SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2000-2001

Olivier Lafitte

Sur la phase linéaire de l'instabilité de Rayleigh-Taylor

Séminaire É. D. P. (2000-2001), Exposé n° XXI, 20 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2000-2001____A21_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Sur la phase linéaire de l'instabilité de Rayleigh-Taylor

Olivier Lafitte[*][†]

1 Introduction et modélisation du problème physique

L'instabilité de Rayleigh-Taylor apparaît dans les travaux de Rayleigh de 1883 [18] et les calculs ont été repris par Taylor en 1949 [21], cette instabilité porte souvent le nom d'instabilité de Taylor dans la littérature anglo-saxonne. Sommairement, elle est engendrée par la superposition de deux fluides de densités différentes dans un champ de forces constant, typiquement le champ de pesanteur. On peut schématiquement la représenter de la manière suivante : lorsque, dans le champ de pesanteur terrestre, le fluide léger est situé au dessus du fluide lourd, il n'y a pas d'instabilité alors que si le fluide lourd est sur le fluide léger, une instabilité se développe.

Le problème a fait l'objet de beaucoup de travaux en physique des plasmas ou en mécanique des fluides ([17], [3], [13], [2], [20], [9]). Etonnamment, les mathématiciens ne s'y intéressent que depuis peu de temps pour donner des résultats non formels.

Dans cet exposé, nous nous intéressons à une généralisation de l'instabilité de Rayleigh-Taylor. En effet, la situation décrite ci-dessus correspond à la perturbation de la solution suivante du système d'équations d'Euler dans $\mathbb{R}^2 \cap \{x < 0\}$ ou $\mathbb{R}^2 \cap \{x > 0\}$, la force de pesanteur étant $\vec{g} = -g\vec{e}_x$, $g > 0$:

$$\rho_R(x,y,t) = \begin{cases} \rho_2 \text{ pour } x < 0 \\ \rho_1 \text{ pour } x > 0 \end{cases}, u_R = v_R = 0, p_R(x,y,t) = -\begin{cases} \rho_2 g x, x < 0 \\ \rho_1 g x, x > 0 \end{cases}$$

Les problèmes physiques qui nous intéressent correspondent non pas à deux fluides de densités différentes séparés par une interface (comme cela

[*]CEA DM2S/DIR, Centre d'Etudes de Saclay, 91 191 Gif sur Yvette Cedex
[†]CMAT, Ecole Polytechnique, 91 128 Palaiseau Cedex

est le cas pour ρ_R), mais à une situation de mélange où la densité ponctuelle est $\rho_0^*(x,y,t)$ telle que

$$\lim_{x\to-\infty} \rho_0^*(x,y,t) = \rho_2, \lim_{x\to+\infty} \rho_0^*(x,y,t) = \rho_1. \tag{1.1}$$

Nous supposerons que ρ_0^* ne dépend que de x, est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas, et que $\rho_2 > \rho_1$, ce qui est le cas où la situation est instable.

Rappelons les résultats de Rayleigh. Il a linéarisé le système d'équations d'Euler autour de l'écoulement caractérisé par ρ_R et il a cherché, pour le système linéaire obtenu, une solution de la forme

$$(\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p})(x,k,\gamma)e^{iky+\gamma t} \tag{1.2}$$

(que l'on appelle les modes normaux). Il a prouvé que ce système admet une solution non triviale construite à partir de

$$\tilde{u}(x,k,\gamma) = \tilde{u}(0,k,\gamma)e^{-|k||x|}$$

uniquement pour

$$\gamma = \gamma_R = (Ag|k|)^{\frac{1}{2}}, A = \frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1}. \tag{1.3}$$

La valeur γ_R s'appelle le taux de croissance de l'instabilité de Rayleigh-Taylor et A le nombre d'Atwood. Dans tout ce qui suit, on prendra $k > 0$.

Le but de cet exposé est de donner les propriétés des taux de croissance possible dans plusieurs cas différents. Nous commençons par une remarque physique. Une quantité caractéristique de l'écoulement non perturbé

$$(\rho_0^*, u_0^*, 0, p_0^*)(x) \tag{1.4}$$

solution des équations d'Euler compressibles, qui se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(\rho_0^*(x)u_0^*(x)) = 0 \\ \frac{d}{dx}(\rho_0^*(x)(u_0^*(x))^2 + p_0^*(x)) = -\rho_0^*(x)g \end{cases} \tag{1.5}$$

est la longueur de mélange $L_0^*(x)$, définie dans les régions où $\frac{d}{dx}\rho_0^*(x) \neq 0$

$$L_0^*(x) = \left|\frac{\rho_0^*(x)}{\frac{d}{dx}\rho_0^*(x)}\right|. \tag{1.6}$$

Une autre quantité pertinente est $|k|$, nombre d'onde de la perturbation transverse à l'interface $x = 0$, que l'on désignera par k dans la suite en supposant $k > 0$.

Nous étudierons le problème dans cet exposé dans les deux cas suivants :

• longueur de mélange tendant vers 0,

• nombre d'onde tendant vers $+\infty$, la longueur de mélange étant fixée.

Le premier cas est modélisé de la manière suivante. On introduit un écoulement de base de sorte que

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{dX}(\rho_0(X)u_0(X)) = 0 \\ \frac{d}{dX}(\rho_0(X)(u_0(X))^2 + p_0(X)) = -\rho_0(X)g \end{array}\right. \tag{1.7}$$

où $\rho_0(X)$ tend vers ρ_2 si $X \to -\infty$ et tend vers ρ_1 si $X \to +\infty$. L'écoulement autour duquel on perturbe est

$$\rho_0^*(x) = \rho_0(\tfrac{x}{\epsilon}), u_0^*(x) = \sqrt{\epsilon}u_0(\tfrac{x}{\epsilon}), v_0^*(x) = 0, p_0^*(x) = \epsilon p_0(\tfrac{x}{\epsilon}).$$

Alors $L_0^*(x) = \epsilon|\frac{\rho_0(\frac{x}{\epsilon})}{\rho_0'(\frac{x}{\epsilon})}|$ et la longueur de mélange est d'ordre ϵ dans les régions où $|\rho_0'(X)| \geq \delta > 0$. Ainsi, dire que la longueur de mélange tend vers 0 correspond au cas $\epsilon \to 0$.

Cet exposé est entièrement consacré aux perturbations dans le régime linéaire. Le système des équations d'Euler linéarisées autour de de l'écoulement (1.4) s'écrit, après utilisation de $\frac{d}{dx}(\rho_0^* u_0^*) = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t \rho_1 + \frac{d\rho_0^*}{dx}u_1 + \frac{d}{dx}(\rho_1 u_0^*) = -\rho_0^*(\partial_x u_1 + \partial_y v_1) \\ \rho_0^*\partial_t u_1 + \frac{du_0^*}{dx}(u_0^*\rho_1 + \rho_0^* u_1) + \rho_0^* u_0^*\partial_x u_1 + \partial_x p_1 = -\rho_1 g \\ \rho_0^*\partial_t v_1 + \rho_0^* u_0^*\partial_x v_1 + \partial_y p_1 = 0 \end{array}\right.$$

La principale hypothèse physique (justifiée dans le cadre des écoulements étudiés dans la Fusion par Confinement Inertiel [4]) est que l'on considère une perturbation incompressible des écoulements compressibles. Ainsi on ajoute

$$\partial_x u_1 + \partial_y v_1 = 0.$$

Le système linéaire étudié est alors

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t \rho_1 + \frac{d\rho_0^*}{dx}u_1 + \frac{d}{dx}(\rho_1 u_0^*) = 0 \\ \rho_0^*\partial_t u_1 + \frac{du_0^*}{dx}(u_0^*\rho_1 + \rho_0^* u_1) + \rho_0^* u_0^*\partial_x u_1 + \partial_x p_1 = -\rho_1 g \\ \rho_0^*\partial_t v_1 + \rho_0^* u_0^*\partial_x v_1 + \partial_y p_1 = 0 \\ \partial_x u_1 + \partial_y v_1 = 0. \end{array}\right.$$

Les modes normaux sont utilisés pour analyser ce système, et on aboutit au système (1.8) :

$$\begin{cases} \gamma\tilde{\rho} + \frac{d\rho_0^*}{dx}\tilde{u} + \frac{d}{dx}(\tilde{\rho}u_0^*) = 0 \\ \gamma\rho_0^*\tilde{u} + \frac{du_0^*}{dx}(u_0^*\tilde{\rho} + \rho_0^*\tilde{u}) + \rho_0^*u_0^*\frac{d}{dx}\tilde{u} + \frac{d}{dx}\tilde{p} = -\tilde{\rho}g \\ \rho_0^*\gamma\tilde{v} + \rho_0^*u_0^*\frac{d}{dx}\tilde{v} + ik\tilde{p} = 0 \\ \partial_x\tilde{u} + ik\tilde{v} = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

2 Enoncé des résultats

On envisage dans ce texte deux cas. Le premier cas (paragraphe 2.1) est le cas où la vitesse de convection u_0^* est identiquement nulle, et on étudiera deux limites asymptotiques pour le système, l'une lorsque k est grand, l'autre lorsque la longueur de mélange ϵ tend vers 0. Le deuxième cas (paragraphe 2.2) correspond à une vitesse de convection non nulle, et nous n'avons de résultats pour le moment que dans le cas ϵ tendant vers 0.

2.1 Le cas sans vitesse de convection

On se ramène aisément à l'équation dite de Rayleigh sur $\tilde{u}$:

$$-\frac{d}{dx}[\rho_0^*(x)\frac{d\tilde{u}}{dx}] + k^2[\rho_0^*(x)\tilde{u} + \frac{g}{\gamma^2}\frac{d\rho_0^*(x)}{dx}\tilde{u}] = 0 \tag{2.9}$$

et aux deux égalités permettant de déterminer $\tilde{\rho}$ et $\tilde{p}$:

$$\tilde{\rho} = -\frac{1}{\gamma}\frac{d\rho_0^*(x)}{dx}\tilde{u}, \tilde{p} = -\frac{\gamma}{k^2}\rho_0^*(x)\frac{d\tilde{u}}{dx}.$$

On appelle fonction propre et valeur propre solution de (2.9) que l'on notera $(u_\epsilon, \lambda_\epsilon)$, un couple $u_\epsilon \in L^2(\mathbb{R}), \lambda_\epsilon > 0$, $u_\epsilon \neq 0$, tel que

$$-\frac{d}{dx}[\rho_0^*(x)\frac{du_\epsilon}{dx}] + [k^2\rho_0^*(x)u_\epsilon + \lambda_\epsilon k\frac{d\rho_0^*(x)}{dx}u_\epsilon] = 0.$$

La condition $\lambda_\epsilon > 0$ provient du fait que l'on recherche une solution instable, qui est alors associée à un taux de croissance de l'instabilité $\gamma_\epsilon = (\frac{gk}{\lambda_\epsilon})^{\frac{1}{2}}$. Le comportement $u_\epsilon \in L^2(\mathbb{R})$ remplace la condition usuelle des physiciens que u_ϵ soit bornée ou tende vers 0 en $\pm\infty$, car c'est le cadre naturel des problèmes spectraux autoadjoints. On remarque que, par la formulation variationnelle de (2.9), $\lambda_\epsilon \geq 1$ pour une solution non triviale.

Nous introduisons deux types d'hypothèses de comportement de la densité en l'infini (pour la deuxième, ρ_0 est supposée de classe C^1) :

$$(H) \quad M = (\int_{-\infty}^0 |\rho_0^*(x) - \rho_2|^2 dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_0^{+\infty} |\rho_0^*(x) - \rho_1|^2 dx)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

$(H*)\quad \exists X_0 > 0, \mu > 0,$ si $g(X) = X^{\mu}\rho_0(X), Xg'(X)$ borné sur $[X_0, +\infty[$
et g et g^{-1} bornées sur $[X_0, +\infty[$ de limite finie $+\infty$
$(\int_{-\infty}^{X_0} |\rho_0^*(x) - \rho_2|^2 dx)^{\frac{1}{2}} < +\infty$

Proposition 1 *Soit c_2 une constante positive fixée. On suppose qu'il existe une suite ϵ_n qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ telle qu'il existe, pour tout n, un couple $(u_{\epsilon_n}, \lambda_{\epsilon_n})$ vecteur propre-valeur propre de Rayleigh telle que $1 \leq \lambda_{\epsilon_n} \leq c_2$. On suppose* $\inf \rho_0 > 0$.

Sous l'hypothèse (H), on a les deux résultats suivants :

i) La suite λ_{ϵ_n} converge vers $\frac{1}{A}$.

ii) Si, de plus, il existe[1] *$\mu_1 > 0$ tel que $X^{\mu_1}\frac{d\rho_0^*(X)}{dX}$ est borné en $\pm\infty$ et si $||u_{\epsilon_n}||_{L^2(\mathbb{R})} = 1, u_{\epsilon_n}(0) > 0$, alors*

$$u_{\epsilon_n} \textit{ tend fortement dans } L^2(\mathbb{R}) \textit{ vers } \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-k|x|}.$$

Proposition 2 *Soit c_2 une constante positive fixée. On suppose qu'il existe une suite ϵ_n qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ telle qu'il existe, pour tout n, un couple $(u_{\epsilon_n}, \lambda_{\epsilon_n})$ vecteur propre valeur propre de Rayleigh telle que $\lambda_{\epsilon_n} \leq c_2$.*

Sous l'hypothèse (H), $\lambda_\epsilon \to 1$.*

On note que les méthodes s'appuyant sur l'ellipticité uniforme de l'opérateur $-\frac{d}{dx}(\rho_0^*(x)\frac{du}{dx}) + \rho_0^*(x)u$ (qui sont à la base de la démonstration de la proposition 1), ne s'appliquent pas à la proposition 2.

On introduit alors les deux hypothèses (H1) et (H2) suivantes, dans le cas où $\rho_0(X)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux[2], qui visent à préciser le comportement du taux de croissance λ_ϵ pour $\epsilon < \epsilon_0$:

$$(H1)\quad \begin{array}{l} \text{il existe } A > 0, \theta_1, \theta_2 > 0 \text{ telles que, pour} \\ X < -A, \theta_1|\rho_0(X) - \rho_2| \leq -\rho_0'(X) \leq \theta_2|\rho_0(X) - \rho_2| \\ X > A, \theta_1|\rho_0(X) - \rho_1| \leq -\rho_0'(X) \leq \theta_2|\rho_0(X) - \rho_1| \end{array}$$

$$(H2)\quad \begin{array}{l} \text{il existe } A > 0, \theta_1, \theta_2 > 0, \mu > 0 \text{ telles que, pour} \\ X < -A, \theta_1|\rho_0(X) - \rho_2| \leq -\rho_0'(X) \leq \theta_2|\rho_0(X) - \rho_2| \\ X^{\mu}\rho_0(X) \to l > 0 \text{ pour } X \to +\infty \end{array}$$

[1] cette hypothèse peut être affaiblie, voir [10]

[2] Il suffit que ρ' soit dans L^1_{loc}

Remarquons que l'hypothèse (H2) entraine $\rho_1 = 0$ et on n'est plus dans le cadre d'application de la proposition 1 puisque $\inf \rho_0 = 0$. c'est une application de la proposition 2.

L'hypothèse (H1) correspond à un comportement de type exponentiel en l'infini.

L'hypothèse (H2) correspond à un comportement de type exponentiel en $-\infty$ et un comportement "rationnel" en $+\infty$. Notons que les hypothèses (H2) et (H*) sont vérifiée pour un profil de densité comme ceux qui ont été identifiés dans [4], solution de l'équation

$$L_0 \rho_2^{\nu+1} \tfrac{d\rho_0^*}{dx} = (\rho_0^*)^{\nu+1}(\rho_2 - \rho_0^*). \tag{2.10}$$

En effet, si $h(y) = y(\rho_0 * (y))^\nu$, on vérifie par séparation des variables et intégration que h vérifie $L_0\rho_2^{\nu+1}[1/h - yh'/h] = \nu(\rho_2 - h^{\frac{1}{\nu}} y^{-\frac{1}{\nu}})$, et comme ρ_0* est borné, h tend vers une limite, ce qui permet de calculer la limite de $1/h$, et de vérifier que yh'/h est borné. On peut donc appliquer le résultat de la proposition 2 au profil identifié dans [4] à partir de celui proposé par Spitzer et Haerm [19] ou Kull [13] lorsque L_0 tend vers 0.

On a les deux résultats suivants sur le comportement de $\lambda_\epsilon - \frac{1}{A}$ lorsque $\epsilon \to 0$:

Théorème 1 *On suppose que ρ_0 vérifie (H1).*

a) Il existe $\epsilon_0 > 0$, $C > 0$, tels que, pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$, l'équation (2.9) ait une unique solution $(u_\epsilon, \lambda_\epsilon) \in L^2(\mathbb{R}) \times [1, C]$ normalisée par

$$u_\epsilon(x)e^{-kx} \to 1 \text{ si } x \to -\infty.$$

b) La fonction λ_ϵ est analytique en ϵ pour $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_0$, et on connait son développement lorsque $\epsilon \to 0$

$$\lambda_\epsilon = \frac{1}{A} + k\epsilon L + O(\epsilon^2),$$

où L est donné par l'égalité

$$L = \frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_2 - \rho_1)^3} \int_{\mathbf{R}} \tfrac{(\rho_2 - \rho_0(X))(\rho_0(X) - \rho_1)}{\rho_0(X)} dX.$$

Ce résultat est complété par le résultat suivant, qui indique que le comportement exponentiel aussi bien que la limite non nulle pour la densité sont nécessaires pour obtenir un développement en ϵ, chose qui n'est apparu que dans les travaux de Goncharov sans démonstration [9].

Théorème 2 *On suppose que ρ_0 vérifie (H2) et (H*).*

a) Il existe $\epsilon_0 > 0$ et C tels que, pour tout $\epsilon < \epsilon_0$, (2.9) admette une unique solution $(u_\epsilon, \lambda_\epsilon) \in L^2(\mathbb{R}) \times [1, C]$ normalisée par

$$u_\epsilon e^{-kx} \to 1 \text{ si } x \to +\infty.$$

b) Il existe $C_0 > 0$ tel que, pour tout $\epsilon < \epsilon_0$, $|\lambda_\epsilon - 1| \leq C\epsilon^\mu$.

c) La limite de $\epsilon^{-\mu}(\lambda_\epsilon - 1)$ est $\frac{2^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+1)} \frac{\lim_{X\to+\infty} X^\mu \rho_0(X)}{\rho_2}$.

De ces deux résultats, on déduit que la différence $\lambda_\epsilon - \frac{1}{A}$ n'est pas d'ordre ϵ comme l'affirment la plupart des articles de Physique sur le sujet, et en particulier l'ordre de convergence dépend du comportement de $\rho_0(x)$ en l'infini.

Pour l'équation de Rayleigh, nous avons un résultat lorsque $k \to +\infty$, qui est un résultat d'analyse semi-classique pour l'équation de Schrödinger en dimension 1. On énonce ce résultat dans un cadre simple. On suppose ainsi ρ_0 de classe C^3, $\rho_0'(X) \leq 0$ sur $\mathbb{R}$ et $\rho_0'(X) < 0$ dans un intervalle $[a, b]$. On suppose que la longueur de mélange $L_0(X) = \frac{\rho_0(X)}{-\rho_0'(X)}$ admet un minimum absolu L_m sur $\mathbb{R}$ en $X_m \in]a, b[$. On désigne par

$$Q = \frac{d^2 L_0}{dX^2}(X_m), \quad \gamma_{max} = (\frac{g}{\epsilon L_m})^{\frac{1}{2}}. \tag{2.11}$$

Proposition 3 *Soit N un entier naturel non nul. Il existe $k_0(\epsilon, N)$ tel que, pour*

$$k \geq k_0(\epsilon, N)$$

l'équation (2.9) admet exactement N couples de vecteurs propres valeurs propres (u_n, λ_n) tels que

$$\gamma_n = (\frac{gk}{\lambda_n})^{\frac{1}{2}} \in [\frac{\gamma_{max}}{(1+\frac{(2N+1)}{k\epsilon}(\frac{Q}{2L_m})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}, \gamma_{max}].$$

chacune étant de multiplicité 1.

Il existe une constante $D(N)$ telle que

$$|\frac{g}{\epsilon\gamma_n^2} - L_m(1 + \frac{(2n+1)}{k\epsilon}(\frac{Q}{2L_m})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}| \leq D(N)k^{-\frac{3}{2}}.$$

La limite de γ_n, lorsque k tend vers $+\infty$, est γ_{max}.

Une conséquence immédiate de cette proposition est que, lorsque k est assez grand, on ne peut plus considérer comme prédominant le plus grand taux de croissance de l'instabilité ; tous les taux de croissance différents pour un mode donné contribuent également à la croissance en temps de la perturbation et en particulier tous les modes contribuent à la solution.

D'autre part, comme le taux de croissance γ est majoré par γ_{max}, on a **saturation de l'instabilité**, qui ne dépend plus de la fréquence en $\sqrt{k}$, mais tend vers une limite finie.

La proposition 3 est valable dans un cadre plus général sur le profil de densité $\rho_0(X)$, nous renvoyons à des travaux en cours avec B. Helffer [10] pour ces extensions, ainsi que pour d'autres extensions généralisant le taux de convergence pour les propositions 1 et 2.

2.2 Le cas avec vitesse de convection

Dans cette section, nous généralisons les résultats obtenus dans [5] pour un zone de mélange (zone où $\frac{d\rho_0^*}{dx} \neq 0$) finie à un cas plus général, où le profil de densité $\rho_0(X)$ vérifie l'hypothèse (H1). Dans ce cas, on obtient une équation différentielle ordinaire dans $\mathbb{R}^4$ pour les quantités perturbées, et l'approche employée correspond à l'approche des fonctions d'Evans, comme décrites par Gardner et Zumbrun [6] ou par Benzoni et Serre [1]. Cette approche est une approche de type systèmes dynamiques pour une équation de la forme (1.8), les quantités k, γ, ϵ, g étant des paramètres. Elle est rendue plus délicate ici parce que les matrices asymptotiques du système dynamique associé ne sont pas hyperboliques. La fonction d'Evans d'un tel système est le Wronskien entre les solutions bornées en $+\infty$ et les solutions bornées en $-\infty$, obtenues à partir des valeurs propres respectivement négatives et positives de la matrice A apparaissant dans (1.8). On renormalise les quantités physiques par $\bar{\gamma} = (gk)^{\frac{1}{2}}$, $\bar{u} = \sqrt{\epsilon}\lim_{X\to-\infty} u_0(X)$, $Fr = \frac{\bar{u}^2}{g\epsilon}$, $\bar{\rho} = \rho_2$. On note que la quantité Fr **modélise** un nombre caractéristique de l'écoulement qui est le nombre de Froude. On introduit les fonctions $\hat{u}_0(X)$ et $\hat{\rho}_0(X)$ telles que $\rho_0(X) = \bar{\rho}\hat{\rho}_0(X)$ et $\sqrt{\epsilon}u_0(X) = \bar{u}\hat{u}_0(X)$, de sorte que $\hat{\rho}_0(X)\hat{u}_0(X) = 1$. On dénote les inconnues renormalisées par

$$\rho = \frac{\tilde{\rho}}{\bar{\rho}}, u = \frac{\tilde{u}}{\bar{u}}, v = \frac{\tilde{v}}{\bar{u}}, p = \frac{\tilde{p}}{\bar{\rho}\bar{u}^2}, \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\bar{\gamma}}.$$

On introduit des paramètres α, β, caractéristiques des **ordres de grandeur** de l'écoulement, donnés par $\alpha\beta = k\epsilon$ et $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{Fr}$, soit

$$\alpha = (\frac{k\epsilon}{Fr})^{\frac{1}{2}}, \beta = (k\epsilon Fr)^{\frac{1}{2}}.$$

Le système équivalent à (1.8) est

$$\begin{cases} \alpha\tilde{\gamma}\rho + \frac{d\hat{\rho}_0}{dX}u + \frac{d}{dX}(\rho\hat{u}_0) = 0 \\ \alpha\tilde{\gamma}u + \frac{d\hat{u}_0}{dX}(\hat{u}_0\rho + \hat{\rho}_0 u) + \frac{du}{dX} + \frac{dp}{dX} + \frac{\alpha}{\beta}\rho = 0 \\ \alpha\tilde{\gamma}v + \frac{dv}{dX} + i\alpha\beta p = 0 \\ \frac{du}{dX} + i\alpha\beta v = 0. \end{cases}$$

On suppose $\alpha \in [0, M]$ et β dans le compact $K = [\frac{1}{M}, M]$ de $\mathbb{R}_+^*$. On suppose $\tilde{\gamma} \leq M$. On calcule la fonction d'Evans du problème $W(\alpha, \beta, \tilde{\gamma})$ pour $(\alpha, \tilde{\gamma}) \in [0, M]^2$, $\beta \in K$. On montre alors qu'il existe $\Phi(\alpha, \beta, \tilde{\gamma})$, analytique dans un voisinage de $(0, 0, 0)$, telle que $W(\alpha, \beta, \tilde{\gamma}) = 0$ soit équivalent à $\Phi(\alpha, \beta, \tilde{\gamma}) = 0$. On a alors le résultat asymptotique suivant en α, β :

Théorème 3 *a) La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une famille de solutions bornées en $+\infty$ et $-\infty$ du système (1.8) est $\exists(\alpha, \tilde{\gamma}) \in [0, M]^2, \beta \in [\frac{1}{M}, M]$ tel que $\Phi(\alpha, \beta, \tilde{\gamma}) = 0$. Cette fonction est analytique en $\alpha, \beta, \tilde{\gamma}$ pour $0 \leq \alpha, \beta, \tilde{\gamma} \leq M$.*

b) Il existe $\alpha_0 < 0$ tel que, pour $0 \leq \alpha < \alpha_0$ et $\beta \in K$, $\tilde{\gamma} \in [0, M]$ cette condition équivaut à $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\alpha, \beta)$ où $\tilde{\gamma}(\alpha, \beta)$ se prolonge analytiquement sur $[0, \alpha_0] \times [0, M]$ et admet le développement de Taylor suivant en α :

$$\tilde{\gamma}(\alpha, \beta) = \sqrt{A} + \alpha\beta L - (1 + \alpha\beta L_1)\beta \lim_{X\to+\infty} \hat{u}_0(X) + O(\alpha^2)$$

où L et L_1 sont donnés par les expressions (on note $r = \lim_{X\to+\infty} \hat{\rho}_0(X)$)

$$L_1 = \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{1}{r(r+1)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-\hat{\rho}_0(s))(\rho_0(s)-r)}{r(r+1)^2} ds \quad L_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1-\hat{\rho}_0(s))(\hat{\rho}_0(s)-r)^2}{\hat{\rho}_0(s)r(r+1)} ds.$$

Remarques

1. Il n'est pas possible de retrouver le taux de croissance des instabilités obtenu dans le cas sans vitesse de convection par une limite sur les paramètres α, β.
2. On note que $Fr = \frac{(\lim_{X\to-\infty} u_0(X))^2}{g}$, ce qui implique que Fr modélise réellement la taille de la vitesse de convection.
3. On note aussi que les expressions précédentes sont valides pour $\beta \to 0$ alors qu'il faut étudier le système dynamique que $\beta > 0$.

3 Preuve des résultats

3.1 Preuve de la proposition 1

La preuve de ce résultat s'appuie sur l'hypothèse (H) et son utilisation pour comparer $\frac{d}{dx}(\rho_0^*(x))$ (que nous notons ici $\rho_\epsilon(x)$) et $(\rho_1 - \rho_2)\delta_0$ lorsque

$\epsilon \to 0$. On utilise alors le

Lemme 1 *Soit T_ϵ la distribution $\frac{d\rho_\epsilon}{dx} - (\rho_1 - \rho_2)\delta_0$. C'est une distribution de H^{-1} et il existe M et ϵ_0 tels que, pour tout $\epsilon \in]0, \epsilon_0]$ on ait*

$$| < T_\epsilon, \phi > | \le \sqrt{\epsilon} M ||\phi'||_2.$$

On note alors, avec $y = kx$, $P_\epsilon u = -\frac{d}{dy}(\rho_\epsilon(x)\frac{du}{dy}) + \rho_\epsilon u$. C'est un opérateur autoadjoint bijectif bicontinu de H^1 dans L^2 et de L^2 dans H^{-1}, dont les normes sont majorées uniformément en ϵ. L'équation (2.9) est alors équivalente à

$$\frac{1}{\lambda_\epsilon} v_\epsilon + P_\epsilon^{-\frac{1}{2}}(T_\epsilon \times P_\epsilon^{-\frac{1}{2}} v_\epsilon) + (\rho_1 - \rho_2)(P_\epsilon^{-\frac{1}{2}} v_\epsilon)(0)(P_\epsilon^{-\frac{1}{2}}\delta_0)(x) = 0$$

où $v_\epsilon = P_\epsilon^{\frac{1}{2}} u_\epsilon \in L^2$, d'où $u_\epsilon \in H^1$ ainsi $u_\epsilon(0)$ est bien défini. D'après le Lemme 1, la distribution T_ϵ définit un opérateur de multiplication $\mathcal{T}_\epsilon$ de H^1 dans H^{-1}, dont la norme tend vers 0 avec ϵ. Comme $P_\epsilon^{-\frac{1}{2}}\delta_0$ est borné uniformément dans L^2 on en déduit que la suite $(P_\epsilon^{-\frac{1}{2}} v_\epsilon)(0)$ est minorée par une constante positive indépendante de ϵ. Montrant que u_ϵ est dans H^1, v_ϵ est dans L^2. On extrait une sous-suite telle que

$$\begin{array}{l} u_\epsilon \rightharpoonup u \text{ dans } H^1 \\ \lambda_\epsilon \to \lambda \\ (P_\epsilon^{-\frac{1}{2}} v_\epsilon)(0) \to A_0 \neq 0 \end{array}$$

Alors u est solution dans $H^1(\mathbb{R})$ de

$$-\frac{d}{dy}(\rho_R \frac{du}{dy}) + \rho_R u + \lambda(\rho_1 - \rho_2) u \delta_0 = 0$$

ainsi $u(y) = A_0 e^{-|y|}$ et $\lambda = \frac{1}{A}$.

La preuve de la convergence de u_ϵ fortement dans L^2 s'appuie sur une majoration L^2 de $(\exp(\phi(y)) u_\epsilon)$ (inégalité d'Agmon) ce qui permet d'obtenir la compacité par l'injection compacte de $H^1 \cap L^2(\mathbb{R}, \exp(2\phi(y))dy)$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Cette preuve est en partie dans [5], complétée par [10].

On voit en particulier que l'estimation de la vitesse de convergence de λ_ϵ vers $\frac{1}{A}$ est *a priori* en $\sqrt{\epsilon}$.

Nous référons à [5] et à [14] pour la preuve du théorème 1. Nous nous concentrons dans la section suivante sur la généralisation de [14] pour la preuve du théorème 2.

3.2 Preuve du théorème 2

On commence par identifier une région où le sens de variation de toute solution est connu en un certain sens, ce qui permet d'identifier la famille de solutions qui tend vers 0 en $+\infty$. Cela conduit, en un point X_ϵ tel que X_ϵ tend vers $+\infty$ si $\epsilon \to 0$, à une relation entre $u'(X_\epsilon)$ et $u(X_\epsilon)$ (relation (3.12) et lemme 2).

On déduit alors de cette relation une relation entre $u'(X_0)$ et $u(X_0)$ en contrôlant la solution sur $[X_0, X_\epsilon]$ (ce qui est rendu délicat par le comportement de X_ϵ si $\epsilon \to 0$). Ceci permet d'écrire la relation de type Sturm-Liouville en X_0 (Lemme 3) utilisant la continuité de u et de sa dérivée.

On combine alors cette relation à avec $s(X_0) = k\epsilon(1-\lambda)[\rho_2 + \epsilon\psi_3(\epsilon, \lambda)]$, relation obtenue par identification de la solution en $-\infty$ (égalité démontrée dans [14]). On en conclut d'une part qu'il existe une unique solution r bornée de l'équation

$$r(1 + \epsilon\psi(\epsilon, 1 + r)) = \epsilon^\mu K(1 + r, \epsilon)$$

et que cette solution vérifie $r = O(\epsilon^\mu)$.

Le calcul précis de la limite provient de l'identification de la solution lorsque $\epsilon \to 0$ avec la solution exacte du problème lorsque $X^\mu \rho_0(X)$ est constant. On a noté dans [4] que, dans ce cas, les solutions sur $[X_0, +\infty[$ s'expriment à l'aide de fonctions de Kummer (calcul aussi effectué dans [9]) et les comportements de ces fonctions spéciales en l'infini donnent le résultat.

Dans toute la suite de la preuve, on note $\varepsilon = k\epsilon$, qui tend vers 0, à k fixé, quand ϵ tend vers 0.

• Identification de la solution qui tend vers 0 en $+\infty$ (solution sous-dominante). Il existe $\beta > 0$ telle que $\frac{Xg'(X)}{g(X)} \geq -\beta$ pour $X \geq X_0$. Soit $X_\varepsilon = \frac{(\mu+\beta)\lambda}{\varepsilon}$. On définit la solution u_* de (2.9) telle que $u_*(X_\epsilon) = 1$, $u'_*(X_\epsilon) = 0$. Elle est positive sur $[X_\epsilon, +\infty[$ et toute solution de (2.9) sur $[X_\epsilon, +\infty[$ s'écrit

$$u(X) = Au_*(X)[1 - B\int_{X_\varepsilon}^{X} \frac{s^\mu ds}{g(s)(u_*(s))^2}].$$

La famille de solutions qui tend vers 0 en $+\infty$ s'obtient pour

$$B = (\int_{X_\varepsilon}^{+\infty} \frac{s^\mu ds}{g(s)(u_*(s))^2})^{-1}.$$

La condition aux limites induite est alors, pour cette famille

$$\rho_0(X_\varepsilon)\frac{dU}{dX}(X_\varepsilon) = -Bu(X_\varepsilon). \tag{3.12}$$

• Evaluation de B grâce à une équation de type Volterra.
Soit $v_*(X) = \frac{du_*}{dX}(X) - \varepsilon\lambda u_*(X)$. On introduit

$$\varepsilon S(X) = \varepsilon\lambda(\frac{X}{X_\varepsilon})^\mu \frac{g(X_\varepsilon)}{g(X)} + X^\mu g^{-1}(X)\varepsilon^2(\lambda^2-1)\int_{X_\varepsilon}^X s^{-\mu}g(s)e^{\varepsilon\lambda(s-X_\varepsilon)}ds$$

et l'opérateur

$$Kf(X) = X^\mu g^{-1}(X)\int_{X_\varepsilon}^X s^{-\mu}g(s)[\lambda f(s) + \varepsilon(\lambda^2-1)e^{\varepsilon\lambda s}\int_{X_\varepsilon}^s f(t)e^{-\varepsilon\lambda t}dt]ds.$$

On vérifie que v_* est solution de

$$v_* + \varepsilon K v_* = -\varepsilon S$$

dont on déduit la solution formelle

$$v_* = -\varepsilon\sum_{p=0}^\infty (-1)^p\varepsilon^p K^p(S).$$

On démontre qu'il existe une fonction analytique, positive, croissante $C(Z,\lambda)$ telle que

$$S(X) \le C(\varepsilon X,\lambda)[(\varepsilon X)^\mu + \varepsilon X].$$

L'application de la série de Neumann aux fonctions $X \to (\varepsilon X)^\mu$ et $X \to \varepsilon X$ entraine la convergence du développement formel et la majoration

$$\begin{aligned}|v_*(X)| \le \;& \varepsilon C(\varepsilon X,\lambda)[e^{\varepsilon X\phi(\varepsilon X,\lambda)}[1 + D(\varepsilon X,\lambda)[(\varepsilon X)^{[\mu]+1} + (\varepsilon X)^\mu]] \\ & +(\varepsilon X)^\mu + D(\varepsilon X,\lambda)[\varepsilon X + (\varepsilon X)^\mu]] \\ & = \varepsilon V_*(\varepsilon X,\lambda).\end{aligned}$$

On en déduit alors

$$1 \le |u_*(X)| \le e^{\varepsilon\lambda X - \lambda^2(\mu+\beta)}(1 + \varepsilon X V_*(\varepsilon X)).$$

Si on introduit la constante

$$\frac{1}{C_0(\lambda)} = \int_{(\mu+\beta)\lambda}^{+\infty}\frac{Y^\mu e^{-2(Y-(\mu+\beta)\lambda)\lambda}}{(1+YV(Y,\lambda))^2}dY,$$

de l'égalité $B = \varepsilon^{\mu+1}[\int_{(\mu+\beta)\lambda}^{+\infty}\frac{Y^\mu dY}{g(Y/\varepsilon)(u_*(Y/\varepsilon))^2}]^{-1}$, on déduit le

Lemme 2 *Pour tout $\lambda \geq 1$, il existe une constante $C_0(\lambda)$ telle que, pour tout $\epsilon < \epsilon_0$ on ait $B \leq \varepsilon^{\mu+1}C_0(\lambda)$.*

• Contrôle de la solution sur $[X_0, X_\varepsilon]$

On introduit $s(X) = \rho_0(X)(\frac{du}{dX} - \varepsilon\lambda u(X))$. Il faut alors évaluer $s(X_0)$ en fonction de la condition (3.12) en $X = X_\varepsilon$, qui s'écrit

$$s(X_\varepsilon) = -(B + \varepsilon\lambda\rho_0(X_\varepsilon))u(X_\varepsilon).$$

Soit $T_1(X) = e^{\varepsilon\lambda(X-X_0)}$ et $T_2(X) = \frac{e^{\varepsilon\lambda(X_0-X)}}{\rho_0(X)}$. On vérifie que l'on a les deux égalités

$$s(X)e^{\varepsilon\lambda X} = s(X_0)e^{\varepsilon\lambda X_0} + \varepsilon^2(1-\lambda^2)\int_{X_0}^{X} \rho_0(s)e^{\varepsilon\lambda s}u(s)ds \qquad (3.13)$$

$$u(X) + \varepsilon^2(\lambda^2 - 1)K_r u(X) = T(X),$$

l'opérateur K_r étant donné par

$$K_r(f)(X) = e^{\varepsilon\lambda X}\int_{X_0}^{X} \frac{e^{-2\varepsilon\lambda Y}}{\rho_0(Y)}(\int_{X_0}^{Y} \rho_0(s)f(s)ds)dY$$

et $T(X) = u(X_0)T_1(X) + s(X_0)T_2(X)$.

La principale difficulté apparait lorsque $\mu > 1$, car dans ce cas l'opérateur K_r n'est pas majoré pour $X_0 \to 0$. En écrivant la série de Neumann pour u, on obtient

$$u(X) = T(X) + R_\mu(X)$$

où $R_\mu(X) = \sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon^{2p}(-1)^p(\lambda^2-1)^p K_r^p(T)$.

On réécrit (3.13) en $X = X_\varepsilon$. On trouve

$$\begin{aligned} s(X_\varepsilon)e^{\varepsilon\lambda X_\varepsilon} &= s(X_0)e^{\varepsilon\lambda X_0} + \varepsilon^2(1-\lambda^2)\textstyle\int_{X_0}^{X_\varepsilon} \rho_0(s)e^{\varepsilon\lambda s}R_\mu(s)ds \\ &\quad + \varepsilon^2(1-\lambda^2)u(X_0)\textstyle\int_{X_0}^{X_\varepsilon} \rho_0(s)e^{2\varepsilon\lambda s - \varepsilon\lambda X_0}ds \\ &\quad + \varepsilon^2(1-\lambda^2)s(X_0)e^{\varepsilon\lambda X_0}(X_\varepsilon - X_0). \end{aligned}$$

En utilisant (3.12), on trouve finalement

$$\begin{gathered} s(X_0)e^{\varepsilon\lambda X_0}[1 + \tfrac{B+\varepsilon\lambda\rho_0(X_\varepsilon)}{\rho_0(X_\varepsilon)} + \varepsilon^2(1-\lambda^2)(X_\varepsilon - X_0)] \\ + u(X_0)[(B + \varepsilon\lambda\rho_0(X_\varepsilon))e^{2\varepsilon\lambda X_\varepsilon - \varepsilon\lambda X_0} + \varepsilon^2(1-\lambda^2)e^{-\varepsilon\lambda X_0}\textstyle\int_{X_0}^{X_\varepsilon} \rho_0(s)e^{2\varepsilon\lambda s}] \\ = \varepsilon^2(\lambda^2-1)\textstyle\int_{X_0}^{X_\varepsilon} \rho_0(s)e^{\varepsilon\lambda s}R_\mu(s)ds - (B + \varepsilon\lambda\rho_0(X_\varepsilon))R_\mu(X_\varepsilon)e^{\varepsilon\lambda X_\varepsilon}. \end{gathered} \qquad (3.14)$$

Les majorations de R_μ sont fastidieuses mais faciles à obtenir avec les majorations de l'opérateur K_r, il suffit d'appliquer la relation $K_r(1)(X) \leq C\int_{X_0}^{X} Y^\mu[Y^{1-\mu}-X_0^{1-\mu}]\frac{1}{1-\mu}dY$ et de discuter le résultat en fonction du signe de $1-\mu$. Toutes majorations faites, on obtient le lemme :

Lemme 3 *Il existe une fonction $K(\lambda,\varepsilon)$, continue sur $\lambda \in [1,M]\times]0,\varepsilon_0]$, telle que*

$$s(X_0)e^{\varepsilon\lambda X_0} = -u(X_0)\varepsilon^{\mu+1}K(\lambda,\varepsilon).$$

et $K(\lambda,0) = \lambda\lim_{X\to+\infty} g + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{B}{\varepsilon\rho_0(X_\varepsilon)}$.

La solution sur $]-\infty,X_0]$ est identifiée grâce à l'hypothèse au voisinage de $-\infty$, et on obtient $s(X_0)e^{\varepsilon\lambda X_0} = \varepsilon(1-\lambda)(1+\varepsilon\psi(\varepsilon,\lambda))u(X_0)$. On en déduit l'existence de r, tendant vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$, tel que $\lambda = 1+r$ est solution de (3.14) lorsque $s(X_0)e^{\varepsilon\lambda X_0}$ est remplacé par $\varepsilon(1-\lambda)(1+\varepsilon\psi(\varepsilon,\lambda))u(X_0)$. On en déduit alors pour cette solution unique l'inégalité du théorème 2. Notons que l'existence de r et la construction de u sur $[X_\varepsilon,+\infty[$ montrent l'existence d'un couple $(\lambda_\epsilon,u_\epsilon) \in [1,M]\times L^2(\mathbb{R})$, $u_\epsilon \neq 0$, solution de l'équation de Rayleigh. La proposition 2 est démontrée.

4 Preuve du théorème 3

Dans cette preuve, nous abandonnons la notation $\tilde{\gamma}$ pour alléger l'écriture. Nous rappelons que le système étudié (1.8) est

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dX} + \rho_0(X)[\frac{du_0}{dX} + \alpha\gamma]\rho + \rho_0\frac{d\rho_0}{dX}u = 0 \\ \frac{du}{dX} + i\alpha\beta v = 0 \\ \frac{dv}{dX} + \alpha\gamma\rho_0(X)v + i\alpha\beta p = 0 \\ \frac{dp}{dX} + (u_0\frac{du_0}{dX} - \frac{\alpha}{\beta})\rho + \rho_0(\frac{du_0}{dX} + \alpha\gamma)u - i\alpha\beta v = 0 \end{cases}$$

On introduit la matrice

$$A(y,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma y & -\gamma y^2 & \beta y & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ \frac{\beta}{y} & 0 & \gamma y & -\beta \\ \gamma - \frac{y}{\beta} & \frac{y^2}{\beta} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et les inconnues

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{\rho_0} + \rho_0 u \\ u \\ iv \\ p + \frac{\rho}{\rho_0^2} + u \end{pmatrix}.$$

Le système (1.8) équivaut à

$$\frac{dU}{dX} + \alpha A(\rho_0(X), \beta, \gamma)U = 0. \tag{4.15}$$

C'est un système dynamique. Nous souhaitons identifier les familles de solutions qui tendent vers 0 en $+\infty$ et celles qui tendent vers 0 en $-\infty$. Pour cela, nous étudions les valeurs propres de la matrice $A(y, \beta, \gamma)$. Comme cette matrice a une limite lorsque $y \to \rho_1$ et lorsque $y \to \rho_2$, et comme nous supposons que (H1) est vérifiée, l'hypothèse (h2) de Gardner and Zumbrun [6] est satisfaite.

D'autre part, les valeurs propres de la matrice $A(y, \beta, \gamma)$ sont

- $-\beta$ associée au vecteur propre $(y, 1, 1, \frac{\gamma y}{\beta})$
- β associée au vecteur propre $(y, 1, -1, -\frac{\gamma y}{\beta})$,
- γy, valeur propre double associée à un espace propre de dimension 1 de vecteur propre $(y, 1, \frac{\gamma y}{\beta}, 1)$.

On note que les espaces propres correspondants peuvent être engendrés par

$$(\beta y, \beta, \beta, \gamma y), (\beta y, \beta, -\beta, -\gamma y), (\beta y, \beta, \gamma y, \beta),$$

Nous ne sommes donc pas dans le cadre de l'hypothèse (h1) de Gardner et Zumbrun, les matrices limites ne sont pas hyperboliques. Nous devons donc modifier l'argument et utiliser la forme particulière de $A(\rho_0(X), \beta, \gamma)$. Nous remarquons aussi que nous ne pouvons pas avoir $\beta \to 0$, car dans ce cas $\pm\beta$ ne sont plus séparées, et il n'y a plus de séparation entre les valeurs propres positives et les valeurs propres négatives. Les vecteurs propres associés ne sont d'ailleurs plus indépendants si $\beta = 0$. Nous avons

Proposition 4 *On note $\lambda_j(y, \beta, \gamma)$ les valeurs propres de la matrice $A(y, \beta, \gamma)$, λ_j étant de multiplicité n_j constante. Ces valeurs propres sont analytiques en y (conséquence de la multiplicité constante). On suppose qu'il existe deux constantes $\delta_1 > 0$ et $\alpha_0 > 0$ telles que pour $i \neq j$ et $\alpha < \alpha_0$ on ait $|\lambda_i(y, \beta, \gamma) - \lambda_j(y, \beta, \gamma)| \geq \delta_1$ pour $y \in [\rho_1, \rho_2]$. On suppose aussi qu'aucune valeur propre ne se rapproche de 0.*

Toute solution U de (4.15) se met sous la forme

$$U = \sum_j U_j(X)$$

où U_j appartient à un espace vectoriel de dimension n_j, et il existe un vecteur $E_j(X, \alpha, \beta, \gamma)$, élément d'un espace vectoriel de dimension n_j construit à partir de l'espace $\mathrm{Ker}(A - \lambda_j I)^{n_j}$ *tel que $|E_j(X, \alpha, \beta, \gamma)| \le D_0 |X|^{n_j - 1}$, analytique pour $\beta \in [\frac{1}{M}, M], \gamma \in [0, M]$ et pour $\alpha < \alpha_0$ et tel que*

$$|U_j(X) e^{\alpha \int_0^X \lambda_j(\rho_0(s), \beta, \gamma) ds} - E_j(X, \alpha, \beta, \gamma)| \le D_0' |X|^{5(n_d - 1)} |\rho_0'(X)|. \quad (4.16)$$

De cette proposition on déduit le Théorème 3. En effet, les solutions qui tendent vers 0 en $+\infty$ (respectivement qui tendent vers 0 en $-\infty$) correspondent aux solutions associées aux valeurs propres positives (resp. négatives). On s'appuie alors sur le lemme suivant qui permet de calculer ces solutions pour α petit. Pour cela nous introduisons quelques notations. On fixe une valeur propre de A, $\lambda_i(y, \beta, \gamma)$. Soit $P(y, \beta, \gamma)$ une matrice de passage telle que $PAP^{-1} = D(y, \beta, \gamma)$ soit trigonale et soit π_i la projection sur l'espace propre $\mathrm{Ker}(D - \lambda_i I)^{n_i}$ parallèlement à $\oplus_{j \neq i} \mathrm{Ker}(D - \lambda_j I)^{n_j}$. On introduit $\tilde{D}_i = (I - \pi_i) D (I - \pi_i) + \pi_i \lambda_i I \pi_i$ et $\tilde{R}_{i,\infty}$ la solution de $\frac{d\tilde{R}_{i,\infty}}{dX} = \alpha(\tilde{D}_i - D_i)(\rho_1, \beta, \gamma)$. C'est un polynôme en αX de degré $n_i - 1$.

Lemme 4 *On suppose $\lambda, \gamma \le M$ et $\beta \in [\frac{1}{M}, M]$.*

Soit U_i une solution associée à la valeur propre λ_i (au sens de la proposition 4).

Il existe $U_{i,\infty}$ vérifiant $\pi_i U_{i,\infty} = U_{i,\infty}$ tel que

$$U_i(X, \alpha, \beta, \gamma) - P^{-1}(\rho_1, \beta, \gamma) \tilde{R}_{i,\infty}^{-1}(X, \alpha, \beta, \gamma) U_{i,\infty} e^{-\alpha \int_0^X \lambda_j(\rho_0(s), \beta, \gamma) ds} = R_i^{+\infty}(X, \alpha, \beta, \gamma) e^{-\alpha \int_0^X \lambda_j(\rho_0(s), \beta, \gamma) ds}$$

où il existe δ_0 et α_0 tels qu'il existe C et N tels que, pour $\rho_0(X) - \rho_1 \le \delta_0$, $\alpha < \alpha_0$, on ait

$$|R_i^{+\infty}(X, \beta, \gamma)| \le C \alpha |\rho_0(X) - \rho_1| X^N.$$

Nous ne donnons pas ici la démonstration du lemme. Les solutions de (4.15) obtenues par la procédure du i) ont donc pour limite lorsque $y \to \rho_1$ (resp. lorsque $y \to \rho_2$) un élément de l'espace $\mathrm{Ker}(A(\rho_1, \beta, \gamma) - \lambda_j(\rho_1, \beta, \gamma))^{n_j}$ (resp. de l'espace $\mathrm{Ker}(A(\rho_2, \beta, \gamma) - \lambda_j(\rho_2, \beta, \gamma))^{n_j}$) multiplié par $e^{-\alpha \int_0^X \lambda_i(\rho_1, \beta, \gamma)}$ (resp. multiplié par $e^{-\alpha \int_0^X \lambda_i(\rho_2, \beta, \gamma)}$).

On peut donc considèrer le système à coefficients constants sur $[A, +\infty[$ (resp. sur $]-\infty, -A]$) comme une perturbation en $\alpha(y-\rho_1)$ du système (4.15). Le raisonnement et les calculs de [4] s'étendent à ce cas, et que les résultats se généralisent immédiatement en remplaçant l'intégrale sur $[-A, A]$ des quantités obtenues dans le Théorème 4.1 et la relation (79) de [4] par l'intégrale sur $\mathbb{R}$. La fonction d'Evans (que nous ne calculons pas ici) $W(\alpha, \beta, \gamma)$ du problème est donnée par

$$W(\alpha, \beta, \gamma) = \det\,(T_{l_1}(X_0), S_{l_2}(X_0))$$

où $(T_{l_1})_{l_1}$ engendre l'espace vectoriel des solutions qui tendent ves 0 en $-\infty$ (respectivement $(S_{l_2})_{l_2}$ engendre l'espace vectoriel des solutions qui tendent ves 0 en $+\infty$). Les valeurs de γ qui conduisent à une solution non triviale bornée en $\pm\infty$ du système dynamique (4.15) sont les solutions de $W(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, qui équivaut pour $(\alpha, \gamma) \in [0, M]^2$ et $\beta \in [\frac{1}{M}, M]$, à $\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

Idée de la preuve de la proposition 4 Soit

$$D(y) = \begin{pmatrix} -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma y & d(y, \beta, \gamma) \\ 0 & 0 & 0 & \gamma y \end{pmatrix}$$

où la limite de $d(y, \beta, \gamma)$ est non nulle si $y \to \rho_1$ ou $y \to \rho_2$. Soit $P(y, \beta, \gamma)$ une matrice telle que

$$A(y, \beta, \gamma) = P^{-1} D P \tag{4.17}$$

Soit $Q = \frac{dP}{dy} P^{-1}$. L'équation satisfaite par $V = PU$ est

$$\frac{dV}{dX} + \alpha D V = \rho_0'(X) Q V.$$

Le cas de la valeur propre γy est le plus compliqué, car c'est une valeur propre double dégénérée. On introduit

$$W_d(X, \alpha, \beta, \gamma) = V(x, \alpha, \beta, \gamma) e^{\alpha\gamma \int_0^X \rho_0(s) ds}$$

qui vérifie

$$\frac{dW_d}{dX} + \alpha(D - \gamma y) W_d = \rho_0'(X) Q W_d.$$

Soit π la projection sur le sous espace Ker $(D - \gamma y I)^{n_d}$ parallèlement à $\oplus_{\lambda_j \neq \gamma y}$Ker $(D - \lambda_j I)^{n_j}$. On remarque que, après diagonalisation, π ne dépend pas de y. On note $\tilde{D} = (I-\pi)D(I-\pi) + \gamma y \pi I \pi$ et on introduit la matrice R solution de

$$\frac{dR}{dX} = \alpha R(\tilde{D} - D), R(0) = Id$$

Cette matrice est inversible et est un polynôme en α de degré au plus $n_d - 1$ car $\tilde{D} - D$ est nilpotente d'ordre n_d, et on note $U_d = RW_d$. Alors

$$\frac{d}{dX}(RW_d) = \rho_0'(X)RQR^{-1}(RW_d) - \alpha(\tilde{D} - \gamma y I)(RW_d). \tag{4.18}$$

On remarque qu'il existe une constante C telle que $|R|_\infty \leq C|X|^{n_d-1}$ et on en déduit que RQR^{-1} est majoré par un polynôme de degré $2(n_d - 1)$ en X. C'est de cette estimation que nous allons nous servir pour écrire le théorème de point fixe pour l'équation de type Volterra, puisque le produit de X^p par $e^{-\theta|X|}$ tend vers 0 en $|X| \to +\infty$ pour tout p.

On suppose que U_d est bornée et $\frac{dU_d}{dy}$ est majorée par un polynôme en X lorsque $y \to \rho_1$ et lorsque $y \to \rho_2$. Alors, intégrant (4.18) entre y et z, on voit que $U_d(X(y))$ admet une limite en $y \to \rho_1$, notée U_∞, telle que $\pi U_\infty = U_\infty$ et est donc élément d'un espace vectoriel de dimension n_d. On trouve donc les deux égalités

$$\begin{aligned} U_\infty - \pi U_d(X(y)) - \pi \textstyle\int_y^{\rho_1} RQR^{-1}(X(s))\pi U_d(X(s))ds \\ = \pi \textstyle\int_y^{\rho_1} RQR^{-1}(X(s))(I-\pi)U_d(X(s))ds \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} (I-\pi)U_d(X(y)) + (I-\pi)\textstyle\int_y^{\rho_1} RQR^{-1}(X(s))(I-\pi)U_d(X(s))ds \\ -\alpha \textstyle\int_y^{\rho_1}(\tilde{D} - \gamma s I)\frac{(I-\pi)U_d(X(s))}{\rho_0'(X(s))}ds \\ = -(I-\pi)\textstyle\int_y^{\rho_1} RQR^{-1}(X(s))\pi U_d(X(s))ds. \end{aligned} \tag{4.20}$$

De l'égalité (4.19), on en déduit l'expression de $\pi U_d(X(y)) = E(U_\infty)(y) + B[(I-\pi)U_d](y)$, les opérateurs E et B étant explicites par série de Neumann de type Volterra. On remplace l'égalité ainsi obtenue dans (4.20), ce qui conduit, pour $P_r(X(y)) = \frac{(I-\pi)U_d(X(y))}{\rho_0'(X(y))}$ à une équation de la forme

$$P_r + T_r^1 P_r + \alpha T_r^2 P_r = -(I-\pi)\int_y^{\rho_1} RQR^{-1}(X(s))E(U_\infty)(X(s))ds.$$

L'opérateur T_r^1 est contractant, l'opérateur αT_r^2 est contractant pour $\alpha < \alpha_0$, ainsi on en déduit l'existence de P_r et sa majoration par $-\rho_0'(X)X^N$, d'où on tire πU_d par l'égalité (4.19). Revenant à l'égalité (4.19), on en conclut que, pour $\alpha < \alpha_0$ et $|y - \rho_1| \leq \delta_0$

$$|\pi U_d(X(y)) - E(U_\infty)(y)| \leq D' \rho_0'(X(y))(X(y))^{4(n_d-1)}.$$

Les solutions associées de ce type, qui forment un espace vectoriel de dimension $n_d = 2$, vérifient alors[3]

$$|U(X)e^{\alpha\gamma \int_0^X \rho_0(s)ds} - P^{-1}R^{-1}E(U_\infty)(X(y))| \leq D'' \rho_0'(X)X^{5(n_d-1)}.$$

On reproduit le même raisonnement pour toutes les valeurs propres de la matrice $A(y, \beta, \gamma)$. On peut donc construire une solution explicite au système (4.15) pour chacune des valeurs propres de A, ce qui permet de décomposer toute solution. La proposition 4 est démontrée.

Références

[1] S. Benzoni-Gavage, D. Serre, K. Zumbrun *Alternate Evans functions and visous shock waves* à paraitre

[2] R. Betti, V. Goncharov *Multiple cut-off wave numbers of the ablative Rayleigh-Taylor instability* Phys. Rev. E 50 (5) 3968-3972, 1994.

[3] S. Chandrasekhar *Hydrodynamic and hydromagnetic stability* Oxford University Press, Oxford, 1961

[4] C. Cherfils, O. Lafitte *Analytic solutions of the Rayleigh equation for linear density profiles* Phys. Rev E 62 2967-2970, 2000.

[5] C. Cherfils-Clerouin, O. Lafitte, P.A. Raviart *Asymptotic results for the linear stage of the Rayleigh-Taylor instability* à paraitre dans Mathematical Fluid Mechanics, Birkhauser, 2001.

[6] K.A. Gardner, K. Zumbrun *The gap lemma and geometric criteria for instability of viscous shock profiles* Comm. Pure Appl. Math., 51 (7) : 797-855.

[7] V. Goncharov, R. Betti et al, *Self consistent stability analysis of ablation fronts with large Froude numbers* Phys. Plasmas 3 (4), 1401-1414, 1996

[3] Il n'existe pas de $\tilde{\alpha}_0 > 0$ tel que les solutions non triviales de la forme $e^{\alpha\beta X}$ vérifient l'inégalité pour $\alpha < \tilde{\alpha}_0$. Nous avons donc séparé toutes les solutions du système, au voisinage de $X \to +\infty$ comme de $X \to -\infty$.

[8] V. Goncharov, R. Betti et al *Self consistent stability analysis of ablation fronts with small Froude numbers* Phys. Plasmas 3 (12), 4665-4676, 1996

[9] V. Goncharov *Self consistent stability analysis of ablation fronts in Inertial Confinement Fusion* PhD Thesis, Univ. of Rochester, N.Y., 1998

[10] B. Helffer, O. Lafitte *On spectral questions around the Rayleigh equation* en préparation

[11] B. Helffer, J. Sjostrand *Multiple wells in the semiclassical limit I* Comm. in P. D. E. 9 (4) (1984) 337-408.

[12] R.E. Kidder *Laser driven compression of hollow shells : power requirements and stability limitations* Nuclear Fusion 16 (1) 3-14, 1976

[13] H.J. Kull *Theory of the Rayleigh-Taylor instability* Physics Reports (Rev. Sec. of Phys. Letters) 206 (5) 197-325, North-Holland, 1991

[14] O. Lafitte *Analysis of the discrete spectrum of the Rayleigh equation : application to the linear Rayleigh-Taylor instability* Preprint du CMAT 2000-24 (Ecole Polytechnique, Palaiseau 2000).

[15] K. O. Mikaelian *Lasnex simulations of the classical and laser-driven Rayleigh-Taylor instability* Phys. Rev. A, 42 (8) 4944-4951, 1990

[16] K. O. Mikaelian *Connection between the Rayleigh and the Schrödinger equations* Phys. Rev. E, 53 (4) 1996.

[17] A.R. Piriz, J. Sanz, L.F. Ibanez *Rayleigh-Taylor instability of steady ablation fronts : the discontinuity model revisited* Phys. Plasmas 4 1117 (1997)

[18] Lord J.W.S. Rayleigh *Investigation of the Character of the Equilibrium of an Incompressible Heavy Fluid of Variable Density* Proc. London Math. Soc. 14, 170-177, 1883

[19] L. Spitzer, jr, R. Haerm *Transport phenomena in a completely ionized gas* Phys. Rev II Ser. 89, 977-981 (1953)

[20] H. Takabe, K. Mima, L. Montierth, R. L. Morse *Self-consistent growth rate of the Rayleigh-Taylor instability in an ablatively accelerating plasma* Phys. Fluids 28 (2) 3676-3682, 1985.

[21] G. Taylor *The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes* Proc. Roy. Soc. London Ser. A 201 (1950) 192-196.