SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2000-2001

Pascal Auscher

Extrapolation pour les mesures de Carleson et conjecture de Kato

Séminaire É. D. P. (2000-2001), Exposé n° I, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2000-2001____A1_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Extrapolation pour les mesures de Carleson et conjecture de Kato

Pascal AUSCHER
Université de Picardie
LAMFA, CNRS-FRE 2270

A la mémoire de Tosio Kato

Introduction

Les résultats décrits dans cet exposé concernent des progrès substantiels récents sur la conjecture de Kato pour les opérateurs elliptiques.

Le premier (dans l'ordre chronologique), démontré par S. Hofmann et A. McIntosh, et qui ne sera pas discuté ici, apporte une réponse positive en dimension 2.

Le deuxième, qui est l'objet de cet exposé et obtenu en collaboration avec S. Hofmann, J. Lewis et P. Tchamitchian, fournit une réponse positive partielle en dimensions $n \geq 3$ dans le cas des perturbations des opérateurs autoadjoints. Plus généralement, c'est l'analyticité de l'application racine carrée sur son domaine de définition qui est démontrée.

Après avoir énoncé les résultats, nous présenterons une application, puis nous mentionnerons quelques généralisations. Nous reviendrons ensuite à la preuve du résultat de perturbation en décrivant d'abord des formulations équivalentes de la conjecture de Kato, puis un théorème $T(b)$ pour les racines carrées qui implique la conjecture. La vérification des hypothèses du théorème $T(b)$ se fera grâce à un lemme d'extrapolation pour les mesures de Carleson et des techniques d'analyse harmonique réelle (inégalité de Carleson, fonctions maximales, fonctionnelles quadratiques). Nous donnerons les idées essentielles sans rentrer dans les détails ; le lecteur se reportera à [AHLT].

1 Énoncé des résultats

Considérons la famille $\mathcal{A}$ de matrices elliptiques suivantes : $x \mapsto A(x) = (a_{jk}(x))_{1\leq j,k\leq n}$ appartient à $\mathcal{A}$ si

(i) $a_{jk} \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ et il existe $\Lambda > 0$ tel que $\sup\limits_{j,k} \|a_{j,k}\|_\infty \leq \Lambda$

(ii) il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{C}^n$,

$$\mathrm{Re}\ \Sigma a_{jk}(x)\xi_k\bar{\xi}_j \geq \lambda|\xi|^2 \ p.p.$$

A l'aide d'une matrice A dans $\mathcal{A}$, on construit par la méthode dite des formes sesquilinéaires un opérateur maximal-accrétif $L = -\mathrm{div}A\nabla$ dont le domaine est l'espace des $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ telles que $\mathrm{div}(A\nabla f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

En suivant T. Kato, on construit $\sqrt{L}$, qui est l'unique opérateur maximal-accrétif tel que $(\sqrt{L})^2 = L$. Le problème de la racine carrée est de déterminer le domaine de $\sqrt{L}$. La conjecture est la suivante :

"Le domaine de $\sqrt{L}$ est l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^n)$ et l'on a

$$\|\sqrt{L}f\|_2 \sim \|\nabla f\|_2 \ . " \tag{1}$$

Ici, $A \sim B$ signifie que A/B est entre deux constantes positives et $\| \ \|_p$ désigne la norme usuelle de $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Cette conjecture fut en fait suggérée par T. Kato et explicitement formulée par A. McIntosh. On verra plus loin une application aux équations hyperboliques.

Cette conjecture est évidemment vérifiée si L est auto-adjoint. Mais dès que l'on s'écarte des opérateurs auto-adjoints les choses se compliquent.

La solution positive de cette conjecture en dimension 1 a été donnée par R. Coifman, A. McIntosh, Y. Meyer en 1981 ([CMcM]).

Les résultats en dimensions supérieures jusqu'en 1999 se sont limités aux perturbations des matrices constantes. Une synthèse de ces résultats est présentée dans [AT] auquel nous renvoyons le lecteur.

Dans [AT], une nouvelle stratégie d'attaque a été élaborée. Elle sera présentée plus loin. Elle a conduit aux résultats suivants obtenus cette année.

Théorème 1 *(S. Hofmann et A. McIntosh, [HMc]) la conjecture est vraie en dimension deux.*

Théorème 2 *(P. Auscher, S. Hofmann, J. Lewis et P. Tchamitchian) En dimensions $n \geq 3$, la classe des opérateurs L pour lesquels la conjecture est* *vraie est stable par perturbation dans L^∞ des coefficients. En d'autres termes si*

$$c_1\|\nabla f\|_2 \leq \|\sqrt{L}f\|_2 \leq c_2\|\nabla f\|_2$$

alors il existe $\varepsilon > 0$, dépendant de $n, \lambda, \Lambda, c_1, c_2$ et des constantes $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ positives telles que si $\widetilde{A} \in \mathcal{A}$ avec $\|\widetilde{A} - A\|_\infty < \varepsilon$ alors

$$c_2\|\nabla f\|_2 \leq \sqrt{\tilde{L}}f\|_2 \leq \tilde{c}_2\|\nabla f\|_2$$

où $\widetilde{L} = -\mathrm{div}\widetilde{A}\nabla$.

Ce théorème a pour corollaire immédiat le

Théorème 3 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $t \mapsto A_t$ est une application C^k de $[0, T]$ à valeurs dans les matrices uniformément elliptiques symétriques réelles et bornées, alors, avec $L_t = -\mathrm{div}A_t\nabla$, $t \mapsto \sqrt{L_t}$ est C^k à valeurs dans les opérateurs bornés de $H^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

En effet, le théorème 2 montre que l'application

$$\begin{array}{ll} \mathcal{A} & \to \mathcal{B}(H^1(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n)) \\ A & \mapsto \sqrt{-\mathrm{div}A\nabla} \end{array}$$

est analytique (complexe) au voisinage de toute matrice où elle est définie. Il suffit donc de composer avec $t \mapsto A_t$.

2 Une application

Nous suivons A. McIntosh [Mc]. Considérons le problème de Cauchy

$$(*) \qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) & -\mathrm{div}_x A_t(x)\nabla_x u(x,t) = f(x,t) \\ u(x,0) & = v_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = v_1(x) \end{cases}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T], t \mapsto A_t$ vérifiant les hypothèses du Théorème 3 avec $k = 2, f \in C([0, T], H^1(\mathbb{R}^n)), v_0 \in \mathcal{D}(L_0)$ et $v_1 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, où l'on a posé $L_t = -\mathrm{div}A_t\nabla$.

Alors il existe une unique solution de $(*)$ telle que

- $\forall t \geq 0\ u(.,t) \in \mathcal{D}(L_t)$ et $L_t u(.,t) \in C([0, T], L^2(\mathbb{R}^n))$
- $u \in C^2([0, T], L^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, T], H^1(\mathbb{R}^n))$.

Si l'on pose $w(t) = \begin{bmatrix} \frac{du}{dt}(t) \\ \\ \sqrt{L_t}u(t) \end{bmatrix}$ alors $(*)$ est équivalent au problème suivant

$$(**) \qquad \begin{cases} \frac{dw}{dt}(t) + T_t w(t) = F(t) \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

avec $T_t = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{L_t} \\ -\sqrt{L_t} & -(\frac{d}{dt}\sqrt{L_t})\sqrt{L_t}^{-1} \end{bmatrix}$, $F(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}$ et $w_0 = \begin{bmatrix} v_1 \\ \sqrt{L_0}v_0 \end{bmatrix}$.

On a que $F \in C([0,T], H^1(\mathbb{R}^n) \oplus H^1(\mathbb{R}^n)), w_0 \in H^1(\mathbb{R}^n) \oplus H^1(\mathbb{R}^n)$ et si $w \in H^1(\mathbb{R}^n) \oplus H^1(\mathbb{R}^n)$ alors $T_t w \in C^1([0,T], L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n))$. De plus pour λ bien choisi, $T_t + \lambda I$ est, pour chaque $t \in [0,T]$, maximal-accrétif dans $L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$ avec domaine $H^1(\mathbb{R}^n) \oplus H^1(\mathbb{R}^n)$ (Théorème 3) *qui ne dépend pas de t*. Les résultats classiques sur les équations d'évolution fournissent alors l'existence d'une unique solution $w \in C^1([0,T], L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)) \cap C([0,T], H^1(\mathbb{R}^n) \oplus H^1(\mathbb{R}^n)$ à $(**)$.

3 Résultats plus généraux

Le problème de la racine carrée se pose aussi pour les opérateurs elliptiques d'ordre supérieur (ou même les sytèmes) du type

$$L = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \partial^\alpha \left(a_{\alpha\beta}\partial^\beta\right)$$

où $m \in \mathbb{N}^*$, $a_{\alpha\beta} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $\|a_{\alpha\beta}\|_\infty \leq \Lambda$ et

$$(2) \qquad \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^n} \sum a_{\alpha\beta}\partial^\beta f \partial^\alpha \bar{f} \geq \lambda \|(-\Delta)^{m/2} f\|_2^2$$

avec $0 < \lambda \leq \Lambda < +\infty$. On définit $\sqrt{L}$ et la conjecture est que

$$\mathcal{D}(\sqrt{L}) = H^m(\mathbb{R}^n) \text{ avec } \|\sqrt{L}f\|_2 = \|(-\Delta)^{m/2}f\|_2 = \|f\|^2_{\dot{H}^m(\mathbb{R}^n)}$$

Théorème 4 *Si $n \geq 2$ et $m \in \mathbb{N}^*$ alors $(a_{\alpha\beta}) \mapsto \sqrt{L}$ est analytique au voisinage des matrices de coefficients où elle est définie, à valeurs dans $\mathcal{B}(H^m(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$.*

Ce théorème n'est pas juste une généralisation du Théorème 2 ; il est utile même dans la démonstration du Théorème 2, via le résultat suivant de [AMcN]. Si $k \in \mathbb{N}^*$ et L est comme ci-dessus alors la conjecture pour L est équivalente à la conjecture pour $(-\Delta)^k L(-\Delta)^k$.

Augmenter l'ordre de l'opérateur permet de disposer de meilleures informations sur le noyau du semi-groupe associé, grâce notamment aux inclusions de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ si $m > \frac{n}{2}$.

Une autre généralisation consiste à remplacer dans le membre de droite de (2) par $\lambda\|(-\Delta)^{m/2} f\|_2^2 - C\|f\|_2^2$. Dans ce cas, la conjecture se pose pour l'opérateur inhomogène $L + CI$ et devient

$$\mathcal{D}(\sqrt{L+CI}) = H^m(\mathbb{R}^n) \text{ avec } \|\sqrt{L+CI} f\|_2 \sim \|f\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)} \ .$$

Les résultats sont les mêmes.

En général, une perturbation de L par des termes d'ordre inférieur ne modifie pas le domaine de la racine carrée ([AT], Préliminaires, Section 7).

Signalons pour finir des résultats sur des ouverts lipschitziens (au lieu de $\mathbb{R}^n$) avec condition de Dirichlet ou de Neumann pour les opérateurs du second ordre [AT1]. Les théorèmes sur $\mathbb{R}^n$ se transfèrent à ce nouveau cadre.

4 Les versions équivalentes de la conjecture de Kato

Les résultats de cette section sont issus de [AT]. On suppose pour toute la suite que L est du *second ordre* : $L = -\mathrm{div} A\nabla$ avec les conditions requises en 1.

Un résultat abstrait de J.L. Lions affirme que (1) est vrai si et seulement s'il existe $C_0 > 0$ telle que

$$(K) \qquad \|\sqrt{L} f\|_2 \leq C_0 \|\nabla f\|_2$$

$$(K^*) \qquad \|\sqrt{L^*} f\|_2 \leq C_0 \|\nabla f\|_2$$

où $L^* = -\mathrm{div} A^*\nabla$ est l'adjoint de L. On scinde le problème en deux et l'on cherche à démontrer (K), la preuve de (K^*) devant être similaire puisque cela revient à changer A en son adjointe A^*. On démontre ces inégalités pour f dans un sous-espace dense de $H^1(\mathbb{R}^n)$. L'espace adapté est le domaine de L. Nous omettrons de rentrer dans de tels détails.

Ensuite, la théorie des fonctionnelles quadratiques de A. McIntosh et A. Yagi nous apprend, puisque L est maximal-accrétif, que

$$(K) \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \|e^{-t^2 L} t L f\|_2^2 \frac{dt}{t} \leq C_1 \|\nabla f\|_2^2$$

où $(e^{-tL})_{t>0}$ est le semi-groupe engendré par $-L$. Puis, l'ellipticité induit une décomposition de Hodge de $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ et

$$(K) \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \|\theta_t F\|_2^2 \frac{dt}{t} \leq C_2 \|F\|_2^2$$

où $F \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^n)$ et $\theta_t = e^{-t^2L} t \,\mathrm{div} A$.

Sans plus d'informations sur L, on ne peut continuer l'analyse. On fait l'hypothèse suivante : le noyau-distribution de e^{-tL}, noté $K_t(x,y)$, vérifie la majoration gaussienne ponctuelle

$$(G) \qquad |K_t(x,y)| \leq Ct^{-n/2} \exp(-\frac{c|x-y|^2}{t})$$

pour $t > 0, x, y \in \mathbb{R}^n$. Cette hypothèse est vérifiée si A est *réelle* d'après le théorème d'Aronson et j'ai montré dans [A] que cette majoration reste stable sous une perturbation *complexe* de A dans L^∞. Dans le cadre du théorème 3, cette hypothèse est donc satisfaite. (Pour les opérateurs d'ordre m, la gaussienne devient $Ct^{-n/2m} \exp(-\frac{c|x-y|^{2m/2m-1}}{t^{1/2m-1}})$.)

Cette hypothèse permet de calculer avec θ_t. Son noyau-distribution est $-tA^T(y)\nabla_y K_{t^2}(x,y)$ et on déduit de (G) par l'étude de l'opérateur parabolique $\frac{\partial}{\partial t} + L$ des estimations à poids :

Proposition 5 *Si (G) est vérifiée alors il existe* $p = p(n,\lambda,\Lambda) > 2, c = c(n,\lambda,\Lambda,(G))$*, et* $C = C(n,\lambda,\Lambda,(G))$ *tq*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |t\nabla_y K_{t^2}(x,y)|^p e^{\frac{c|x-y|^2}{t^2}} dy \leq Ct^{-n(p-1)}.$$

En particulier, le noyau de θ_t est bien localisé. Cela permet d'arriver à la caractérisation de (K) par une mesure de Carleson, ce qui est un théorème $T(1)$ pour les racines carrées :

Proposition 6 *Si* (G) *est vérifiée alors*

$$(K) \Leftrightarrow \sup \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_0^{\ell(Q)} |(\theta_t I)(x)|^2 \frac{dxdt}{t} \leq C_3$$

où la borne supérieure est prise sur tous les cubes Q *avec côtés parallèles aux axes. On a noté* $\ell(Q)$ *la longueur* Q *et* $|Q|$ *sa mesure.*

Noter que I est ici la matrice identité de $\mathbb{C}^n$.

La direction $\Rightarrow$ est facile compte tenu de ce qui précède. En revanche la direction $\Leftarrow$ utilise la théorie des fonctionnelles quadratiques réelles de

Littlewood-Paley-Stein via une extension convenable (et non triviale) des travaux de Coifman-Meyer et de Semmes [S].

L'intérêt d'une telle caractérisation est que la condition portant sur la mesure de Carleson est locale (alors qu'a priori la racine carrée de L n'est pas un opérateur local).

L'inconvénient est que le calcul de $\theta_t I$ est délicat. A l'instar du théorème $T(b)$, on observe que $\theta_t A^{-1} = 0$ mais cette égalité n'a trouvé d'utilisation que dans des cas où A possède une structure particulière.

5 Le théorème $T(b)$ pour les racines carrées

Dans [AT], une condition suffisante pour obtenir (K) a été présentée. Il s'agit de contrôler la mesure $|\theta_t I(x)|^2 \frac{dxdt}{t}$ à l'aire d'une fonctionnelle auxiliaire, qui rappelle dans le cadre des racines carrées une des versions du Théorème $T(b)$ (En particulier, celle de Semmes [S]).

On dit que L vérifie (S) s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $C > 0$ et pour chaque cube Q, une fonction $F_Q^j : 5Q \to \mathbb{C}^n, j = 1, \cdots, N$ (λQ désigne le cube de même centre dilaté d'un facteur $\lambda > 0$) telle que

(i)
$$\int_{5Q} |\nabla F_Q^j|^2 \leq C|Q| \ .$$

(ii)
$$\int_{5Q} |LF_Q^j|^2 \leq C \frac{|Q|}{\ell(Q)^2} \ .$$

(iii) Pour toute fonction $b_t(x) \in L^\infty(\mathbb{R}_+^*, L^\infty(\mathbb{R}^n))$

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_0^{\ell(Q)} |b_t(x)|^2 \frac{dxdt}{t} \leq$$
$$C \left(\sup_{t>0} \|b_t\|_\infty^2 + \sup_{Q,j} \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_0^{\ell(Q)} |b_t(x).P_t \nabla F_Q^j(x)|^2 \frac{dxdt}{t} \right) \ .$$

On a désigné par P_t un opérateur de convolution avec $\frac{1}{t^n} p(\frac{\cdot}{t})$ où $p \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, supp $p \subset B(0,1)$ et $\int p = 1$. Ici P_t agit composante par composante sur la matrice ∇F_Q^j (la transposée de la jacobienne de F_Q^j) et $b_t(x) \in \mathbb{C}^n$.

La condition (i) est une condition de taille naturelle, (ii) nous dit que F_Q^j est bien adapté à L et (iii) est la condition cruciale.

Dans le cas où $b_t(x) = (\theta_t I)(x)$, le membre de droite de (iii) se contrôle grâce à (i), (ii) et aux techniques introduites pour démontrer la proposition 6.

La condition (S) est aussi une condition stable par perturbation de L : il faut noter que $b_t(x)$ dans (iii) est arbitraire.

Proposition 7 $[AT]$

1) Supposons que L vérifie (G)*. Alors* $(S) \Rightarrow (K)$*.*

2) Si L satisfait (S) *alors toute perturbation de L vérifie* (S)*.*

Le point 1) de cet énoncé est précisément le $T(b)$ pour les racines carrées.

Le théorème 1 se démontre en vérifiant (S). La stratégie consiste à, pour un choix convenable de $F_Q^1 (N = 1)$, montrer que la matrice 2×2 $(P_t \nabla F_Q^1)(x)$ est inversible sur un "gros" sous-ensemble de $Q \times]0, \ell(Q)]$ au sens de la mesure $\frac{dxdt}{t}$.

Nous nous concentrons ici sur la stratégie pour démontrer le théorème 2. Celui-ci serait une conséquence de l'implication $(K) \Rightarrow (S)$. Malheureusement, nous ne savons pas la démontrer. En revanche on a le

Théorème 8 *Supposons que L vérifie* (G)*. Alors les conditions* (K) *et* (K^*) *entraînent* (S) *(et donc* (S) *pour* L^**).*

Ce théorème montre que la condition (S) est incontournable pour le problème de la racine carrée. Il montre aussi, en corollaire avec la proposition 7, le théorème 2, au moins lorsque L vérifie la majoration gaussienne.

La preuve de ce théorème repose sur un théorème d'extrapolation pour les mesures de Carleson.

6 Extrapolation pour les mesures de Carleson

Pour des raisons techniques propres à la preuve du théorème 8, on convient de remplacer les fenêtres de Carleson $Q \times]0, \ell(Q)]$ par des "tentes" $\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[/ d(x, {}^cQ) \geq \frac{t}{\sigma}\}$ que l'on note $\mathcal{T}_Q^\sigma$, où $\sigma > 0$ est la pente de la tente au-dessus de Q :

$l(Q)$

Q

Fig.1 : Fenêtre de Carleson

pente σ $\mathcal{T}_Q^\sigma$

Q

Fig.2 : tente au-dessus de Q de pente σ

Une mesure de Carleson est alors une mesure borelienne positive et régulière sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\|\mu\|_c = \sup \frac{\mu(\mathcal{T}_Q^1)}{|Q|} < +\infty$$

où la borne supérieure est prise sur tous les cubes de $\mathbb{R}^n$ (avec côtés parallèles aux axes).

On se donne une autre mesure borélienne positive et régulière sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$, que l'on désigne par $\tilde{\mu}$. On souhaite une condition simple entre μ et $\tilde{\mu}$ permettant d'en déduire que $\tilde{\mu}$ est aussi une mesure de Carleson.

Pour cela il convient de décomposer les tentes en utilisant la géométrie de μ. On pose $A = \|\mu\|_C$. Pour $\sigma \in]0,1[$ et Q un cube on a $\mu(\mathcal{T}_Q^\sigma) \leq A|Q|$.

On se donne un seuil $b \in]0,1[$. Alors on peut trouver une famille disjointe de sous-cubes dyadiques $Q_i, i \in I$, de Q avec les propriétés suivantes

$$\sup \frac{\mu(\mathcal{T}_{Q'}^\sigma \setminus U_i \mathcal{T}_{Q_i}^\sigma)}{|Q'|} = \omega(b) \tag{3}$$

où la borne supérieure est prise sur les sous-cubes dyadiques de Q et $\lim\limits_{b\to 0} \omega(b) = 0$.

$$|B| \leq (1-\eta)|Q| \text{ avec } \eta = \eta(A,b) \in]0,1[\ , \tag{4}$$

où B désigne la réunion des “mauvais cubes”, i.e. ceux pour lesquels $\mu(\mathcal{T}_{Q_i}^{b\sigma}) > (A-b)|Q_i|$.

Ce résultat s'obtient en utilisant une technique inventée par L. Carleson dans son article sur le “corona problem”.

A proprement parler, (3) est vraie sous une hypothèse technique sur μ inhérente à l'utilisation des tentes :

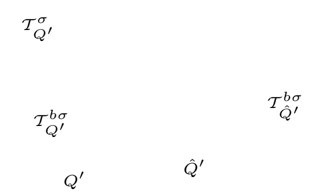

Fig.3 : la condition technique

Ici Q' est un cube et $\widehat{Q}'$ est un parent dyadique. La condition technique stipule que la μ-masse du triangle hachuré relativement à $|Q'|$ tend vers 0 si b tend vers 0 uniformément par rapport à Q' et σ.

(3) nous permet d'exhiber des sous-tentes de $\mathcal{T}^{\sigma}_{Q}$ à l'extérieur desquelles μ est de petite "norme" Carleson.

Fig.4 : décomposition de la tente $\mathcal{T}^{\sigma}_{Q}$: la zone au-dessus des petites tentes est de petite masse

On distingue donc trois zones : la zone au-dessus des tentes, les tentes au-dessus des mauvais cubes et celles au dessus des bons cubes.

Par un changement d'échelle (en ordonnée), cette décomposition de $\mathcal{T}^{\sigma}_{Q}$ induit une décomposition de $\mathcal{T}^{1}_{Q}$. On a donc

$$\tilde{\mu}(\mathcal{T}^{1}_{Q}) = \tilde{\mu}(I) + \tilde{\mu}(II) + \tilde{\mu}(III) \ . \tag{5}$$

Supposons qu'a priori $\tilde{\mu}(\mathcal{T}_Q^1) \leq \widetilde{A}|Q|$ pour tout cube Q et que l'on cherche une borne sur $\widetilde{A}$. Alors, d'après (4),

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(II) = \sum_{\text{mauvais cubes}} \tilde{\mu}(\mathcal{T}_{Q_i}^1) &\leq \widetilde{A} \sum_{\text{mauvais cubes}} |Q_i| \\ &\leq \widetilde{A}(1-\eta)|Q| \ .\end{aligned}$$

Puis $\tilde{\mu}(III) = \sum\limits_{\text{bons cubes}} \tilde{\mu}(\mathcal{T}_{Q_i}^1)$ où bon cube signifie $\mu(\mathcal{T}_{Q_i}^{b\sigma}) \leq (A-b)|Q_i|$.

On voit donc que l'on peut recommencer à décomposer $\mathcal{T}_{Q_i}^{b\sigma}$ en remplaçant Q par Q_i, σ par $b\sigma$, A par $A-b$ et s'enclenche ainsi une récurrence descendante qui doit s'arrêter en un nombre fini d'étapes : on obtient des petites tentes sur lesquelles μ est de masse nulle.

Il ne manque plus que le contrôle de $\tilde{\mu}(I)$. C'est là qu'intervient l'hypothèse d'extrapolation :
$\exists \delta_0 > 0 \quad \exists \sigma_0 \in]0,1[$ tels que $\forall Q$ cube, $\forall (Q_i)_{i\in I}$ famille disjointe de sous-cubes de Q et $\forall \sigma \in]0, \sigma_0[$

$$(E) \qquad \sup \frac{\mu(\mathcal{T}_{Q'}^\sigma \setminus \cup_i \mathcal{T}_{Q_i}^\sigma)}{|Q'|} \leq \delta_0 \Rightarrow \tilde{\mu}(\mathcal{T}_Q^1 \setminus \cup_i \mathcal{T}_{Q_i}^1) \leq C(\sigma)|Q| \ ,$$

où la borne supérieure est prise sur tous les sous-cubes dyadiques de Q.

En clair, il suffit d'avoir un contrôle de $\tilde{\mu}$ sur des régions correspondant à des régions de petite "norme" Carleson pour μ (après un changement d'échelle). On voit donc que si b et σ sont assez petits, on a dans (5)

$$\tilde{\mu}(I) \leq C(\sigma)|Q| \ .$$

L'hypothèse s'applique aussi aux petites tentes exhibées à la fin de l'itération. Finalement, on obtient

$$\tilde{\mu}(\mathcal{T}_Q^1) \leq \sum_{k=0}^N C(b^k\sigma)|Q| + \widetilde{A}(1-\tilde{\eta})|Q|$$

où N est le nombre d'itération et $\tilde{\eta} \in]0,1[$. Ceci entraîne une majoration

$$(6) \qquad \widetilde{A} = \|\tilde{\mu}\|_c \leq \tilde{\eta}^{-1} \sum_{k=0}^N C(b^k\sigma) \ .$$

Dans la majoration (6), la norme de Carleson de μ intervient de façon implicite. On voit le rôle de la constante $C(\sigma)$ qu'il convient donc de calculer en pratique.

Une autre façon de décrire un ensemble du type $\mathcal{T}_Q^\sigma \setminus \cup_i \mathcal{T}_{Q_i}^\sigma$ lorsque les Q_i sont 2 à 2 disjoints est $\mathcal{T}_Q^\sigma \cap \{(x,t), t > \sigma\psi(x)\}$ où $\psi : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty[$ est la fonction Lipschitzienne dont le graphe est formé par le toit des tentes $\mathcal{T}_{Q_i}^1$ (voir Figure 4 pour visualiser). On peut donc reformuler (E) à l'aide de cette remarque.

7 Equivalence entre le Théorème $T(b)$ pour les racines carrées et la conjecture de Kato : stratégie de la preuve

Le choix pour F_Q^j dans (S) est le suivant :

$$F_Q^j(x) = F_Q^{\sigma_j}(x) = (e^{-h^2\sigma_j^2\ell(Q)^2L}\varphi)(x)$$

où $h, \sigma_j \in]0,1[$ et $\varphi(x) \equiv x$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. Ce choix est naturel compte tenu de (ii) dans (S) puisque F_Q^j appartient au domaine de L. La vérification de (i) consiste essentiellement à commuter ∇ et le semi-groupe puisque $e^{-tL}(1) = 1$ et $\nabla\varphi = I$. On utilise notamment (G).

Le nerf de la guerre est la vérification de (iii). On applique alors l'extrapolation avec $\mu = |(\theta_t I)(x)|^2\frac{dxdt}{t}$ et $\tilde{\mu} = |b_t(x)|^2\frac{dxdt}{t}$. Un examen de (iii) (où il convient de remplacer les fenêtres de Carleson par les tentes $\mathcal{T}_Q^1$) montre qu'il suffit de vérifier (E) avec

$$C(\sigma) = 4\left(\sup_Q \frac{1}{|Q|}\iint_{\mathcal{T}_Q^1} |b_t(x).P_t\nabla F_Q^\sigma(x)|^2\frac{dxdt}{t} + \sup_{t>0}\|b_t\|_\infty^2\right) . \tag{7}$$

On se donne alors une fonction Lipschitzienne de pente 1 comme dans (E) et l'on veut majorer $\tilde{\mu}(\mathcal{T}_Q^1 \cap \Omega_\psi)$, où $\Omega_\psi = \{(x,t), t > \psi(x)\}$, par la quantité de (7) lorsque $\frac{\mu(\mathcal{T}_{Q'}^\sigma \cap \Omega_{\sigma\psi})}{|Q'|}$ est petit pour tout Q' sous-cube dyadique de Q.

On calcule $\tilde{\mu}(\mathcal{T}_Q^1 \cap \Omega_\psi)$: on a

$$\iint_{\mathcal{T}_Q^1\cap\Omega_\psi} |b_t(x)|^2\frac{dxdt}{t} \leq 2\iint_{\mathcal{T}_Q^1\cap\Omega_\psi} |b_t(x).P_t\nabla F_Q^\sigma(x)|^2\frac{dxdt}{t}$$

$$+2\iint_{\mathcal{T}_Q^1\cap\Omega_\psi} |b_t(x).(P_t\nabla F_Q^\sigma(x) - I)|^2\frac{dxdt}{t}$$

et l'on majore le dernier terme à l'aide d'une version de l'inégalité de Carleson par

$$C(n)\left(A_Q + \sup_{t>0}\|b_t\|_\infty^2\right).J \; .$$

On a posé

$$A_Q = \sup_{Q' \subset Q} \frac{\tilde{\mu}(\mathcal{T}^1_{Q'} \cap \Omega\psi)}{|Q'|}$$

où il est convenu que les Q' sont des sous-cubes dyadiques de Q et

$$J = \int_Q M^2(x)dx$$

avec

$$M(x) = \sup\{|P_t \nabla F^\sigma_Q(y) - I|; (y,t)/|y-x| \leq t \text{ et } t > \psi(y)\} \ .$$

On remarque que par définition de F^σ_Q

$$P_t \nabla F^\sigma_Q(y) - I = P_t \left(\int_0^{h^2\sigma^2\ell(Q)^2} \nabla e^{-sL} L\varphi ds \right)(y).$$

On coupe alors l'intégrale de 0 à $h^2\sigma^2\ell(Q)^2$ au point $\tau = \sigma^2 \inf(\psi, h\ell(Q))^2$ (qui dépend donc de la variable d'espace à cause de ψ). La partie $P_t(\int_0^\tau)(y)$ dans la fonction maximale $M(x)$ se traite grâce à (G) et des estimations élémentaires, et on obtient une contribution de l'ordre de $C\sigma|Q|$.

La partie sensible est $P_t \left(\int_{\sigma^2 \inf(\psi, h\ell(Q))^2}^{h^2\sigma^2\ell(Q)^2} \nabla e^{-sL} L\varphi ds \right)(y)$. Par le théorème de Hardy-Littlewood, on est ramené à démontrer

$$\text{(8)} \quad \int_Q |\int_{\sigma^2 \inf(\psi, h\ell(Q))^2}^{h^2\sigma^2\ell(Q)^2} \nabla e^{-sL} L\varphi ds|^2 dy \leq C(\mu(\tau^\sigma_Q \cap \Omega_{\sigma\psi}) + (|h| + \sqrt{\sigma})|Q|) \ .$$

Cette inégalité utilise les hypothèses (K) et (K^*) sur L, ainsi que (G), et nécessite un résultat de commutation amusant.

Ainsi, si h, σ sont petits et $\mu(\mathcal{T}^\sigma_Q \cap \Omega_{\sigma\psi})$ est petit, on a donc que

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(\mathcal{T}^1_Q \cap \Omega_\psi) &\leq 2 \iint_{\mathcal{T}^1_Q} |b_t(x).P_t \nabla F^\sigma_Q(x)|^2 \tfrac{dxdt}{t} + \tfrac{1}{2} \left(A_Q + \sup_{t>0} \|b_t\|^2_\infty\right) |Q| \\ &\leq \tfrac{1}{2} C(\sigma)|Q| + \tfrac{1}{2} A_Q |Q| \end{aligned}$$

où $C(\sigma)$ est défini en (7). On peut refaire pour tout sous-cube dyadique Q' de Q ce que l'on vient de faire pour Q et, en remarquant que $A_{Q'} \leq A_Q$, on a en passant à la borne supérieure sur Q'

$$A_Q \leq \frac{1}{2} C(\sigma) + \frac{1}{2} A_Q$$

ce qui achève de montrer (E).

Expliquons pour finir l'inégalité (8) et en particulier l'origine du le terme

$$\mu(\mathcal{T}_Q^\sigma \cap \Omega_{\sigma\psi}) = \iint_{\substack{(x,t)\in\mathcal{T}_Q^\sigma \\ t>\sigma\psi(x)}} |(\theta_t I)(x)|^2 \frac{dxdt}{t}. \tag{9}$$

On observe que

$$\int_{\sigma^2 \inf(\psi(x),h\ell(Q))^2}^{h^2\sigma^2\ell(Q)^2} \nabla e^{-sL} L\varphi(x) ds = \int_0^{h\sigma\ell(Q)} \chi(x,t) t\nabla e^{-t^2L} tL\varphi(x) \frac{dt}{t} \tag{10}$$

où $\chi(x,t)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $t > \sigma \inf(\psi(x), h\ell(Q))$.

Puis,

$$\begin{aligned}(t\nabla e^{-t^2L} tL\varphi)(x) &= (t\nabla e^{-t^2/2L} e^{-t^2/2L} t \ \mathrm{div} A)(x) \\ &= \sqrt{2}(t\nabla e^{-t^2/2L}(\theta_{t/\sqrt{2}} I))(x)\end{aligned}$$

Il s'agit donc de passer de (10) à (8) en utilisant des arguments de dualité qui reposent sur (K) et (K^*) et de commuter l'opérateur de multiplication par $\chi(.,t)$ et l'opérateur $t\nabla e^{-t^2/2L}$ grâce au lemme suivant.

Lemme 9 *Si $R_t(x,y)$ désigne le noyau-distribution de $t\nabla e^{-t^2/2L}$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} |\int_{\mathbb{R}^n} (\chi(y,t) - \chi(x,t)) R_t(x,y) f(x) dx|^2 \frac{dydt}{t} \leq C\sqrt{\sigma} \|f\|_2^2$$

où l'on rappelle que σ est la pente de la fonction lipschitzienne $x \mapsto \sigma \inf(\psi(x), h\ell(Q))$.

La preuve de ce lemme utilise toute la force de la proposition 5. Les détails seront présentés dans [AHLT].

Références

[A] P. Auscher, *Regularity theorems and heat kernels for elliptic operators*, J. London Math. Soc. **54** (1996) pp 284-296.

[AHLT] P. Auscher, S. Hofmann, J.L. Lewis, P. Tchamitchian,*On the analyticity of Kato's square root operators*, prépublication à paraître dans Acta Mathematica.

[AMcN] P. Auscher, A. McIntosh, A. Nahmod, *Holomorphic functional calcul of operators, quadratic estimates and interpolation*, Indiana Univ. Math. J. **46** (1997), pp. 375-403.

[AT] P. Auscher, P. Tchamitchian, *Square root problems for divergence operators and related topics*, Astérisque 249 (1998) 170 pages.

[AT1] P. Auscher, P. Tchamitchian, *On square roots of elliptic second order divergence operator on Strongly Lipschitz domains and absolutely bounded mean oscillation*, prépublication, 1999.

[CMcM] R. Coifman, A. McIntosh, Y. Meyer, *L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R})$ pour les courbes lipschitziennes*, Ann. Math. **116** (1982), pp. 361-387.

[HMc] S. Hofmann, A. McIntosh, *The solution of the Kato problem in two dimensions, prepublication.*

[Mc] A. McIntosh, *Square roots of operators and applications to hyperbolic PDE's, Miniconference on operator theory and partial differential equations* (Canberra), CMA, ANU, 1983.

[S] S. Semmes, *Square function estimates and the $T(b)$ theorem*, Proc. Amer. Math. Soc **110** (1990), pp. 721-726.