régularité en v en supposant que le potentiel est analytique et en faisant des estimations dans des échelles d'espaces analytiques. cf [NS]

La méthode de [NS] se justifie par le traitement de limite classiques de systèmes de N particules quantiques car alors l'outil "classique " de [BH] n'est pas directement applicable.

4 Le couplage faible pour l'équation de Schrödinger

Les caractéristiques de l'analyse faite ci dessus pour la limite $N \to \infty$ de l'équation de Liouville classique se retrouvent dans l'analyse de la limite de l'équation quantique. On obtient assez facilement un théorème de convergence vers une hiérarchie mais pour fermer cette hiérarchie et obtenir une caractérisation complète il faut, sur le potentiel, des hypothèses beaucoup plus fortes. On part de l'équation de Schrödinger pour une fonction d'onde en couplage faible :

$$i\hbar\partial_t \Psi_N = -\frac{\hbar^2}{2}\sum_{1\le j\le N}\Delta_{x_j}\Psi_N + \frac{1}{N}\sum_{1\le j<k\le N} V(|x_j - x_k|)\Psi_N$$

$$:= H_N\Psi_N \qquad (4.30)$$

$$\Psi_N(t=0) = \Psi_N^I(x_1, x_2, ..., x_N)\,. \qquad (4.31)$$

On introduit la matrice densité

$$\rho_N(X_N, Y_N, t) = \Psi_N(X_N, t)\overline{\Psi_N(Y_N, t)} \qquad (4.32)$$

qui est bien sûr le noyau d'un opérateur (un projecteur) également noté $\rho_N(t)$, on définit ensuite les traces partielles de cet opérateur selon la formule :

$$\rho_{N,n}(t) := \mathrm{Tr}_{[n+1,N]}\rho_N(t) = \int \rho_N(X_n, Z_N^n, Y_n, Z_N^n, t)dZ_N^n\,. \qquad (4.33)$$

L'évolution de l'opérateur $\rho_N(t)$ est donnée par la formule :

$$\rho_N(t) = e^{-i\frac{tH_N}{\hbar}} \rho_N(0) e^{i\frac{tH_N}{\hbar}} \,. \tag{4.34}$$

Il est solution de l'équation de von Neumann :

$$i\hbar\partial_t \rho_N = H_N \rho_N - \rho_N H_N \,. \tag{4.35}$$

et donc la matrice de densité vérifie la relation :

$$\begin{gathered} i\hbar\partial_t \rho_N(X_N, Y_N, t) = -\frac{\hbar^2}{2}[\Delta_{X_N} - \Delta_{Y_N}]\rho_N(X_N, Y_N, t) \\ +\frac{1}{N}\sum_{1\leq j<k\leq N}[V(|x_j - x_k|) - V(|y_j - y_k|)]\rho_N(X_N, Y_N, t) \,. \end{gathered} \tag{4.36}$$

On assume comme ci dessus une hypothèse d'indistinguabilité des donnée initiales (qui est préservée par le flot) :

$$\rho_N(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n, 0) = \rho_N(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, ..., y_{\sigma(n)}, 0) \tag{4.37}$$

pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, 3, ..., N\}$ et il en résulte que les marginales $\rho_{N,n}(t)$ sont solutions de la hiérarchie de Schrödinger à N particules. :

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t \rho_{N,n}(X_n, Y_n, t) \;=\; & -\frac{\hbar^2}{2}[\Delta_{X_n} - \Delta_{Y_n}]\rho_{N,n}(X_n, Y_n, t) \\ & +\frac{1}{N}\sum_{1\leq j<k\leq n}[V(|x_j - x_k|) - V(|y_j - y_k|)]\rho_{N,n}(X_n, Y_n, t) \\ & +\frac{N-n}{N}\sum_{1\leq j\leq n}\int [V(|x_j - z|) - V(|y_j - z|)]\rho_{N,n+1}(X_n, z, Y_n, z, t)dz \,. \end{aligned} \tag{4.38}$$

La hiérarchie (infinie) de Schrödinger est obtenue "formellement" en faisant tendre N vers l'infini dans (4.38) :

$$\begin{gathered} i\hbar\partial_t \rho_n(X_n, Y_n, t) = -\frac{\hbar^2}{2}[\Delta_{X_n} - \Delta_{Y_n}]\rho_n(X_n, Y_n, t) \\ + \sum_{1\leq j\leq n}\int [V(|x_j - z|) - V(|y_j - z|)]\rho_{n+1}(X_n, z, Y_n, z, t)dz \,. \end{gathered} \tag{4.39}$$

On considère ensuite l'équation de Schrödinger "auto consistante" à une particule :

$$i\hbar\partial_t \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta_x \psi(x, t) + \psi(x, t)\int V(|x - z|)|\psi(z, t)|^2 dz \tag{4.40}$$

$$\rho = \psi(x,t)\overline{\psi(y,t)} \tag{4.41}$$

est une solution de l'équation de von Neumann "auto consistante"

$$i\hbar\partial_t\rho(x,y,t) = -\frac{\hbar^2}{2}[\Delta_x - \Delta_y]\rho(x,y,t) + \rho(x,y,t)\int[V(|x-z|) - V(|y-z|)]\rho(z,z,t)dz, \tag{4.42}$$

tandis que la suite de densités à n particules, obtenues par factorisation,

$$\rho_n(X_n, Y_n, t) = \prod_{1\leq k\leq n}\rho(x_k, y_k, t) \tag{4.43}$$

fournit une solution de la hiérarchie de Schrödinger. Un résultat de convergence dans (4.38) et un résultat d'unicité dans (4.39) conduit à l'identification des limites pour des données initiales factorisées.

Il convient d'observer que les opérateurs apparaissants aux membres droits de (4.38) et (4.39) contiennent n termes qui individuellement ne sont pas bornés (dans un sens convenable) d'une part parce que le potentiel peut être singulier (potentiel de Coulomb) et d'autre part, même dans le cas où le potentiel est borné, parce que l'opérateur implique l'application :

$$\rho_{n+1}(X_n, v, Y_n, w, t) \mapsto \rho_{n+1}(X_n, z, Y_n, z, t) \tag{4.44}$$

qui n'est pas continue dans des espaces "naturels". Il convient donc suivant Spohn [Sp1] d'utiliser les espaces $H_n = \mathcal{L}^1(L^2(I\!R^{3n}))$ d'opérateurs à trace dans $L^2(I\!R^{3n})$

On introduit sur les données initiales les conditions de normalisation et d'énergie finie (satisfaites avec des données initiales factorisées convenables) :

$$\Psi_N(t=0) = \Psi_N^I(x_1, x_2, ..., x_N)\,, \quad \int|\Psi_N^I(X_N)|^2 dX_N = 1 \tag{4.45}$$

et

$$\mathcal{E}_{N,\hbar} = \tfrac{1}{2}\hbar^2\sum_{1\leq j\leq N}\int|\nabla_{x_j}\Psi_N^I(X_N)|^2 dX_N + \tag{4.46}$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{1\leq j<k\leq m}\int V(|x_j - x_k|)|\Psi_N^I(X_N)|^2 dX_N = O(N)$$

uniformément en $N \to +\infty$. On utilise les informations à priori évidentes regroupées ci dessous :

Proposition 4.1 *Pour toute solution $\Psi_N(X_N,t)$ de l'équation (4.31) la densité (cf. (4.45)) et l'énergie (cf. (4.46)) sont des invariants. Sous l'hypothèse (4.45) les $\rho_{N,n}(t)$ sont des opérateurs autoadjoints positifs à trace,* *de trace égale à 1, et leurs noyaux satisfont l'inégalité de Cauchy Schwarz ci dessous :*

$$|\rho_{N,n+1}(X_n, z, Y_n, z, t)| \leq \rho_{N,n+1}(X_n, z, X_n, z, t)^{\frac{1}{2}} \rho_{N,n+1}(Y_n, z, Y_n, z, t)^{\frac{1}{2}} \tag{4.47}$$

pour tout $t \in I\!R$.

Suivant [BGM] on obtient des énoncés de convergence et d'unicité.

Théoreme 4.1 *On suppose que le potentiel* $x \mapsto V(|x|)$ *est borné inférieurement, appartient à* $C^0(I\!R^3 \setminus \{0\}) \cap L^2_{loc}(I\!R^3)$ *et s'annule à l'infini*

$$\lim_{r \to +\infty} V(r) = 0\,. \tag{4.48}$$

Soit $\Psi_N \in C^0(I\!R_+; L^2(I\!R^{3N}))$ *une solution de (4.30) avec des données initiales* Ψ^I_N *satisfaisant l'hypothèse d'indistinguabilité et les conditions (4.45) et (4.46)*

$$\mathcal{E}_{N,\hbar} = \tfrac{1}{2}\hbar^2 \sum_{1 \leq j \leq N} \int |\nabla_{x_j} \Psi^I_N(X_N)|^2 dX_N + \tag{4.49}$$

$$+\frac{1}{N} \sum_{1 \leq j < k \leq m} \int V(|x_j - x_k|) |\Psi^I_N(X_N)|^2 dX_N = O(N)$$

Alors toute limite faible de la suite des traces partielles $(\rho_{N,n})_{n \geq 1}$ *est solution au sens des distributions de la hiérachie de Schrödinger infinie (4.39)*

Si on suppose de plus que $V \in L^\infty(I\!R_+)$ (ce qui exclut bien sûr le cas "physique" du potentiel Coulombien) on a aussi un théorème de stabilité :

Théoreme 4.2 *On suppose que* $V \in L^\infty(I\!R_+)$. *Soit* $(\rho_n)_{n \geq 1} \in \prod_{n \geq 1} L^\infty(I\!R_+; H_n)$ *une solution faible de la hiérarchie infinie de Schrödinger (4.39) avec des données intiales* $(\rho^I_n)_{n \geq 1}$ *vérifiant l'estimation*

$$\|\rho^I_n\|_{H_n} \leq \epsilon_n\,, \quad n \geq 1$$

avec $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ *une suite de nombres positifs. On suppose de plus qu'il existe une constante* D *telle que l'on ait*

$$\sup_{t \geq 0} \|\rho_n(t)\|_{H_n} \leq D\,, \quad \textit{for all } n \geq 1\,. \tag{4.50}$$

alors, pour tout $0 < t < \frac{\hbar}{2\|V\|_{L^\infty}}$,

$$\|\rho_n(t)\|_{H_n} \leq \sum_{m \geq 0} \begin{pmatrix} n+m \\ m \end{pmatrix} \left(\frac{2\|V\|_{L^\infty}\, t}{\hbar}\right)^m \epsilon_{n+m}\,.$$

Ce résultat de stabilité bien que local et valable sur des intervalle de temps de l'ordre de $\hbar$ implique par propagation de proche en proche le résultat d'unicité globale pour la hiérarchie infinie de Schrödinger et conduit au :

Théoreme 4.3 *On suppose $V \in L^\infty(I\!R_+)$ et que $V(r) \to 0$ quand $r \to +\infty$. Pour tout $\psi^I \in H^1(I\!R^3)$ vérifiant $\|\psi^I\|_{L^2} = 1$, on définit*

$$\rho_n^I(X_n, Y_n) = \prod_{1 \le j \le n} \psi^I(x_j)\overline{\psi^I(y_j)}\,.$$

et on considère la suite $\rho_{N,n}$ de solutions de la hiérarchie de Schrödinger finie :

$$\rho_{N,n}(X_n, Y_n, t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H_N}\rho_n^I(X_n, Y_n)e^{+i\frac{t}{\hbar}H_N}\,,$$

où H_N est l'opérateur de Schrodinger à N corps défini dans l'équation (4.30). Quand $N \to +\infty$, $\rho_{N,n} \to \rho_n$ dans $L^\infty(I\!R_+; \mathcal{L}^1(L^2(I\!R^{3n})))$ faible-, avec ρ_n donné par la formule*

$$\rho_n(X_n, Y_n, t) = \prod_{1 \le j \le n} \psi(x_j, t)\overline{\psi(y_j, t)} \tag{4.51}$$

et ψ solution de

$$i\hbar\partial_t\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta\psi(x,t)+\psi(x,t)\int V(|x-y|)|\psi(y,t)|^2 dy\,, \psi(x,0) = \psi^I(x)\,. \tag{4.52}$$

Les preuves détaillées de ces énoncés peuvent être trouvées dans [BGM]. On se contente de donner ici quelques points essentiels : Pour les limites faibles on utilise des fonctions test de la forme $\Theta(X_n)\Theta(Y_n)$. La singularité du potentiel dans le théorème (4.1) est écartée par un argument d'équiintégrabilité : Par exemple avec (4.47) et l'inégalité de Cauchy on a :

$$\begin{aligned}
&\Big(\iiint_{|x_j - z| < a} |\Theta(X_n)||\Theta(Y_n)||V(|x_j - z|)||\rho_{N,n+1}(X_n, z, Y_n, z, t))dzdX_ndY_n\Big)^2 \\
&\qquad\le \iiint_{|x_j - z| < a} |\Theta(X_n)||\Theta(Y_n)||V(|x_j - z|)|\rho_{N,n+1}(X_n, z, X_n, z, t)^{\frac12} \\
&\qquad\qquad\rho_{N,n+1}(Y_n, z, Y_n, z, t)^{\frac12}dzdX_ndY_n \\
&\qquad\le \iiint_{|x_j - z| < a} |\Theta(X_n)|^2|V(|x_j - z|)|^2\rho_{N,n+1}(Y_n, z, Y_n, z, t)dzdX_ndY_n
\end{aligned}$$

$$\cdot \iiint_{|x_j - z| < a} |\Theta(Y_n)|^2 \rho_{N,n+1}(X_n, z, X_n, z, t) dz dX_n dY_n \,.$$

$$\leq \|\theta\|_{L^\infty}^{2n+1} \|\theta\|_{L^2}^{2n-2} \int_{|y|<A} V(|y|)^2 dy \,. \quad (4.53)$$

L'invariance de l'énergie (4.49) donne une estimation sur les gradients et permet de montrer sur les noyaux

$$l_{N,n}^{A,B}(z, w, t) =$$

$$\iint \theta(X_n)\theta(Y_n) V(|x_j - z|) U_{AB}(|x_j - z|) \left[\rho_{N,n+1}(X_n, z, Y_n, w, t) \right. \quad (4.54)$$

$$\left. -\rho_{n+1}(X_n, z, Y_n, w, t)\right] dX_n dY_n \,.$$

avec U_{AB} une fonction régulière à support dans un intervalle $0 < A < B < \infty$ fixé un résultat de continuité uniforme qui contourne la difficulté liée à l'application (4.44).

Enfin les énoncés (4.2) et (4.3) sont exactement de la même nature que le théorème de Cauchy Kowalewsky intervenant dans la hiérarchie de Ricatti. En effet on utilise les espace d'opérateurs à trace et on montre le lemme suivant (utiliser la décomposition polaire des opérateurs et l'inégalité de Cauchy Schwarz).

Lemme 4.1 *Soit K_{n+1} un opérateur dans $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ à noyau $k_{n+1}(X_n, w, Y_n, z)$ (que l'on suppose pour simplifier régulier). On définit dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur K_n de noyau $k_n(X_n, Y_n)$ par la formule*

$$k_n(X_n, Y_n) = \int k_{n+1}(X_n, z, Y_n, z) dz \quad (4.55)$$

alors pour la norme de la trace $|.|_1$ on a :

$$|K_n|_1 \leq |K_{n+1}|_1 \,. \quad (4.56)$$

On déduit de ce lemme l'estimation (indépendante de n et de N)

$$\begin{aligned} | \int \; & [V(|x_j - z|) - V(|y_j - z|)] \rho_{N,n+1}(X_n, z, Y_n, z) dz|_1 \\ \leq \; & |V(|x_j - z|) \rho_{N,n+1}(X_n, z, Y_n, w, t)|_1 + |\rho_{N,n+1}(X_n, z, Y_n, w, t) V(|y_j - w|)|_1 \\ \leq \; & 2|V|_{L^\infty} |\rho_{N,n+1}(X_n, z, Y_n, w, t)|_1 \end{aligned} \quad (4.57)$$

qui permet de conclure.

5 Remarques sur l'irréversibilité et la preuve de Lanford

Dans les sections **3** et **4** la même hypothèse de couplage ($C_N = N^{-1}$) a été considérée et cela a eu pour effet de préserver la réversibilité des systèmes. Ceci n'est bien sûr pas le cas pour des couplages plus forts aussi bien pour des problèmes linéaires que pour des problèmes non linéaires. Le modèle type d'apparition d'irréversibilité est probalement la dérivation de l'équation de Boltzman. Sans refaire la preuve de Lanford cela semble valoir la peine de la resituer dans le contexte du présent exposé par quelques remarques. Pour obtenir la hiérarchie de Boltzmann on considère toujours un système Hamiltonien du type (2.2). En supposant l'indistinguabilité et l'hypothèse des sphères dures (ce cas correspond à la preuve de Lanford) : le potentiel est infini pour $0 < r < \sigma$ et nul pour $\sigma < r$, un calcul formel montre que sous l'hypothèse

$$N \to \infty \text{ avec } \sigma \to 0\,, \quad \text{ et } N\sigma^2 \to \frac{1}{l} \quad 0 < l < \infty \tag{5.58}$$

les "marginales" f_N^n convergent vers les solutions de la hierarchie infinie (dite de Boltzmann) :

$$\partial_t f^n + \sum_{1\le i\le n} v_i \nabla_{x_i} f^n = \frac{1}{l} \sum_{1\le i\le n} \int_{I\!R^3\times S^2} (f_i^{(n+1)'} - f_i^{(n+1)})|v_i.\omega| d\omega dw \tag{5.59}$$

avec les notations suivantes

$$\begin{aligned} &f_i^{(n+1)}(x_1, x_2, \dots, x_n, v_1, v_2, \dots, v_n, w) \\ &= f^{(n+1)}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_i, v_1, v_2, \dots, v_n, w) \\ &f_i^{(n+1)'}(x_1, x_2, \dots, x_n, v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_n, w) \\ &= f^{(n+1)}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_i, v_1, v_2, \dots, v_i', \dots, v_n, w') \end{aligned}$$

$$v_i' = \frac{v_i + w}{2} + \frac{|v_i - w|}{2}\omega, \quad w' = \frac{v_i + w}{2} - \frac{|v_i - w|}{2}\omega\,. \tag{5.60}$$

dont, comme ci dessus, une solution est fournie par

$$f^n = \prod_{1\le n} f(x_i, v_i, t) \tag{5.61}$$

dès que $f(x, v, t)$ est solution de l'équation de Boltzmann. Ainsi avec un argument d'unicité qui ici reste du type Cauchy Kowalewsky on identifie la limite pourvu que les données initiales soient factorisées.

La démonstration rigoureuse de cette démarche appelle les remarques suivantes :

1. La dynamique de l'équation de Boltzmann est irréversible ce qui se traduit en particulier par le fait (théorème H) que la quantité

$$H(f) = \iint f(x,v,t) \log f(x,v,t) dx dv \tag{5.62}$$

est strictement décroissante tandis que la dynamique du système initial est reversible. Le mécanisme de passage à la limite est donc subtil. Comme dans tous les cas analogues la démonstration se fait en regardant la solution elle même plutot que par un passage à la limite rigoureux dans la hiérarchie finie d'équations. En effet celle ci peut s'écrire en abrégé

$$\partial_t f_N^n + A_n f_N^n = C_{N,n,n+1} f_N^{n+1} \text{ avec } C_{N,N,N+1} = 0 \tag{5.63}$$

mais comme à la fois les opérateurs $C_{N,n,n+1}$ et les fonctions f_N^{n+1} ne convergent pas très bien avec N (beaucoup moins bien que dans le cas des couplages faibles) on ne peut rien conclure sur la limite du produit $C_{N,n,n+1} f_N^{n+1}$.

2. Par contre la décroissance de l'entropie n'est pas un obstacle à la convergence. En effet avec des données intiales factorisées

$$f^N(X_N, V_N, 0) = \prod_{1\le i\le N} f(x_i, v_i)\,, \quad f(x,v) \ge 0, \iint f(x,v) dx dv = 1 \tag{5.64}$$

les quantités

$$H_N(f_N)(t) = \frac{1}{N} \iint_{(I\!\!R^3\times I\!\!R^3)^N} f_N^N(X_N, V_N, t) \log(f_N^N(X_N, V_N, t)) dX_N dV_N \tag{5.65}$$

et

$$H(f_1(t)) = \iint f(x,v,t) \log f(x,v,t) dx dv \tag{5.66}$$

sont respectivement constante et strictement décroissante. Mais le paradoxe qui semble exister entre (5.65) et (5.66) s'explique par le fait que le membre droit de (5.66) n'est pas la limite de $H_N(f_N)(t)$ mais de

$$H^1(f_N^1)(t) = \iint_{(I\!\!R^3\times I\!\!R^3)^N} (f_N^1(x,v,t)) \log(f_N^1(x,v,t)) dz\,. \tag{5.67}$$

Avec une inégalité de Jensen on montre que l'on a :

$$H^1(f_N^1)(t) \le H^N(f_N^N)(t) \tag{5.68}$$

avec égalité si et seulement si la fonction f_N^N est factorisée. Ainsi le mécanisme qui permet une convergence forte des marginales peut s'expliquer de la manière suivante. On part à l'instant $t = 0$ de données initiales factorisées (ou tendant vers des données factorisées). L'effet du système Hamiltonien H_N est entre autre de briser cette factorisation et de générer une inégalité stricte dans (5.68). Ainsi $f_N^1(t)$ et $H^1(f_N^1)(t)$ peuvent converger vers $f^1(t)$ et $H^1(f^1)(t)$ sans contredire la décroissance stricte dans (5.66).

3. La troisème remarque concerne l'intervention de l'aléatoire. Il est communément admis que l'apparition de l'irréversibilité passe par l'introduction de l'aléatoire. Dans la preuve de Lanford il y a des énoncés de théorie de la mesure très précis et difficiles. Par exemple on montre que l'ensemble des configurations initiales qui conduisent à des collisions multiples ou à une infinité de collisions en temps fini est de mesure nulle dans l'espace des phases. Mais ce n'est pas de l'aléatoire. L'aléatoire apparait juste à la fin et de manière plus subtile. Pour obtenir l'équation de Boltzmann, la factorisation des données initiales est indispensable. Il faut admettre et ceci est bien expliqué dans [C] page 95 qu'il s'agit des configurations *les plus probables ou les plus physiques.*

6 Le billard et la nécéssité de l'aléatoire dans certains modèles linéaires

C'est l'interaction entre les particules qui conduit à la non linéarité au niveau cinétique. Aussi si on considère des particules interagissant avec un milieu inerte le problème devient linéaire mais cela *ne simplifie pas les choses au contraire cela introduit une certaine rigidité et cela produit des exemples de situations où l'introduction de l'aléatoire est indispensable pour justifier les limites cinétiques.*

Les exemples modèles sont fourni par un système de particules qui évoluent librement dans $\mathbb{R}^2$ à l'extérieur de boules de taille $r\epsilon^2$. On étudie deux types d'interactions entre les particules et les obstacles :

1. *Réflexion spéculaire* : Les particules qui heurtent l'obstacle sont réfléchies selon les lois de Descartes.
2. *Frontière absorbante* : Les particules qui heurtent l'obstacle sont simplement absorbées et disparaissent.

On dénote par O_ϵ le domaine où évoluent les particules et par Γ_ϵ sa frontière (qui est bien sûr la réunion des frontières de chaque obstacle). Enfin pour $x \in \Gamma_\epsilon$, n_x est la normale unitaire à la frontière orientée vers l'extérieure du domaine, elle coincide avec

$$\omega = \frac{\vec{ox}}{|\vec{ox}|}$$

où o désigne le centre de la boule correspondante. Dans le premier et dans le second cas (tant que les particules sont présentes) le module de la vitesse est constant. Dans les deux cas l'équation dans O_ϵ est

$$\partial_t f_\epsilon(x,\Omega,t) + \Omega\nabla f_\epsilon(x,\Omega,t) = 0 \text{ avec } \Omega \in S^1 \,. \tag{6.69}$$

tandis que les conditions aux limites sont pour les cas 1 et 2 :

$$\text{pour } x \in \Gamma_\epsilon,\ f_\epsilon(x,\Omega,t) = f_\epsilon(x,R(\omega)\Omega,t) \text{ avec } R(\omega)\Omega = \Omega - 2(\Omega\cdot\omega)\omega \,. \tag{6.70}$$

et

$$\text{pour } x \in \Gamma_\epsilon,\ f_\epsilon(x,\Omega,t) = 0 \text{ quand } \Omega\cdot\omega > 0 \,. \tag{6.71}$$

Suivant Golse [Go] on considère d'abord le billard périodique avec les centre des boules aux points $a\mathbf{Z}^2$ et on suppose que l'état initial est *isotrope*

$$f_\epsilon(x,\Omega,0) = \phi(x)_{|O_\epsilon} \,. \tag{6.72}$$

Pour un calcul formel de la limite quand $\epsilon \to 0$ on prolonge (en gardant la même notation) $f_\epsilon(x,\Omega,t)$ par 0 dans $I\!R^2\backslash O_\epsilon$. Ceci génère une distribution portée par Γ_ϵ et (6.69) devient

$$\partial_t f_\epsilon(x,\Omega,t) + \Omega\nabla f_\epsilon(x,\Omega,t) - (\Omega\cdot n_x) f_\epsilon(x,\Omega,t)_{|\Gamma_\epsilon}\delta_{\Gamma_\epsilon} = 0 \tag{6.73}$$

avec

$$< (\Omega\cdot\omega) f_\epsilon(x,\Omega,t)_{|\Gamma_\epsilon}\delta_{\Gamma_\epsilon}, \phi(x,\Omega,t) >=$$

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}^2} \iint (\Omega\cdot n_x) f_\epsilon(a\epsilon k + \epsilon\omega,\Omega,t)\phi(a\epsilon k + \epsilon\omega,\Omega,t)\epsilon^2 r d\omega d\Omega$$

$$= \frac{r}{a^2}\epsilon^2 a^2 \sum_{k\in\mathbf{Z}^2}$$

$$\iint (\Omega\cdot\omega) f_\epsilon(a\epsilon k + \epsilon\omega,\Omega,t)\phi(a\epsilon k + \epsilon\omega,\Omega,t) d\omega d\Omega \,. \tag{6.74}$$

Ensuite dans le premier cas, pour prendre en compte le fait que l'on veut une limite pour des temps positifs (cette idée est aussi présente dans la preuve de Lanford) on écrit :

$$-(\Omega{\cdot}\omega)f_\epsilon(x,\Omega,t)_{|\Gamma_\epsilon}\delta_{\Gamma_\epsilon}=(\Omega{\cdot}\omega)_-f_\epsilon(x,\Omega,t)_{|\Gamma_\epsilon}\delta_{\Gamma_\epsilon}-(\Omega{\cdot}\omega)_+f_\epsilon(x,R(\omega)(\Omega),t)_{|\Gamma_\epsilon}\delta_{\Gamma_\epsilon}\,. \tag{6.75}$$

Le dernier terme de (6.74) apparait comme l'analogue d'une somme de Riemann et avec une variante à 2 dimension de la formule d'Euler Mac Laurin on montre [Go] que pour tout couple (f,ϕ) de fonctions régulières on a :

$$\begin{aligned}\forall n \quad &-<(\Omega\cdot\omega)f(x,\Omega)_{|\Gamma_\epsilon}\delta_{\Gamma_\epsilon},\phi(x,\Omega)>\\ =&<\frac{\pi r}{2a^2}[2f(x,\Omega)-\frac{1}{4}\int_{S^1}f(x,\Omega')|\Omega-\Omega'|d\Omega'],\phi(x,\Omega)>+R_n^\epsilon\end{aligned} \tag{6.76}$$

avec l'estimation :

$$|R_n^\epsilon|\le C_n\epsilon^n\,. \tag{6.77}$$

Les formules (6.76) et (6.73) semblent indiquer que la suite f_ϵ converge vers la solution de l'équation cinétique linéaire :

$$\partial_t f(x,\Omega,t)+\Omega\nabla f(x,\Omega,t)+\frac{r}{a^2}[2f(x,\Omega)-\frac{1}{4}\int_{S^1}f(x,\Omega')|\Omega-\Omega'|d\Omega']=0 \tag{6.78}$$

connue sous le nom d'équation de transport des neutrons. Cet argument n'est cependant pas correct au moins pour les raisons suivantes :

Les formules (6.76) et (6.77) ne seront valable que si les dérivées de f_ϵ sont uniformément bornées. Mais l'opérateur

$$f\mapsto Kf=\frac{r}{a^2}[2f(x,\Omega)-\frac{1}{4}\int_{S^1}f(x,\Omega')|\Omega-\Omega'|d\Omega'] \tag{6.79}$$

est autodajoint positif et un calcul directe ou l'invocation du théorème de Krein et Rutman montre l'existence d'une constante strictement positive β telle pour tout f on ait :

$$(Kf,f)_{L^2(\mathbf{S}^2)}\ge\beta\|P^\perp f\|^2_{L^2(\mathbf{S}^2)} \tag{6.80}$$

avec $P^\perp$ désignant la projection orthogonale sur l'espace des fonctions de moyenne nulle. En conséquence pour les solutions de (6.78) on a :

$$\frac{d}{dt}\iint|f(x,\Omega,t)|^2dxd\Omega+\beta\int\|P^\perp f(x,\Omega)\|^2_{L^2(S^1)}dx\le 0 \tag{6.81}$$

tandis que la structure hamiltonienne de la dynamique du billard donne

$$\iint|f_\epsilon(x,\Omega,t)|^2dxd\Omega=\iint|f_\epsilon(x,\Omega,0)|^2dxd\Omega\,. \tag{6.82}$$

Avec (6.81) et (6.82) on ne peut avoir convergence forte dans L^2 de la suite f_ϵ et ainsi on n'a pas les hypothèses nécessaire à la validité de (6.76) et on ne peut conclure que (6.78) décrit l'évolution de la limite.

De plus le même calcul formel conduit dans le cas de la condition aux limites *absorbante* à l'équation

$$\partial_t f(x,\Omega,t) + \Omega\nabla f(x,\Omega,t) + \frac{2r}{a^2} f(x,\Omega,t) = 0 \tag{6.83}$$

qui implique un taux de décroissance exponentielle pour la solution. Cependant des calculs explicites faits par Golse and B. Wennberg [GW] en analysant l'ergodization sur le tore $I\!R\backslash\mathbf{Z}^2$ conduisent à l'énoncé suivant.

Théoreme 6.1 [GW] *Soit $f(x,\Omega,t)$ une limite (faible) de solutions $f_\epsilon(x,\Omega,t)$ de (6.69) avec condition initiale (6.72) et condition aux limite absorbante alors il n'existe pas de constante σ telle que l'on ait :*

$$\partial_t f(x,\Omega,t) + \Omega\nabla f(x,\Omega,t) + \sigma f(x,\Omega,t) \leq 0\,. \tag{6.84}$$

Ceci montre bien que les limites formelles ne sont pas valables.

Pour arranger les choses il serait tentant d'introduire, comme pour l'équation de Boltzmann, une distribution de N particules :

$$f(X_N,\Omega_N)$$

et d'analyser la convergence des marginales. Mais ici cela n'améliore pas la situation pour la raison suivante : Comme il n'y a pas d'interaction entre les particules un état initial factorisé reste factorisé et l'énergie de la première marginale

$$\int |f_N^1(x_1,\Omega_1,t)|^2 dx_1, d\Omega_1$$

qui sur les modèles linéaires joue le rôle de l'entropie reste constante ce qui est une obstruction à la convergence forte.

Par contre l'introduction de l'aléatoire suivant un programme initialisé par Gallavotti [Ga] et developpé par plusieurs autres auteurs [BBS] et [DP], produit des régimes où les limites sont décrites par les équations cinétiques introduites ci dessus. Autrement dit les équations (6.78) (resp. (6.83)) décrivent bien l'évolution d'un gas de Knudsen (sans interaction) à l'extérieur de boule de taille $r\epsilon^2$ avec à la frontière réflection spéculaire (resp. (absorption)) si ϵ est assez petit et si les obstacles sont placés de manière aléatoire. Un énoncé plus précis se formule comme suit :

Théoreme 6.2 ([BBS]) *On considère des boules de rayon ϵ^2 et de centre c_i. On suppose que la probabilité de trouver exactement N boules dans un domaine $\Lambda \subset I\!R^2$est donnée la loi de "Poisson"*

$$P(d\mathbf{c}_N) = e^{-\mu_\epsilon|\Lambda|}\frac{\mu_\epsilon^N}{N!}dc_1dc_2...dc_N \tag{6.85}$$

avec

$$\mathbf{c}_N = c_1, c_2, ...c_N \text{ and } \mu_\epsilon = \frac{\mu}{\epsilon}\,. \tag{6.86}$$

On denote par $\mathbf{E}^\epsilon$ l'espérance par rapport à cette distribution. Pour ϵ et $\mathbf{c}_N$ fixés on introduit

$$O_{\mathbf{c}_N,\epsilon} = I\!R^2\backslash \cup_{1\le i\le N}\{|x-c_i|\le\epsilon\} \tag{6.87}$$

et $f_{\mathbf{c}_N,\epsilon}$ solution du problème (6.69), (6.72) avec condition aux limites de reflexion spéculaire. Alors

$$h_\epsilon(x,t,\Omega) = \mathbf{E}^\epsilon[f_{\mathbf{c}_N,\epsilon}] \tag{6.88}$$

converge faiblement vers la solution du problème

$$\partial_t f(x,\Omega,t) + \Omega\nabla f(x,\Omega,t) + \mu[2f(x,\Omega) \tag{6.89}$$

$$-\frac{1}{4}\int_{S^1} f(x,\Omega')|\Omega-\Omega'|d\Omega'] = 0, f(x,\Omega,0) = \phi(x)\,.$$

La preuve de (6.2) peut être trouvée dans [Ga], [BBS] et (pour des potentiels au lieu de sphères dures) dans [DP]. Il convient cependant de faire les remarques suivantes :

1. L'introduction de l'aléatoire ne détruit pas le caractère réversible du système initial. Ainsi le théorème 6.2 donne un exemple de dérivation d'un système irréversible à partir d'un système réversible..
2. Cette dérivation est obtenue par l'analyse de la solution et non de l'équation. Comme les solutions, les termes de l'équation dépendent de ϵ et comme il ne peut y avoir que convergence faible cela génère des difficultés qui ne peuvent être surmontées que par l'analyse des solutions elles mêmes. Comme cela a été dit ci dessus cette remarque s'applique aussi à la preuve de Lanford. Elle est aussi vraie pour un modèle déterministe et complètement explicite construit à partir de l'application du chat d' Arnold ([BGC]). Elle me semble s'appliquer à tous les exemples où on déduit un système irréversible d'un système réversible.

3. La démonstration (6.2) s'adapte aux cas de la condition aux limites absorbante et donne à la limite l'équation.

$$\partial_t f(x,\Omega,t) + \Omega\nabla f(x,\Omega,t) + \sigma f(x,\Omega,t) = 0 \qquad (6.90)$$

En conjonction avec ([GW]) on a ainsi un exemple complet d'une situation où une équation cinétique n'est pas valable pour un modèlde déterministe mais devient valable si on introduit un aléatoire convenable dans ce modèle.

Références

[BGC] C. Bardos,G. Golse, and J.F. Colonna : "Diffusion approximation and hyperbolic automorphism of the torus", Physica D 104 (1997), 32–60.

[BGL2] C. Bardos, F. Golse and D. Levermore : Fluid dynamics limits of kinetic equations I : Formal derivations, J. of Stat. Phys. **63** (1991), 323–344.

[BGL3] C. Bardos, F. Golse and D. Levermore : Fluid dynamics limits of kinetic equations II : Convergence proofs for the Boltzmann equation , Comm. on Pure and Appl. Math. **46** (1993), 667–753.

[BGM] C.Bardos, F. Golse and N.J. Mauser, "Weak coupling limit of the N-particle Schrödinger equation", to appear in Mathematical Analysis and Applications (2000)

[BBS] C. Boldrighini,L.A. Bunimovich and Ya. G. Sinai, "On the Boltzmann Equation for The Lorenz Gas", Comm. Math. Phys. **56** (1977), 101–113.

[BH] W. Braun and K. Hepp, "The Vlasov Dynamics and its fluctuation in the 1/N limit of interacting particles", Comm. Math. Phys. **56** (1977), 101–113.

[C] C. Cercignani, *Ludwig Boltzmann*, Oxford Univ. Press (1998).

[CIP] C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti : "The mathematical theory of dilute gases" ; Applied Mathematical Sciences, 106 ; Springer-Verlag, New York, (1994).

[DP] L. Desvillettes and M. Pulvirenti : "The linear Boltzmann Equation for Long -Range Forces : A Derivation From Particles Systems" ; Math. Methods and Models in Applied Sciences **9** (1999), 10123–10145.

[Ga] G. Gallavotti : "Rigourous theory of the Boltzmann equation in the Lorentz gas" ; Nota interna n. 358, Istituto di Fisica, Universitá di Roma (1973).

[Go] F Golse : "Transport dans les milieux composites fortement contrastés I : le modèle du billiard" ; Annales Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique 61 (1994), 381–410.

[GW] F.Golse, B. Wennberg : "On the distribution of free path lengths for the periodic Lorentz" gas II ; preprint E.N.S., DMA-99-31.

[LM] P.L. Lions and N. Masmoudi, From Boltzmann equations to incompressible fluid mechanics equations I and II preprints CIMS April 2000.

[NS] H. Narnhofer and G.L. Sewell, "Vlasov Hydrodynamics of a Quantum Mechanical Model", Commun. Math. Phys. **79** (1981), 9–24.

[Nir] L. Nirenberg, "An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalewski Theorem", J. of Diff. Geom. **6** (1972), 561–576.

[Nis] T. Nishida, "A note on a theorem of Nirenberg", J. of Diff. Geom. **12** (1978), 629–633.

[Sp1] H. Spohn, "Kinetic Equations from Hamiltonian Dynamics", Rev. Mod. Phys. **52** no. 3 (1980), 600 – 640.

[Sp2] H. Spohn, "Quantum Kinetic Equations", in *On the Three Levels*, M. Fannes et al. eds., Plenum Press, New York (1994), 1 – 10.

[Sp3] H. Spohn, "Boltzmann Hierarchy and Boltzmann equation", in *Kinetic theories and the Boltzmann equation*, C. Cercignani ed., LNM no. 1048, Springer-Verlag Berlin (1984).