Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2000-2001

Ferruccio Colombini et Nicolas Lerner

Sur les Champs de vecteurs peu réguliers

Séminaire É. D. P. (2000-2001), Exposé n° XIV, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2000-2001____A14_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

SUR LES CHAMPS DE VECTEURS PEU RÉGULIERS

Ferruccio Colombini, Università di Pisa, colombin@dm.unipi.it
Nicolas Lerner, Université de Rennes 1, lerner@univ-rennes1.fr

Exposé au séminaire X-EDP le 27 février 2001

1. Introduction

L'étude des équations de transport à coefficients peu réguliers s'est considérablement développée durant ces dernières années, essentiellement sous l'impulsion de l'article de R.J.DiPerna et P.L.Lions [DL]. Dans ce résumé, nous esquissons notamment les principaux éléments de l'article [CoL2], démontrant l'unicité des solutions continues pour les champs BV à divergence bornée. Nous montrons également que la régularité Besov du champ permet d'obtenir des résultats d'unicité. Ce faisant, nous montrons les rôles symétriques, sur le plan de la régularité, joués par la fonction inconnue et les coefficients du champ de vecteurs. Nous essayons de dégager les éléments géométriques formulés de manière indépendante du système de coordonnées qui peuvent permettre d'obtenir l'unicité pour un champ borné à divergence bornée. Nous nous permettons de formuler une conjecture à ce sujet. Nous commençons ici par un survol rapide des résultats connus.

a. Le point de vue lagrangien. Il s'agit dans cette approche classique d'étudier des trajectoires définies "ponctuellement" par une équation différentielle ordinaire

$$\dot{x}(t) = a(t, x(t)), \qquad x(0) = x_0. \tag{1.1}$$

Le résultat le plus connu est sans conteste le théorème de Cauchy-Lipschitz, assurant existence et unicité pour (1.1) sous l'hypothèse de continuité Lipschitz de a par rapport à la variable x (et intégrabilité par rapport à t). Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Flett [Fl] pour une perspective historique sur les développements de l'étude des équations différentielles ordinaires. Dans l'article [ChL], les auteurs montrent que l'on peut affaiblir

2000 *Mathematics Subject Classification* 35F05, 34A12, 26A45.
Key words and phrases. Vector fields, Transport equation, Weak solutions, BV.

significativement les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz en conservant essentiellement le même type de conclusion. Plus précisément, on considère un module de continuité ω continu croissant défini de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, vérifiant $\omega(0_+) = 0$ et surtout tel que,

$$\int_0^1 \frac{dr}{\omega(r)} = +\infty. \tag{1.2}$$

La condition sur a dans (1.1) devient, pour $\|x_1 - x_2\| \leq R_0$, ($1 \geq R_0 > 0$ donné),

$$\|a(t, x_1) - a(t, x_2)\| \leq \alpha(t)\omega(\|x_1 - x_2\|), \qquad \alpha \in L^1_{\text{loc}}. \tag{1.3}$$

En fait, si $t \mapsto \psi(t, x)$ est une solution continue de

$$\psi(t, x) = x + \int_0^t a(s, \psi(s, x))ds,$$

on obtient, pour $t \geq 0$,

$$\rho(t) = \|\psi(t, x_1) - \psi(t, x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| + \int_0^t \alpha(s)\omega(\rho(s))ds = R(t),$$

de sorte que, comme ω est croissant, on a

$$\dot{R}(t) = \alpha(t)\omega(\rho(t)) \leq \alpha(t)\omega(R(t)).$$

En posant $\nu(r) = \displaystyle\int_{R_0}^r \frac{ds}{\omega(s)}$, ceci implique l'inégalité $\dfrac{d}{dt}(\nu(R(t)) \leq \alpha(t)$ qui donne

$$\nu(R(t)) \leq \nu(\|x_1 - x_2\|) + \int_0^t \alpha(s)ds.$$

En particulier, si $x_1 = x_2$, comme $\nu(0) = -\infty$, on obtient $\nu(R(t)) = -\infty$, i.e. $R(t) \equiv 0$. On peut aller plus loin et extraire de l'inégalité précédente un contrôle précis de la distance de deux solutions. La fonction ν est de classe C^1, négative pour $0 < r < R_0$, et telle que $\nu'(r) = 1/\omega(r) > 0$. On peut résumer la discussion en rappelant le résultat de [ChL] que l'on peut agrémenter de l'estimation (1.4) ci-dessous, déduite de l'inégalité précédente.

Théorème 1.1. *Soit Ω un ouvert d'un espace de Banach E, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. Soit a une fonction définie sur $I \times \Omega$, à valeurs dans E, vérifiant* (1.3) *avec ω vérifiant les propriétés de* (1.2). *Alors il existe un intervalle ouvert $J \ni t_0$ et un voisinage U de x_0 tel que, pour tout $x \in U$, l'équation*

$$\psi(t, x) = x + \int_{t_0}^t a(s, \psi(s, x))ds$$

possède une unique solution continue. De plus, pour $x_1, x_2 \in U$, on a

$$\|\psi(t,x_1)-\psi(t,x_2)\| \le \nu^{-1}\Big(\nu(\|x_1-x_2\|)+\int_0^t \alpha(s)ds\Big), \tag{1.4}$$

où ν est définie ci-dessus.

Dans le cas lipschitzien classique, $\omega(r)=r$, $\nu(r)=\ln r$, on trouve l'inégalité familière

$$\|\psi(t,x_1)-\psi(t,x_2)\| \le \|x_1-x_2\|\, e^{\int_0^t \alpha(s)ds}.$$

Dans le cas baptisé LL (pour Log-Lipschitz), on a

$$\omega(r)=r\ln(\frac{1}{r}), \qquad \nu(r)=-\ln(\ln(\frac{1}{r}))$$

et on obtient

$$\|\psi(t,x_1)-\psi(t,x_2)\| \le \|x_1-x_2\|^{e^{-\int_0^t \alpha(s)ds}},$$

soit une régularité höldérienne qui se dégrade avec le temps. En appelant IL (Intégral-Lipschitz) les fonctions vérifiant (1.3) avec ω satisfaisant (1.2), on obtient comme noté ci-dessus un théorème d'existence et d'unicité pour (1.1) avec une dépendance contrôlée par (1.4). Ce théorème est valide en dimension infinie, c'est à dire pour un a à valeurs dans un espace de Banach. Il faut noter qu'en dimension finie, en utilisant le théorème d'existence de Peano[1], ce type de résultat est connu depuis les travaux d'Osgood en 1904.

Mentionnons dans le même esprit l'article [HL], qui fournit un résultat d'existence et d'unicité pour des équations différentielles stochastiques

$$dX_t = a(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t, \tag{1.5}$$

où les hypothèses sont, dans un cadre hilbertien,

$$\|a(t,x_1)-a(t,x_2)\|^2 + \|\sigma(t,x_1)-\sigma(t,x_2)\|^2 \le \alpha(t)\omega(\|x_1-x_2\|^2),\ \alpha\in L^1_{\text{loc}}, \tag{1.6}$$

avec ω concave[2] vérifiant (1.2).

[1]Le théorème de Peano est faux en dimension infinie : on peut consulter par exemple l'exercice 18 du §2, page IV.41 de [FVR].

[2]L'hypothèse de concavité est vérifiée au voisinage de 0 pour tous les exemples IL du type $r\ln(1/r)$, $r\ln(1/r)\ln\ln(1/r)$, etc .... Cette hypothèse est utile dans le cas stochastique pour démontrer des estimations sur les espérances des variables aléatoires via l'inégalité de Jensen.

b. Le point de vue eulérien. Cette approche consiste à examiner l'équation aux dérivées partielles naturellement associée à (1.1),

$$\partial_t + \sum_{1\leq j\leq d} a_j(t,x)\partial_{x_j}. \tag{1.7}$$

Dans l'article [DL], les auteurs prouvent que l'hypothèse de régularité $a_j(t,\cdot) \in L^1_t(W^{1,1})$ et la divergence bornée, donnent l'unicité des solutions L^∞. De manière générale, ils prouvent l'unicité des solutions $L^\infty_t(L^{p'})$ pour des $a_j \in L^1_t(W^{1,p})$ (avec divergence bornée) pour $p \in [1,\infty]$. Ce résultat est intéressant même dans le cas lipschitzien pour lequel la méthode classique de Carleman fournit l'unicité des solutions L^2_{loc} (cf. [H1], chapitre 28) alors que l'article [DL] donne l'unicité des solutions L^1_{loc}. D'autres résultats importants motivés par des applications en mécanique des fluides ont été obtenus par B.Desjardins dans [De1,2,3], F.Bouchut et L.Desvillettes ([BD]), F.Bouchut et F.James ([BJ]). En outre, le travail de Bouchut [Bo] étudie la formule de dérivation des fonctions composées pour des champs $W^{1,1}$. Les articles de G.Petrova et B.Popov [PP], de F.Poupaud et M.Rascle [PR] et la note [Li], posent la question de l'unicité pour des champs BV. Nous démontrons dans [CoL2] l'unicité des solutions continues pour des champs BV à divergence bornée.

Nous nous placerons pour ce résumé dans le cadre de champs de vecteurs bornés. Le fait que la vitesse de propagation soit finie permet de donner un sens à un problème local. Pour des équations de transport (1.7) avec des coefficients non bornés, on est naturellement amené à faire des hypothèses globales dans les variables d'espace comme l'hypothèse (20) du théorème II.2 de [DL], ou bien l'hypothèse (2.11) de [CoL2]. La question de l'invariance par difféomorphisme des hypothèses de régularité trouve également un cadre naturel pour des vitesses de propagation finies. Pour commencer, on peut rappeler la définition classique de la divergence d'un champ de vecteurs régulier X sur une variété lisse orientée (M,ω). En utilisant le flot du champ, il est possible de définir la dérivée de Lie de la n-forme ω et la formule fondamentale du calcul des variations donne

$$\mathcal{L}_X(\omega) = d(\omega\rfloor X) + d\omega\rfloor X = d(\omega\rfloor X) = \omega \operatorname{div} X,$$

où $\rfloor$ est le produit intérieur. La dernière égalité a un sens sans hypothèse de régularité sur X, e.g. pour $\omega \in C^\infty$ et X à coefficients distributions. Un point de vue analogue, mais plus adapté à l'approche eulérienne consiste à examiner l'opérateur adjoint de X. On définit la divergence par l'égalité

$$X^* = -X - \operatorname{div} X.$$

de sorte que pour un champ réel[3]

$$X = \frac{1}{2}(X - X^*) + \frac{1}{2}(X + X^*) = \overbrace{X + \frac{1}{2}\operatorname{div}(X)}^{\text{anti-adjoint}} \overbrace{-\frac{1}{2}\operatorname{div}(X)}^{\text{auto-adjoint}}. \tag{1.8}$$

En particulier dans une carte Ω, pour $\omega = \nu(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ et $X = \sum_{1\le j\le n} a_j(x)\partial_{x_j}$, on a

$$\operatorname{div}(X) = \sum_{1\le j\le n} \partial_j(a_j) + X(\ln|\nu|).$$

Pour $u \in L^\infty$, en supposant $X \in L^1$ et $\operatorname{div}(X) \in L^1$, on *définit*

$$Xu = -X^*(u) - u\operatorname{div}X. \tag{1.9}$$

Evidemment, pour u de classe C^1, on retrouve la formule usuelle $Xu = \sum_{1\le j\le n} a_j\partial_j u$. En outre, si $\nu \equiv 1$, la formule (1.9) s'écrit

$$Xu = \sum_{1\le j\le n} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_j u) - u\operatorname{div}X. \tag{1.10}$$

Soit par ailleurs S une hypersurface orientée de classe C^1 et supposons $X \in L^\infty$. Pour tout $x_0 \in S$, il existe un voisinage V_0 de x_0 tel que $S \cap V_0 = \{x \in V_0, \varphi(x) = 0\}$ où $\varphi \in C^1(V_0)$ est telle que $d\varphi \neq 0$ sur V_0 ; on définit de plus $S_+ \cap V_0$ comme $\{x \in V_0, \varphi(x) \geq 0\}$ (on dira alors que φ est une équation de l'hypersurface orientée S). On supposera que X est *positivement tranverse* à S: il existe un voisinage K_0 de x_0 tel que, avec un infimum essentiel,

$$\inf_{K_0} X(\varphi) > 0. \tag{1.11}$$

La formule (1.8) montre que pour un opérateur du type $X - c$, où c est une fonction réelle, on a

$$X - c = \overbrace{X + \frac{1}{2}\operatorname{div}(X)}^{\text{anti-adjoint}} \overbrace{-\frac{1}{2}\Big(\operatorname{div}(X) + 2c\Big)}^{\text{auto-adjoint}}. \tag{1.12}$$

Ceci suggère que seul le contrôle de la partie *positive* de la divergence est important pour l'unicité. A cette remarque près, le théorème suivant est dû à DiPerna et Lions[DL].

[3]On pourra consulter le paragraphe 3.c ci-dessous pour quelques remarques sur les champs complexes et leurs pathologies.

Théorème 1.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, X un champ de vecteurs $L^\infty \cap W^{1,1}$, S une hypersurface C^1 orientée. On suppose que X est positivement tranverse à S au sens de* (1.11). *Soit u une fonction L^∞ telle que, pour une fonction $c \in L^1$,*

$$Xu = cu, \qquad \operatorname{supp} u \subset S_+.$$

Alors si la partie positive $(2c + \operatorname{div} X)_+ \in L^\infty_{\text{loc}}$, la fonction u s'annule sur un voisinage de S.

Nous donnons dans le paragraphe 3 une démonstration de ce thèorème en suivant un canevas proche de celui de [DL].

c. Remarques. Commençons par observer qu'il n'est pas toujours immédiat de passer d'un point de vue à l'autre. L'une des idées du papier [DL] est de déduire des informations sur l'existence d'un flot pour l'équation différentielle ordinaire à partir de résultats eulériens. Le théorème 1.2 ci-dessus et un théorème d'existence permettent de donner corps à une telle approche dans le cadre $W^{1,1}$.

Notons au passage que $LL \not\subset W^{1,1}$ (cf. l'appendice de [CoL2] pour un résultat plus précis[4]) et que par conséquent les résultats sur les flots IL donnés en **1.a** sont indépendants des résultats de [DL]. Le papier de Bahouri et Chemin [BC] démontre un résultat d'unicité pour des champs LL à divergence nulle. Il est naturel de poser la même question pour des champs de régularité IL avec divergence bornée (ou partie positive de la divergence bornée): on peut penser que le résultat de [BC] perdure dans ces cas. Par ailleurs, on peut se demander si l'on dispose dans les cas IL d'un résultat localisable. Si on se penche sur la méthode de preuve employée dans [BC] ainsi d'ailleurs que sur celle de [CoL1], on peut remarquer que celle-ci s'apparente à une paralinéarisation ; en fait on régularise les coefficients de l'opérateur d'une manière qui dépend de la fréquence. On utilise dans chaque couronne de Littlewood-Paley une méthode classique et l'on constate une perte de dérivée, amenant pour le flot une régularité höldérienne décroissant avec le temps comme noté plus haut. Le phénomène mis en évidence dans [CoL1], où l'on étudie une équation des ondes à coefficients LL, est de nature un peu analogue: pour des données initiales H^s, on démontre que la solution à l'instant t est seulement $H^{s-\alpha t}$ où α est une constante positive. Il semble en tous cas que ce type de résultat (ce type de démonstration) soit rétif à une technique de régularisation uniforme ; par exemple l'existence de flots pour des champs de régularité IL ne se déduit pas d'une régularisation, mais d'une inégalité différentielle sur le module de continuité ($\dot{R} \leq \omega(R)$).

Pour ce qui concerne les hypothèses sur la partie positive de la divergence, on pourra examiner le contre-exemple de Beck cité dans [DL]. Notre point d'ancrage à ce sujet réside

[4]On y trouvera un exemple de fonction non $W^{1,1}$ avec un module de continuité $r(\ln \circ \cdots \circ \ln)(1/r)$.

simplement dans les pratiques des méthodes L^2 du type inégalité de Carleman. En fait le problème de Cauchy *forward* est uniformément bien posé pour

$$L = \partial_t + Q(t)$$

où $Q(t)$ est un opérateur dont la partie auto-adjointe est semi-bornée inférieurement. Cela signifie que si $\operatorname{Re} Q(t) \geq -\alpha$, on peut prouver pour de telles équations des inégalités d'énergie ne dépendant que de α, par exemple en multipliant l'équation par $e^{-\beta t}$ avec $\beta \geq 2\alpha$: pour $A(t)$ et $B(t)$ autoadjoints, on a

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\langle \partial_t u + A(t)u + iB(t)u, u\rangle e^{-\beta t} &= \frac{d}{dt}\Big(|u(t)|^2 e^{-\beta t}\Big) + \beta |u(t)|^2 e^{-\beta t} + 2\langle Au, u\rangle e^{-\beta t} \\ &\geq \frac{d}{dt}\Big(|u(t)|^2 e^{-\beta t}\Big) + (\beta - 2\alpha)|u(t)|^2 e^{-\beta t}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \sigma(t) = 2\int_0^t |u(s)e^{-\beta s/2}||Lu(s)e^{-\beta s/2}|ds + |u(0)|^2 \\ \geq \sup_{0\leq s\leq t} |u(s)|^2 e^{-\beta s} + (\beta - 2\alpha)\int_0^t |u(s)|^2 e^{-\beta s}. \end{aligned}$$

Ceci donne pour $\beta \geq 2\alpha$

$$\dot\sigma(t) = 2|u(t)e^{-\beta t/2}||Lu(t)e^{-\beta t/2}| \leq 2|Lu(t)e^{-\beta t/2}|\sigma^{1/2}(t)$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\sigma^{1/2}(t) \leq |Lu(t)e^{-\beta t/2}|,$$

et par conséquent

$$\sup_{0\leq s\leq t} |u(s)|e^{-\beta s/2} \leq \sigma^{1/2}(t) \leq |u(0)| + \int_0^t |Lu(s)e^{-\beta s/2}|ds.$$

Bien que cette analogie avec la formule (1.12) soit simplement heuristique car nous ne prouvons pas d'emblée une inégalité a priori L^2 pour le champ considéré, notre méthode de démonstration introduit malgré tout une intégration par parties qui demande un contrôle de la partie positive de la divergence. En revanche, la partie négative de la divergence contribue à améliorer l'inégalité. On pourra consulter les détails du calcul dans le lemme 3.2 de [CoL2].

Dans son paragraphe IV.2, le papier [DL] fournit également des exemples de champs à divergence nulle dont les dérivées des coefficients ne sont pas intégrables, tels qu'aucun résultat d'unicité ne soit vérifié. Toutefois cet exemple 2-dimensionnel n'est pas borné. En revanche dans l'article [Ai], l'auteur construit en dimension 3 un champ borné X à divergence nulle qui n'est pas essentiellement anti-adjoint. Pour un tel champ, il n'y a pas de flot dont le générateur infinitésimal L^2 soit une extension de X.

2. Champs BV, Champs Besov, une conjecture générale

a. Sur les champs BV. Dans [CoL2], nous démontrons l'unicité des solutions continues pour des équations de transport BV à divergence bornée. Plus précisément, nous démontrons notamment le résultat local suivant (pour un résultat global, on pourra consulter le *theorem 2.2 de* [CoL2]).

Théorème 2.1. *Soient X un champ des vecteurs à coefficients $BV \cap L^\infty$, c une mesure de Radon et S une hypersurface C^1 orientée. On suppose que X est positivement transverse à S au sens de* (1.11). *Soit u une fonction continue telle que*

$$Xu = cu, \qquad \operatorname{supp} u \subset S_+. \tag{2.1}$$

Alors si la partie positive $(2c + \operatorname{div} X)_+$ appartient à L^∞, la fonction u s'annule dans un voisinage de S.

Bien entendu, il serait aussi intéressant de démontrer l'unicité des solutions L^∞ sous l'hypothèse additionnelle $c, \operatorname{div} X \in L^1$. Néanmoins, ce théorème démontre malgré tout l'unicité pour une classe de solutions faibles. Passons tout de suite à l'énoncé pour certains champs de régularité Besov, puisque nous verrons que les méthodes de preuve des théorèmes 1.2, 2.1, 2.2 sont essentiellement les mêmes.

b. Sur les champs Besov. Rappelons qu'en utilisant la décomposition de Littlewood-Paley, on a $1 = \sum_{\nu \geq 0} \varphi_\nu(\xi)$ avec $\operatorname{supp} \varphi_0$ compact et pour $\nu \geq 1$,

$$\operatorname{supp} \varphi_\nu \subset \{2^{\nu-1} \leq |\xi| \leq 2^{\nu+1}\}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \ \sup_{\nu \in \mathbb{N}} |\varphi_\nu^{(k)}(\xi) 2^{\nu k}| < +\infty. \tag{2.2}$$

La norme sur l'espace de Besov $B^s_{p,q}$ est la norme l^q de la suite $\left(2^{\nu s} \|\varphi_\nu(D)u\|_{L^p}\right)_{\nu \geq 0}$.

Théorème 2.2. *Soient X un champ de vecteurs borné à coefficients $B^{1/2}_{\infty,2}$, de divergence L^2, c une fonction L^2 et S une hypersurface C^1 orientée. On suppose que X est positivement transverse à S au sens de* (1.11). *Soit u une fonction $H^{1/2}$ telle que*

$$Xu = cu, \qquad \operatorname{supp} u \subset S_+.$$

Alors si la partie positive $(2c + \operatorname{div} X)_+$ appartient à L^∞, la fonction u s'annule dans un voisinage de S.

La régularité de X est ici proche de $C^{1/2}$. Toutefois, on a les inclusions strictes

$$C^{1/2} = B^{1/2}_{\infty,\infty} \supset B^{1/2}_{\infty,2} \supset \cup_{\epsilon > 0} C^{\frac{1}{2}+\epsilon}. \tag{2.3}$$

La régularité de la solution est ici seulement $H^{1/2}$ de sorte que ce type de théorème montre que l'on peut "répartir" une dérivée de régularité sur la solution et les coefficients. Plusieurs variations sur ce thème sont possibles, et il nous a paru intéressant de noter ce phénomène en faisant un choix précis d'hypothèses. Bien entendu, ces solutions $H^{1/2}$ sont des solutions faibles, mais leur existence n'est pas assurée.

c. Une conjecture générale.

Conjecture 2.3. *Soit X un champ de vecteurs de divergence nulle, à coefficients L^∞, transverse à une hypersurface S. Soit u une fonction L^∞ telle que*

$$Xu = 0, \qquad \operatorname{supp} u \subset S_+.$$

Alors la fonction u s'annule dans un voisinage de S.

Des versions de cette conjecture sont vérifiées pour les dimensions 1 et 2. En effet, on peut considérer pour la dimension 1 l'équation différentielle scalaire autonome

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0, \tag{2.4}$$

en supposant f seulement continue mais $f(x_0) \neq 0$. Alors, l'existence est assurée par le théorème de Peano tandis que l'unicité est vérifiée: posant $G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{f(y)}$ on trouve que, au voisinage de x_0, $G \in C^1$, $G' \neq 0$ de sorte que G possède une fonction réciproque $g \in C^1$. On a, pour $x(t)$ solution C^1 définie au voisinage de 0 de l'équation (2.4),

$$\frac{d}{dt}(G(x(t)) = \frac{\dot{x}(t)}{f(x(t))} = 1$$

d'où $G(x(t)) = t$ et par conséquent $x(t) = g(t)$. Finalement, le fait que f soit seulement continue importe peu. Ce qui joue un rôle crucial est que $f(x_0) \neq 0$. Il faut se souvenir que les contre-exemples classiques de non-unicité dans le cas höldérien sont du type $\dot{x} = x^{1/2}$ où f est concomitamment nulle et singulière en x_0.

Pour la dimension 2, on peut examiner par exemple un champ X continu à divergence nulle. On trouve alors que X est un champ hamiltonien H_ψ

$$X = \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y},$$

où ψ est une fonction C^1. En notant φ l'équation (de classe C^1) de l'hypersurface, on peut supposer $\{\psi, \varphi\} \geq 1$ au voisinage de 0. Ceci signifie que le jacobien de l'application κ donnée par $(\varphi, \psi) = \kappa(x, y)$ est

$$\det \kappa' = \begin{vmatrix} \partial_x \varphi & \partial_y \varphi \\ \partial_x \psi & \partial_y \psi \end{vmatrix} \geq 1,$$

et κ est donc un C^1-difféomorphisme local. En posant $\nu = \kappa^{-1}$, et pour une fonction $F \in C^1_c$, on a pour $u \in L^\infty$ vérifiant $Xu = 0$,

$$\begin{aligned} 0 = \langle Xu, F(\varphi, \psi)\rangle &= -\iint u(x,y)\frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi(x,y), \psi(x,y))X(\varphi)(x,y)dxdy \\ &= -\iint (u \circ \nu)(\varphi, \psi)\frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi, \psi)\det \kappa'(\nu(\varphi, \psi))\det \nu'(\varphi, \psi)d\varphi d\psi \\ &= -\iint (u \circ \nu)(\varphi, \psi)\frac{\partial F}{\partial \varphi}(\varphi, \psi)d\varphi d\psi. \end{aligned}$$

Ceci signifie que

$$\frac{\partial(u \circ \nu)}{\partial \varphi} = 0$$

et comme $u \circ \nu_{|\varphi<0} = 0$, on en déduit que $u = 0$. Cet argument s'adapte au cas de champs L^∞ à divergence nulle. On trouvera des calculs analogues dans l'article [BD]. En dimension 3, le problème 2.3 est ouvert.

Par ailleurs, la discussion du paragraphe suivant montre que, pour un champ X borné de divergence bornée, transverse à une hypersurface S, la propriété essentielle assurant l'unicité est le caractère "leibnizien":

$$u, v \in L^\infty, X(u), X(v) \in L^1 \Longrightarrow X(uv) = X(u)v + uX(v). \tag{2.5}$$

On peut considérer les lemmes de commutation de la section 3 comme une démonstration de (2.5) ou de ses variantes. A notre connaissance, on ne dispose d'aucun contre-exemple à (2.5) sous les hypothèses de la conjecture 2.3.

Nous souhaitons terminer ce paragraphe par quelques remarques sur les champs de vecteurs complexes. A l'exception de la discussion présente, nous supposons implicitement dans tout ce résumé que les champs considérés sont réels. Bien évidemment l'identité (1.12) répartissant les parties auto-adjointes et anti-adjointes se trouve complètement bouleversée dans le cas où le champ est complexe. On sait que la pathologie de tels champs est riche et variée, même si on se limite aux cas non caractéristiques à coefficients C^∞. L'exemple de Hans Lewy, découvert en 1957, est tridimensionnel et s'écrit

$$L_0 = \partial_{x_1} + i\partial_{x_2} + i(x_1 + ix_2)\partial_{x_3}.$$

La champ L_0 n'est pas localement résoluble: il existe des fonctions $f \in C^\infty$ telles que l'équation $L_0 u = f$ n'ait pas de solution distribution, même localement. L'exemple de Paul Cohen est bidimensionnel

$$L_1 = \partial_{x_1} + a(x)\partial_{x_2}.$$

On peut trouver des fonctions $a \in C^\infty$ (et à valeurs complexes), $u \in C^\infty$ avec $\operatorname{supp} u = \{x_1 \geq 0\}$ telles que $L_1 u = 0$. On connaît maintenant une condition géométrique équivalente à la résolubilité locale pour des champs C^∞ non nuls, c'est la condition (P) de Nirenberg-Treves (cf.e.g. le chapitre 26 de [H1] et sa bibliographie). On pourra également consulter l'article de Saint Raymond [Sa] sur les résultats d'unicité pour des champs complexes. La situation est donc tellement instable pour les champs complexes réguliers qu'il semble très difficile d'espérer un résultat maniable d'unicité pour des champs complexes non lipschitziens. Néanmoins cette question mérite considération puisqu'il s'agit d'exemples très particuliers de systèmes de champs de vecteurs. Nous fermons la parenthèse sur les champs complexes et revenons à des champs réels

3. Indications sur les démonstrations

a. Le plan de la preuve. Le canevas de démonstration que nous proposons est suffisamment flexible pour s'adapter aux cas connus et aux cas nouveaux présentés ici. On considère un champ de vecteurs borné X, positivement transverse à une hypersurface S de classe C^1, dont la partie positive de la divergence est bornée.

(i) On démontre tout d'abord un lemme sur les solutions positives et plates. Si w est une fonction positive vérifiant $Xw = 0$, $\operatorname{supp} w \subset S_+$ on démontre que $w = 0$. Ce lemme utilise de manière cruciale la vitesse finie de propagation, une borne L^∞ sur la partie positive de la divergence, la transversalité du champ. Néanmoins, cette étape ne consomme pas de régularité du champ.

(ii) On démontre ensuite que si u est L^∞ (ou bien continue) l'hypothèse $Xu = 0$ implique $X(u^2) = 0$. Cette propriété est basée sur un lemme de commutation du type Friedrichs. Le commutateur étudié dans le lemme II.1 de [DL] (cf. aussi le lemme 3.3 de [Bo]) converge fortement dans L^1 sous l'hypothèse $W^{1,1}$. En revanche, dans le cas BV, on a convergence faible au sens des mesures, ce qui est suffisant si la solution est supposée continue. On applique alors le lemme (i) pour conclure.

(iii) On peut adapter les étapes précédentes aux cas des équations $Xu = cu$ avec un contrôle L^∞ sur $(c + \operatorname{div} X)_+$.

Notons également que l'étape (ii) s'adapte à l'hypothèse $u \in L^p$: il suffit de remplacer dans (ii) la fonction u^2 par $u^2/(1+u^2)$.

b. Le lemme sur les fonctions positives. Le lemme suivant est démontré dans [CoL2](*lemma 3.1*).

Lemme 3.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, X un champ de vecteurs $L^\infty(\Omega)$ positivement transverse à une hypersurface orienteé S de classe C^1 et $p \in [1, +\infty]$. On suppose que* $\operatorname{div} X \in L^p(\Omega)$. *Soit w une fonction $L^{p'}(\Omega)$ telle que pour une fonction $c \in L^p(\Omega)$,*

$$Xw \le cw, \qquad \operatorname{supp} w \subset S_+ \qquad et \qquad w \ge 0.$$

Alors si $(c + \operatorname{div} X)_+ \in L^\infty(\Omega)$, la fonction w s'annule dans un voisinage de S.

On peut remarquer que lorsque X possède un flot Φ_X^t et $Xw \le 0$, on a

$$\frac{d}{dt} w(\Phi_X^t(m)) \le 0,$$

c'est à dire w décroissante le long des courbes intégrales du champ. Comme le champ est transverse à S et w est nulle sur S, w doit être négative sur S_+. Si on suppose w positive, on obtient $w = 0$. Le lemme ci-dessus montre que la conclusion reste valide dans une situation a priori très éloignée de l'existence d'un flot. Le *lemma 3.2* de [CoL2] fournit un résultat analogue au lemme 3.1 en supposant $\operatorname{div} X, c$ mesures de Radon et w continue. Sans rentrer dans le détail des preuves de ces lemmes, on peut noter simplement que si $\operatorname{div} X = c = 0$ et si ψ est une fonction C^1 telle que $\{\psi \leq 1\} \cap S_+$ est un compact K de Ω,

$$0 \geq \langle Xw, [(1-\psi)_+]^2\rangle = \int w2(1-\psi)_+ X(\psi) dm \tag{3.1}$$

de sorte que, si ψ est en outre proche dans C^1 de l'équation φ de S, $X(\psi) \geq \alpha > 0$ au voisinage de S. Comme $w \geq 0$, il vient de (3.1) la nullité de w sur K. On peut adapter ce raisonnement aux cas où la contribution de c et $\operatorname{div} X$ n'est pas nulle mais contrôlée par l'hypothèse $(c + \operatorname{div} X)_+ \in L^\infty$.

c. L'argument de commutation. On considère un champ X défini sur $\mathbb{R}^n$,

$$X = \sum_{1 \leq j \leq n} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{3.2}$$

Soit ρ une fonction positive C_c^∞ supportée dans la boule unité $\mathbb{R}^n$ telle que $\int \rho = 1$. On pose pour $\epsilon > 0$, $\rho_\epsilon(\cdot) = \epsilon^{-n}\rho(\cdot/\epsilon)$. On examine l'opérateur défini par

$$R_\epsilon u = X(u * \rho_\epsilon) - (Xu) * \rho_\epsilon. \tag{3.3}$$

En définissant la translation par $(\tau_z u)(x) = u(x - z)$, on obtient l'identité suivante:

$$(R_\epsilon u)(x) = \int \Big\{ (\tau_{\epsilon z} \operatorname{div} X)(x)\rho(z) + \frac{1}{\epsilon} \sum_j [(\operatorname{Id} - \tau_{\epsilon z})a_j](x)\partial_j\rho(z) \Big\} [(\tau_{\epsilon z} - \operatorname{Id})u](x) dz. \tag{3.4}$$

Le lemme II.1 de [DL] (cf. aussi *lemma 4.1* in [CoL2]) et le *lemma 4.2* de [CoL2] impliquent respectivement le (1) et (2) du lemme suivant.

Lemme 3.2.

(1) *Soit* $p \in [1, \infty]$ *et* X *un champ* $\in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. *Alors avec* R_ϵ *défini en* (3.3), *on a pour* $u \in L^{p'}_{\text{loc}}$, $(1/p + 1/p' = 1)$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} R_\epsilon u = 0 \quad \textit{dans} \quad L^1_{\text{loc}}.$$

(2) *Soit* X *un champ de vecteurs* $\in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *i.e. les coefficients sont* L^1_{loc} *avec des dérivées premières dans* $\mathcal{D}'^{(0)}$. *Alors pour* $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} R_\epsilon u = 0 \quad \textit{faiblement dans } \mathcal{D}'^{(0)}.$$

Pour la démonstration du théorème 2.2 sur les champs Besov, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3. *Soit a une fonction bornée de $B^{1/2}_{\infty,2}$. Alors, l'opérateur de multiplication par a est borné de $H^{1/2}$ dans lui-même. Il existe $a \in B^{1/2}_{\infty,\infty} \cap L^\infty$ tel que l'opérateur de multiplication par a ne se prolonge pas à un opérateur borné de $H^{1/2}$ dans lui-même.*

Démonstration. Avec les notations (2.2) et

$$S_\nu = \sum_{0\le\mu\le\nu-2} \varphi_\mu(D), \quad u_\nu = \varphi_\nu(D)u, \tag{3.5}$$

on utilise la paramultiplication de Bony en décomposant le produit

$$au = T_a u + T_u a + R(a,u)$$

avec

$$T_a u = \sum_{\nu\ge 0} S_\nu(a) u_\nu, \quad T_u a = \sum_{\nu\ge 0} S_\nu(u) a_\nu, \quad R(a,u) = \sum_{\substack{\mu,\nu,\\ |\mu-\nu|\le 1}} a_\mu u_\nu.$$

Le terme $T_a u$ n'utilise que la norme L^∞ de a, car le spectre de $S_\nu(a)u_\nu$ est inclus dans une couronne de taille 2^ν:

$$\|T_a u\|^2_{H^{1/2}} \le C_1 \sum_\nu 2^\nu \|S_\nu(a)u_\nu\|^2_{L^2} \le C_2 \|a\|^2_{L^\infty} \sum_\nu 2^\nu \|u_\nu\|^2_{L^2}.$$

Comme le spectre de $S_\nu(u)a_\nu$ est inclus dans une couronne de taille 2^ν, le terme $T_u a$ s'estime comme suit:

$$\|T_u a\|^2_{H^{1/2}} \le C_1 \sum_\nu 2^\nu \|S_\nu(u)a_\nu\|^2_{L^2} \le C_1 \sum_\nu 2^\nu \|u\|^2_{L^2} \|a_\nu\|^2_{L^\infty} = C_1 \|a\|^2_{B^{1/2}_{\infty,2}} \|u\|^2_{L^2}.$$

En outre, le terme $R(a,u)$ est H^1. En effet, on a

$$\sum_\mu 2^{2\mu} \|\varphi_\mu(\sum_\nu a_\nu u_\nu)\|^2_{L^2} = \sum_\mu 2^{2\mu} \|\varphi_\mu(\sum_{\nu\ge\mu-2} a_\nu u_\nu)\|^2_{L^2}$$

$$\le \sum_\mu 2^{2\mu} \Big(\sum_{\nu\ge\mu-2} \|\varphi_\mu(a_\nu u_\nu)\|_{L^2}\Big)^2 \le \sum_\mu \Big(\sum_{\nu\ge\mu-2} 2^{\mu-\nu} \overbrace{2^{\nu/2}\|a_\nu\|_{L^\infty}}^{\in l^2\subset l^\infty} \overbrace{2^{\nu/2}\|u_\nu\|_{L^2}}^{\in l^2}\Big)^2$$

et le noyau $k_{\mu\nu} = 2^{\mu-\nu}H(\nu-\mu)$ est borné sur l^2 par le critère de Schur. Montrons maintenant que la multiplication par une fonction $C^{1/2}$ n'est pas définie sur $H^{1/2}$. On peut remarquer que, sous l'hypothèse $a \in C^{1/2}$, les termes $T_a(u)$ et $R(a,u)$ sont respectivement dans $H^{1/2}$ et H^1. Le contre-exemple qui suit montre que ce n'est pas le cas du terme $T_u a$

Considérons la fonction $C^{1/2}$ bornée $a(x) = \sum_{\nu\ge 0} 2^{-\nu/2} e^{2\pi i x 2^\nu}$. Soit u une fonction non nulle telle que $0 \le \hat u \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$. On a $\widehat{au}(\xi) = \sum_{\nu\ge 0} \hat u(\xi - 2^\nu)2^{-\nu/2}$ et par suite

$$|\xi||\widehat{au}(\xi)|^2 \ge \sum_{\nu\ge 0} |\xi| 2^{-\nu} \hat u(\xi - 2^\nu)^2 \ge \sum_{\nu \ge 0} \hat u(\xi - 2^\nu)^2$$

ce qui implique $au \notin H^{1/2}$. $\square$

Revenons maintenant à la démonstration des théorèmes 1.2, 2.1, 2.2. Pour simplifier, supposons que la divergence du champ soit nulle et que $c = 0$. Il nous suffit de prouver que $Xu = 0$ implique $Xu^2 = 0$. On calcule, pour $\phi \in C_c^1$, $\chi \in C_c^1$ égale à 1 sur le support de ϕ, avec la notation (3.3),

$$\begin{aligned}\langle X(u^2), \phi\rangle_{\mathcal{D}'^{(1)}, C_c^1} &= -\int u^2 X(\phi) dm = -\int \chi^2 u^2 X(\phi) dm \\ &= -\lim_{\epsilon\to 0_+} \int \chi u (\chi u * \rho_\epsilon) X(\phi) dm = \lim_{\epsilon\to 0_+} \int \chi u R_\epsilon(\chi u)\phi dm = 0,\end{aligned}$$

en utilisant le lemme 3.2 (1) (cas $p = 1, u \in L^\infty$) ou bien le lemme 3.2 (2) (cas u continue). Pour le cas du théorème 2.2 ($u \in H^{1/2}, X \in B^{1/2}_{\infty,2}$), on utilise le lemme 3.3 assurant que que pour $a \in B^{1/2}_{\infty,2}$, avec $v_\epsilon = \chi u * \rho_\epsilon, v = \chi u$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \nabla(a v_\epsilon) = \nabla(av) \quad \text{dans } H^{-1/2}.$$

On obtient donc

$$\lim_{\epsilon\to 0_+} \int \chi u R_\epsilon(\chi u)\phi dm = \lim_{\epsilon\to 0_+} \sum_j \langle \partial_j(a_j v_\epsilon), \phi u\rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = \langle X(\chi u), \phi u\rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} = 0,$$

ce qui achève la démonstration.

References

[Ai] M.Aizenman, *On vector fields as generators of flows: a counterexample to Nelson's conjecture*, Ann. Math. **107** (1978), (2), 287–296.

[BC] H.Bahouri, J.-Y.Chemin, *Équations de transport relatives à des champs de vecteurs non-lipschitziens et mécanique des fluides.*, Arch. Rational Mech. Anal. **127** (1994), no. 2, 159–181.

[Bo] F.Bouchut, *Renormalized solutions to the Vlasov equation with coefficients of bounded variation*, Arch. for Ration. Mech. and Anal. (à paraître).

[BD] F.Bouchut, L.Desvillettes, *On two-dimensional Hamiltonian transport equations with continuous coefficients*, Diff. and Int. Eq. **14** (2001), 1015-1024.

[BJ] F.Bouchut, F.James, *One dimensional transport equations with discontinuous coefficients*, Non linear analysis **32** (1998), 891–933.

[ChL] J.-Y.Chemin, N.Lerner, *Flot de champ de vecteurs non lipschitziens et équations de Navier-Stokes*, J.Differ. Eq. **121** (1995), 314–328.

[CoL1] F.Colombini, N.Lerner, *Hyperbolic equations with non Lipschitz coefficients*, Duke Math.J. **77**, 3 (1995), 657–698.

[CoL2] F.Colombini, N.Lerner, *Uniqueness of continuous solutions for BV vector fields*, Duke Math.J.(à paraître).

[De1] B.Desjardins, *A few remarks on ordinary differential equations*, Comm.PDE **21** (1996), 1667–1703.

[De2] B.Desjardins, *Linear transport equations with initial values in Sobolev spaces and application to the Navier-Stokes equations*, Diff. & Integ. Equ. **10** (1995), 3, 577–586.

[De3] B.Desjardins, *Global existence results for the incompressible density-dependent Navier-Stokes equations in the whole space*, Diff. & Integ. Equ. **10** (1995), 3, 587–598.

[DL] R.J. DiPerna, P.L.Lions, *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math. **98** (1989), 511–547.

[Fe] H.Federer, *Geometric measure theory*, Grund. der math. Wiss., vol. 153, Springer-Verlag, 1969.

[Fl] T.M.Flett, *Differential analysis*, Cambridge Univ. Press, 1980.

[FVR] N.Bourbaki, *Fonctions d'une variable réelle*, C.C.L.S., Paris, 1976.

[H1] L.Hörmander, *The Analysis of Linear PDO*, Grund. der math. Wiss., vol. 256-257-274-275, Springer-Verlag, 1983-85.

[H2] L.Hörmander, *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations*, Mathématiques et applications, vol. 26, Springer-Verlag, 1996.

[HL] Y.Hu, N.Lerner, *On the existence and uniqueness of solutions to stochastic equations in infinite dimensions with integral-Lipschitz coefficients*, preprint 00-39, Irmar (2000).

[Li] P.L.Lions, *Sur les équations différentielles ordinaires et les équations de transport*, C.R. Acad.Sc. Paris, Série I, **326** (1998), 833–838.

[PP] G.Petrova, B.Popov, *Linear transport equations with discontinuous coefficients*, Comm.PDE **24** (1999), 1849–1873.

[PR] F.Poupaud, M.Rascle, *Measure solutions to the linear multidimensional transport equation with non-smooth coefficients*, Comm.PDE **22** (1997), 337–358.

[Sa] X.Saint Raymond, *L'unicité pour les problèmes de Cauchy linéaires du premier ordre*, Enseign. Math. no. 1-2, (2), **32** (1986), 1–55.

[Tr] F.Treves, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Pure & Appl. Math.Ser., Academic Press, 1967.

[Vo] A.I.Vol'pert, *The space BV and quasi-linear equations*, Math.USSR Sbornik **2** (1967), 225–267.

[Zi] W.P.Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate texts in mathematics, vol. 120, Springer-Verlag, 1989.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Via F.Buonarroti 2, 56127 Pisa, Italia
E-mail address: `colombin@dm.unipi.it`

Université de Rennes 1, Irmar, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France
E-mail address: `lerner@univ-rennes1.fr`
Web-page: `http://www.maths.univ-rennes1.fr7lerner`