SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2000-2001

Bernard Helffer

Bouteilles magnétiques et supraconductivité

Séminaire É. D. P. (2000-2001), Exposé n° XI, 20 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2000-2001____A11_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Bouteilles magnétiques et supraconductivité

par Bernard Helffer
(d'après Helffer-Morame, Lu-Pan, Helffer-Pan)
Département de Mathématiques, UMR CNRS 8628,
Bât. 425, Université Paris-Sud,
F-91405 Orsay Cedex, France.
E.Mail: Bernard.Helffer@math.u-psud.fr

Résumé

La théorie de la supraconductivité a récemment réattiré l'attention sur des questions semi-classiques concernant la plus petite valeur propre de la réalisation de Neumann d'un opérateur de Schrödinger avec champ magnétique et la localisation du vecteur propre correspondant. Comme autrefois dans l'étude de l'effet tunnel que nous avions menée avec J. Sjöstrand, nous allons montrer, en suivant un travail en collaboration avec A. Morame, que les inégalités d'Agmon-Lithner peuvent jouer un rôle important dans la compréhension d'articles récents publiés dans le domaine de la théorie mathématique de la supraconductivité : Bernoff-Sternberg, Lu-Pan et Del Pino-Felmer-Sternberg. Les techniques mises en oeuvre recoupent également un travail effectué avec A. Morame initialement motivé par un géomètre Montgomery qui s'était posé en écho de la question de M. Kac sur la forme d'un tambour : Peut-on entendre les zéros d'un champ magnétique.

Mais ce qui est le plus frappant ici est la spécificité du problème de Neumann mettant en évidence des phénomènes dans le bord.

1 Introduction : la question en supraconductivité

Commençons par donner la présentation physique de la question et repoussons à plus tard la "traduction mathématique".
Nous considérons un échantillon supraconducteur cylindrique de type 2 dont la section Ω est un domaine borné de $I\!R^2$, et plaçons cet échantillon dans un champ magnétique extérieur. Il est bien connu que, si le champ magnétique est suffisamment fort, l'échantillon perd sa propriété superconductrice. Lorsque le champ appliqué diminue d'intensité, on observe qu'à une certaine valeur critique $H_{C_3}(\kappa)$ la nucléation de la supraconductivité apparaît. Il s'agit donc d'estimer ce champ critique et de déterminer où commence la nucléation.

Ceci correspond à l'une des propriétés importantes des supraconducteurs telle qu'elle est décrite dans les ouvrages de physique (voir par exemple Saint-James-De Gennes [SdG], Saint-James and Sarma [SST], et Tinkham [Ti]). Plus récemment un grand nombre de travaux plus rigoureux mathématiquement ont été consacrés à ces questions. Parmi eux, citons les travaux de Chapman [Ch] et Bernoff-Sternberg [BeSt] qui sont plutôt formels, l'article de Bauman-Philips-Tang [BaPhTa] consacré au disque et les travaux de, Giorgi-Phillips [GioPh], Lu-Pan [LuPa1, LuPa2, LuPa3, LuPa4, LuPa5] et Del Pino-Fellmer-Sternberg [PiFeSt] pour une analyse mathématiquement rigoureuse pour des domaines généraux. Notre exposé sera concentré autour de travaux plus récents de Helffer-Morame [HeMor1], Lu-Pan [LuPa5] et Helffer-Pan [HePa]. On s'intéressera tout particulièrement à l'influence de la géométrie du bord dans l'apparition de la supraconductivité.

"Traduisons" maintenant le sujet de notre exposé. Pour ces domaines cylindriques de $I\!R^3$, il est naturel (mais pas totalement justifié mathématiquement) de considérer une fonctionnelle définie dans un ouvert Ω de dimension 2. Le comportement supraconducteur se lit sur les propriétés du minimiseur $(\psi, \mathcal{A})$ dans $H^1(\Omega; \mathbb{C}) \times H^1(\Omega; I\!R^2)$ de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}(\psi\ ,\ \mathcal{A}) = \int_\Omega \{|(\nabla - i\kappa\mathcal{A})\psi|^2 + \kappa^2|\mathrm{rot}\,\mathcal{A} - \mathcal{H}|^2 + \frac{\kappa^2}{2}(|\psi|^2 - 1)^2\}\, dx\ . \quad (1.1)$$

Ici Ω est un ouvert borné régulier, ψ est appelée paramètre d'ordre et $\mathcal{A}$ est un potentiel magnétique défini sur Ω. $\mathcal{H}$ est le champ magnétique appliqué ou champ magnétique extérieur. Il est normalement défini sur $I\!R^2$, mais dans le cas où Ω est simplement connexe, on le considère uniquement sur Ω (voir [BeRu], [HHOO] pour le cas d'ouverts à trous). Nous supposerons dans la suite la simple connexité.

Le paramètre κ est une caractéristique de l'échantillon. On distingue traditionnellement les échantillons de type 1 correspondant à κ petit des échantillons de type 2 correspondant à κ grand. C'est ce dernier cas que nous considérons ici.

Même si le modèle ci-dessus est courant, notons que d'autres modèles (obtenus par dilatation et changement de fonctions d'ondes) peuvent être considérés et conduient à des comportements asymptotiques différents [BeRu], [DuHe].

Quand Ω est borné, l'existence de ce minimiseur est standard et il est solution de l'équation d'Euler associée (plutôt appelée dans ce contexte système de Ginzburg-Landau [GinLa, dG, SST, CHO])

$$\begin{array}{l} -(\nabla - i\kappa\mathcal{A})^2\psi = \kappa^2(1 - |\psi|^2)\psi, \\ \mathrm{rot}^2\mathcal{A} = -\frac{i}{2\kappa}(\overline{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\overline{\psi}) - |\psi|^2\mathcal{A} + \mathrm{rot}\,\mathcal{H}, \qquad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\nu} - i\kappa\mathcal{A}\psi\cdot\nu = 0\ , \qquad \text{sur } \partial\Omega \\ \mathrm{rot}\,\mathcal{A} - \mathcal{H} = 0, \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \quad (1.2)$$

Notons aussi que ν désigne ici la normale extérieure en un point de $\partial\Omega$ et que :

$$\mathrm{rot}^2\mathcal{A} = (\partial_2(\mathrm{rot}\,\mathcal{A}), -\partial_1(\mathrm{rot}\,\mathcal{A}))\ .$$

Dans cet exposé, nous supposerons que :

$$\mathcal{H}(x) \equiv \sigma H_e(x), \tag{1.3}$$

où $H_e(x)$ est un champ fixé non identiquement nul dans Ω et où σ est un paramètre qui nous permettra de faire varier l'intensité du champ extérieur.

Il est bien connu qu'il existe un unique champ de vecteur $\mathbf{F}$ sur Ω tel que

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = H_e \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \mathbf{F} \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Remarquons maintenant que $(0, \sigma\mathbf{F})$ est un point critique trivial de la fonctionnelle $\mathcal{G}$. Il est donc naturel de discuter en fonction de σ, si c'est un minimiseur global ou local. Lorsque σ est grand, on peut montrer que c'est effectivement l'unique minimiseur. On dit alors que la supraconductivité est détruite (le paramètre d'ordre est identiquement nul dans Ω). Il est alors naturel de suivre ce qui se passe en faisant décroître σ à partir de $+\infty$ et de déterminer quand cette solution triviale (aussi appelée solution normale) cesse d'être un minimum global ou local.

Ceci conduit (**en supposant ici que H_e est constant et égal à** 1) à la définition :

$$H_{C_3}(\kappa) = \inf\{\sigma > 0 : (0, \sigma\mathbf{F}) \text{ est un minimiseur global de } \mathcal{G}\}. \tag{1.4}$$

Le premier résultat que nous voulons mentionner est essentiellement du à Lu-Pan (cf aussi Bauman-Phillips-Tang [BaPhTa] pour le cas du disque).

Théorème 1.1 .
Pour tout domaine simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de bord régulier nous avons :

–
$$\lim_{\kappa \to \infty} \frac{H_{C_3}(\kappa)}{\kappa} = \frac{1}{\Theta_0}\,, \tag{1.5}$$

où Θ_0 est le bas du spectre d'un opérateur modèle qui sera introduit en (3.8).

– *Si le champ extérieur est assez proche du champ critique, c'est à dire vérifie :*

$$\frac{\kappa}{\Theta_0} + o(1) < \sigma < H_{C_3}(\kappa)\,, \tag{1.6}$$

alors la supraconductivité apparaît à la surface de l'échantillon. Plus précisément, il existe C, $\alpha > 0$ et κ_0 tels que le paramètre d'ordre $\psi_{\kappa,\sigma}$ (correspondant à une paire minimisante $(\psi_{\kappa,\sigma}, A_{\kappa,\sigma})$ de $\mathcal{G}$) vérifie, pour $x \in \Omega$ et $\kappa \geq \kappa_0$:

$$|\psi_{\kappa,\sigma}(x)| \leq C \exp -\alpha\kappa d(x, \partial\Omega) ||\psi_{\kappa,\sigma}||_{L^\infty(\Omega)}\,. \tag{1.7}$$

La conclusion de la deuxième partie du théorème correspond à une forme mathématiquement précisée de ce qui est appelée la nucléation de surface. Le mot surface peut surprendre mais il faut se souvenir qu'à l'origine le problème physique est posé en dimension 3.

Cependant, l'information donnée ne fournit pas la localisation optimale pour la nucléation de surface. Si on désigne par $\kappa_r(x)$ la courbure de $\partial\Omega$, cette localisation apparaît près des points de courbure maximale du bord lorsque l'écart δ défini par :

$$\delta(\kappa, \sigma) \ := H_{C_3}(\kappa) - \sigma \ ,$$

est petit. Cette idée, justifiée par des calculs formels dans Bernoff-Sternberg [BeSt], se précise progressivement grâce aux travaux de Lu-Pan [LuPa1], Del Pino-Fellmer-Sternberg, et est complètement démontrée par la conjonction de ces travaux et des travaux plus récents de Helffer-Morame [HeMor1] et de Helffer-Pan [HePa].
Par ailleurs, il apparaît que cette localisation dépend très sensiblement de l'écart. Il est démontré par Lu-Pan dans [LuPa1] (Théorème 1.5) que, lorsque $\delta\kappa^{-\frac{1}{3}}$ devient grand, on a effectivement une localisation uniforme dans le bord.

Pour les estimations les plus fines, il est efficace d'utiliser des coordonnées adaptées au voisinage du bord. On a un difféomorphisme global $(s,t) \mapsto x$ de $S^1(\ell) \times [0, \delta_0[$ sur un voisinage du bord

$$\Omega(\delta_0) := \{x \in \overline{\Omega} \mid d(x, \partial\Omega) < \delta_0\} \ .$$

Ici ℓ est la longueur du bord et $S^1(\ell)$ est le cercle de périmètre ℓ que l'on paramètre par s, la variable t mesurant la distance au bord.
On notera $x \mapsto (s(x), t(x))$ le difféomorphisme inverse. Ces coordonnées sont choisies de sorte que s est l'abcisse curviligne (on fait éventuellement le choix d'une origine) et t mesure la distance au bord.
Les principaux résultats démontrés dans [HePa] sont les suivants. Le premier donne une asymptotique plus fine, si on compare avec (1.5), de $H_{C_3}(\kappa)$.

Théorème 1.2 *Asymptotique de H_{C_3}.*
Il existe une constante universelle $C_1 > 0$ telle que, pour κ grand, on ait

$$H_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Theta_0} + \frac{C_1}{\Theta_0^{3/2}} c_{max} + O(\kappa^{-\frac{1}{3}}) \ , \tag{1.8}$$

où $c_{max} = \max_{x\in\partial\Omega} c(x)$.

Le deuxième résultat indique que lorsque δ croit à partir de 0, la supraconductivité apparait d'abord aux points du bord de courbure maximale. On peut en fait quantifier cette apparition de la supraconductivité sous la forme suivante. On se contente compte-tenu du premier théorème (cf (1.7)) de travailler dans un voisinage tubulaire $\Omega(\delta_0)$ avec $\delta_0 > 0$ assez petit. On note $c_{min} = \min_{x\in\partial\Omega} c(x)$ et on a :

Théorème 1.3 Localisation de la nucléation.
Soit

$$\rho := \frac{1}{C_1} \Theta_0^{\frac{3}{2}} (H_{C_3}(\kappa) - \sigma) \ .$$

1.
Il existe L, C, κ_0, α_0 tels que, pour ρ satisfaisant

$$0 \leq \rho \leq L\kappa^{-\frac{1}{3}} \ ,$$

le paramètre d'ordre $\psi = \psi_{\kappa,\sigma}$ vérifie, pour $\kappa \geq \kappa_0$,

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega(\delta_0)} \exp\left(\alpha_0 \sqrt{\kappa}(c_{max} - c(s(x))\right) |\psi|^2\, dx \\ &\quad \leq C \exp(C\kappa^{\frac{1}{6}}) \|\psi\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{1.9}$$

2.
Il existe L, C, κ_0, α_0 tels que, pour ρ satisfaisant

$$L\kappa^{-\frac{1}{3}} \leq \rho \leq (c_{max} - c_{min})\ ,$$

alors on a, pour $\kappa \geq \kappa_0$:

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega(\delta_0)} \exp\left(\alpha_0 \sqrt{\kappa}(c_{max} - \rho - c(s(x))\,)_+^{\frac{3}{2}}\right) |\psi|^2\, dx \\ &\quad \leq C\kappa^{\frac{1}{3}} \|\psi\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Notons que cette mesure de la décroissance n'est pas optimale (il faudrait parler de distance d'Agmon) mais qu'elle donne une mesure de la localisation bien plus précise que dans les travaux initiaux de Lu-Pan [LuPa4] et Del Pino-Felmer-Sternberg [PiFeSt]. Ces théorèmes sont reliés à l'étude de la réalisation de Neumann d'opérateurs du type $-(\nabla - i\mathcal{A})^2$. On observe d'abord des connexions étroites entre la champ critique $H_{C_3}(\kappa)$ et la plus petite valeur propre $\mu^{(1)}(\mathcal{A})$ de cette réalisation. On a tout d'abord le lemme immédiat suivant :

Lemme 1.4 .
- *Si $\mu^{(1)}(\kappa\sigma\mathbf{F}) < \kappa^2$, alors $\mathcal{G}$ a un minimiseur non trivial.*
- *Si $\mathcal{G}$ a un minimiseur non trivial $(\psi_{\kappa,\sigma}, \mathcal{A}_{\kappa,\sigma})$ alors $\mu^{(1)}(\kappa\mathcal{A}_{\kappa,\sigma}) < \kappa^2$.*

L'autre observation importante est que $\psi_{\kappa,\sigma}$ est, d'après la première équation de Ginzburg-Landau, une solution de :

$$-(h\nabla - i\frac{\mathcal{A}_{\kappa,\sigma}}{\sigma})^2\psi_{\kappa,\sigma} + V_{\kappa,\sigma}\psi_{\kappa,\sigma} - \frac{1}{\sigma^2}\psi_{\kappa,\sigma} = 0\ , \tag{1.11}$$

où on a posé

$$h = 1/(\kappa \cdot \sigma)\ ,\ V_{\kappa,\sigma} = \sigma^{-2}|\psi_{\kappa,\sigma}|^2\ .$$

Si on montre a priori que $\frac{\mathcal{A}}{\sigma}$ est proche de F et que $\psi_{\kappa,\sigma}$ est petit en norme L^∞ dans les régimes asymptotiques considérés (propriétés essentiellement démontrées dans [LuPa4] et améliorées dans [HePa]), il n'est pas trop étonnant d'imaginer qu'on pourra adapter l'étude qui sera faite au paragraphe suivant de la décroissance de l'état fondamental pour l'opérateur linéaire : $-(h\nabla - i\mathbf{F})^2$ quand $h \to 0$.

2 Le problème de théorie spectrale

Nous voulons discuter maintenant le spectre de réalisations autoadjointes de l'opérateur de Schrödinger dans un ouvert Ω de $I\!R^2$:

$$P_{h,A,\Omega} = (h\, D_{x_1} - A_1)^2 + (h\, D_{x_2} - A_2)^2\ ,$$

où $h > 0$ est un petit paramètre.
Comme on l'a vu au paragraphe précédent, une des motivations vient de la supraconductivité mais la motivation initiale était plutôt purement semi-classique (h étant la constante de Planck). Si on peut renvoyer à Kato ou, à la fin des années 70 à Avron-Herbst-Simon [AHS] ou à Combes-Schrader-Seiler [CSS] pour des études mathématiques du problème, l'implémentation des techniques semi-classiques pour l'étude du niveau fondamental apparait d'abord dans [HeSj4] puis dans [HeMo]. Schématiquement, il est montré dans [HeMo] que, si $\Omega = I\!\!R^2$, le potentiel $h|B(x)|$ joue le rôle d'un potentiel électrique effectif. Nous voulons dire par là que l'analyse de l'opérateur : $-h^2\Delta + h|B(x)|$, peut donner une bonne indication pour la localisation de l'état fondamental. Les spécialistes en EDP reconnaîtront que le problème est étroitement relié aux inégalités de Garding-Melin-Hörmander (cf [Mel], [HeRo]) pour l'opérateur :

$$P_{1,AD_t} = (\, D_{x_1} - A_1 D_t)^2 + (\, D_{x_2} - A_2 D_t)^2 \;,$$

dans $\Omega \times I\!\!R$.
Le cas avec bord n'a été à notre connaissance étudié que tout récemment. Bien sûr, le cas de la réalisation de Dirichlet ne conduit pas à une étude vraiment différente du cas $\Omega = I\!\!R^2$, tout au moins si la condition

$$b < b' \;, \tag{2.1}$$

est satisfaite, où nous avons utilisé les notations :

$$\inf_{x \in \overline{\Omega}} |B(x)| = b \;,\; \inf_{x \in \partial\Omega} |B(x)| = b' \;. \tag{2.2}$$

En travail préliminaire, on obtient donc assez aisément le :

Théorème 2.1 .
Sous la condition (2.1), la plus petite valeur propre $\lambda^{(1)}(h)$ de la réalisation de Dirichlet de $P^D_{h,A,\Omega}$ of $P_{h,A,\Omega}$ vérifie :

$$\frac{\lambda^{(1)}(h)}{h} = b + o(1) \;. \tag{2.3}$$

Les points où les minima de $|B|$ sont atteints sont appelés les puits magnétiques. La décroissance de l'état fondamental en dehors des puits est mesurée (cf [Br], [HeNo2]) en fonction de la distance d'Agmon associée à la métrique (dégénérée) $(|B| - b)dx^2$.
Nous rappelons que cette estimation est facile à démontrer en dimension 2 dans le cas où le champ magnétique est de signe constant si l'on observe l'inégalité :

$$\pm h \int B(x)|u(x)|^2 \leq \langle P_{h,A} u \mid u \rangle \;,\; \forall u \in C_0^\infty(\Omega) \;. \tag{2.4}$$

Ici $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et $|| \cdot ||$ la norme correspondante. Lorsque B n'est pas de signe constant, on peut obtenir une estimation du même type, mais avec un reste en $\mathcal{O}(h^{\frac{5}{4}})||u||^2$ (cf [HeMo], Théorème 3.1). Le cas plus délicat de la dimension 3 est aussi traité.

Comme dans le cas où $B = 0$ mais où on a un potentiel électrique V, il est possible de discuter différentes asymptotiques en fonction des propriétés de B près du minimum (cf [HeMo, Mon, Sh, Ue1, Ue2] ou tout récemment [KwPa]).

Comme on le verra plus tard, cette propriété n'est plus vraie dans le cas du problème de Neumann. L'infimum de $|B(x)|$ sur $\bar{\Omega}$ ne permet plus d'analyser le bas du spectre même lorsque (2.1) est vérifiée. Certes par comparaison entre Neumann et Dirichlet, on sait que la plus petite valeur propre $\mu^{(1)}(h)$ de la réalisation de Neumann $P^N_{h,A,\Omega}$ de $P_{h,A,\Omega}$ est majorée par $\lambda^{(1)}(h)$ (mais la minoration n'est plus correcte en général.

Le principal théorème que nous voudrions présenter est

Théorème 2.2 .
Si le champ magnétique est constant et non nul. Alors tout état fondamental normalisé de la réalisation de Neumann de $P_{h,A,\Omega}$ est localisé exponentiellement lorsque $h \to 0$ dans un voisinage des points de la frontière où la courbure est maximale.

Avant d'esquisser la démonstration de ce théorème, il est utile d'analyser quelques problèmes de référence.

3 Modèles à champ magnétique constant.

3.1 Préliminaires.

Considérons dans un domaine régulier Ω de $\mathbb{R}^2$ la réalisation de Neumann (ou de Dirichlet) de l'opérateur $P_{h,bA_0,\Omega}$ avec

$$A_0(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}x_2, -\frac{1}{2}x_1) . \tag{3.1}$$

Notons que, par réalisation de Neumann, on entend qu'on prend comme condition au bord :

$$\nu \cdot (h\nabla - ibA_0)u = 0 \text{ on } \partial\Omega , \tag{3.2}$$

et que c'est la condition naturelle rencontrée dans le problème de supraconductivité (comparer avec la troisième ligne de (1.2)). On supposera $b > 0$ et on a bien sûr une homogénéité dans le problème qui conduit à :

$$P_{h,bA_0} = h^2 P_{1,bA_0/h} . \tag{3.3}$$

Par conséquent l'analyse semi-classique (à b fixé) est analogue à l'étude champ magnétique intense (à h fixé), si le domaine est invariant par dilatation. On désigne par $\mu^{(1)}(h, b, \Omega)$ et par $\lambda^{(1)}(h, b, \Omega)$ les bornes inférieures des spectres des réalisations de Neumann ou de Dirichlet de P_{h,bA_0} dans Ω. En fonction de Ω, cela peut correspondre à une valeur propre (si Ω est bornée) ou à un point du spectre essentiel (par exemple si $\Omega = \mathbb{R}^2$ ou si $\Omega = \mathbb{R}^2_+$). Ce sont ces deux cas, qui, avec le cas du disque, vont attirer notre attention maintenant.

3.2 Le cas de $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Rappelons tout d'abord que :

$$\mu^{(1)}(h, b, \mathbb{R}^2) = \lambda^{(1)}(h, b, \mathbb{R}^2) = hb\ . \tag{3.4}$$

b est une valeur propre de multiplicité infinie.

Notons que dans le cas de Dirichlet, nous avons par monotonie la borne inférieure :

$$\lambda^{(1)}(h, b, \Omega) \geq \lambda^{(1)}(h, b, \mathbb{R}^2) = hb\ . \tag{3.5}$$

Une telle minoration est fausse dans le cas de Neumann et cela rend le problème plus intéressant.

3.3 Le cas de $\Omega = \mathbb{R}^2_+$

L'analyse dans $\mathbb{R}^2_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 > 0\}$ est moins connue et jouera un rôle important dans notre discussion.
Observons que, par construction de quasimodes et par (3.5) :

$$\lambda^{(1)}(h, b, \mathbb{R}^2_+) = hb\lambda^{(1)}(1, 1, \mathbb{R}^2_+) = hb\ . \tag{3.6}$$

Considérons maintenant le cas de Neumann (et en parallèle le cas de Dirichlet). Après quelques transformations élémentaires, il suffit d'analyser l'opérateur :

$$\widetilde{S} = D^2_{x_2} + (D_{x_1} - x_2)^2\ , \tag{3.7}$$

avec conditions de Dirichlet ou Neumann. Notons qu'on a maintenant la conditionde Neumann standard sur $x_2 = 0$.
Pour faire l'analyse spectrale de cet opérateur , on peut alors faire une transformation de Fourier partielle :

$$\widehat{S}(t, \sigma, D_t) = D^2_t + (\sigma - t)^2 \tag{3.8}$$

considéré comme un opérateur sur $\mathbb{R}^2_+ = \{(t, \sigma) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$ avec conditions de Dirichlet ou de Neumann sur $t = 0$.
L'analyse spectrale est alors réduite à celle de la famille (paramétrée par σ) d'opérateurs différentiels $\widehat{S}(t, \sigma, D_t)$ considérés maintenant comme opérateurs sur $\mathbb{R}^+$ avec conditions de Dirichlet ou de Neumann en $t = 0$, et notés respectivement $H^{D,\sigma}$ et $H^{N,\sigma}$. Le spectre de Dirichlet de P_{1,A_0} est alors obtenu comme

$$\mathrm{Sp}\,(P^D_{1,A_0}) = \{\lambda \in \mathbb{R}^+ | \exists \sigma \in \mathbb{R} \text{ s. t. } \lambda \in \mathrm{Sp}\,(H^{D,\sigma})\}\ , \tag{3.9}$$

et de même pour Neumann. Les valeurs propres de $H^{D,\sigma}$ et $H^{N,\sigma}$ sont localement décrites par des fonctions analytiques par rapport à σ non constantes. On obtient donc un spectre continu (cf Reed-Simon, Vol. IV [ReSi]). L'analyse du bas du spectre est la conséquence immédiate de celle de la plus petite valeur propre de $H^{D,\sigma}$ ou $H^{N,\sigma}$ comme fonction de σ.

Ici la réponse est très différente selon que l'on regarde Dirichlet ou Neumann. Pour Dirichlet, la plus petite valeur propre $\hat{\lambda}^{(1)}(\sigma)$ est monotone décroissante de $+\infty$ vers 1 lorsque σ va de $-\infty$ à $+\infty$.
Pour Neumann, la plus petite valeur propre $\hat{\mu}^{(1)}(\sigma)$ est monotone décroissante de $+\infty$ à 1 lorsque σ croit de $-\infty$ à 0. On peut alors monter [DaHe] qu'il existe un unique $\sigma_0 > 0$ $\hat{\mu}^{(1)}(\sigma)$ décroit jusqu'à cette valeur

$$\Theta_0 := \hat{\mu}^{(1)}(\sigma_0) < 1 \tag{3.10}$$

puis recroit vers 1 lorsque $\sigma \to +\infty$. De plus ce minimum est non dégénéré.

On obtient alors :

Proposition 3.1 .
Le spectre de Dirichlet dans $I\!R^2_+$ est donné par :

$$\mathrm{Sp}\,(P^D_{h,bA_0,I\!R^2_+}) = [bh, +\infty[\ . \tag{3.11}$$

Le spectre de Neumann dans $I\!R^2_+$ est donné par :

$$\mathrm{Sp}\,(P^N_{h,bA_0,I\!R^2_+}) = [b\Theta_0 h, +\infty[\ , \tag{3.12}$$

avec

$$0 < \Theta_0 < 1\ . \tag{3.13}$$

Cette propriété que le bas du spectre de l'opérateur de Neumann est strictement inférieur au bas du spectre de l'opérateur de Dirichlet va jouer un rôle fondamental dans la discussion.

Notons que le cas du domaine $\Omega = I\!R_+ \times I\!R_+$ a récemment été analysé dans [Ja] et [Pan].

3.4 Le cas du disque.

Le cas de Dirichlet a été considéré par L. Erdös en liaison avec l'inégalité isopérimétrique [Er]. En utilisant des techniques de [BoHe], on montre dans [HeMor1] la proposition suivante qui est une légère amélioration du résultat de L. Erdös.

Proposition 3.2 .
Lorsque $R\sqrt{b}$ large, on a l'asymptotique :

$$\lambda^{(1)}(b, D(0,R)) - b \sim 2^{\frac{3}{2}}\pi^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}R\exp(-\frac{bR^2}{2})\ . \tag{3.14}$$

Le cas de Neumann est traité dans l'article de Baumann-Phillips-Tang [BaPhTa] (Theorem 6.1, p. 24) (cf aussi [PiFeSt]) qui démontrent la

Proposition 3.3

$$\mu^{(1)}(b, D(0,R)) = \Theta_0 b - 2M_3\,\frac{1}{R}\,b^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(1)\ . \tag{3.15}$$

Ici nous rappelons que Θ_0 est introduit en (3.10) et que $M_3 > 0$ est une constante universelle.

Un autre cas intéressant est le cas de l'extérieur du disque. On observe d'abord que le bas du spectre essentiel est égal à b et on peut alors montrer que, lorsque b est grand, il existe au moins une valeur propre en dessous de b. On montre dans [HeMor1] que la formule ci-dessus pour la plus petite valeur propre reste valable en remplaçant $\frac{1}{R}$ par $-\frac{1}{R}$. C'est donc bien la courbure qui apparaît pour tous ces modèles.

4 Principaux résultats semi-classiques.

Dans le cas d'un ouvert borné régulier, le premier résultat est initialement du à Lu-Pan [LuPa2] (pour le terme principal), amélioré dans [HeMor1] et concerne des champs magnétiques généraux :

Théorème 4.1 .

$$\frac{\mu^{(1)}(h)}{h} = \min(\Theta_0 b'\ ,\ b) + \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}})\ . \tag{4.1}$$

Ce théorème met en évidence deux situations selon que $b < \Theta_0 b'$ ou $b > \Theta_0 b'$. Dans le premier cas, la condition aux limites est sans importance pour déterminer les premiers termes de l'asymptotique du niveau fondamental. Si on fait l'hypothèse additionnelle que $B(x)$ admet un unique minimum en un point z_0 de Ω, qui de plus est dégénéré, pour un $z_0 \in \Omega$, alors en posant :

$$a = \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Hess}\, B(z_0)\right)^{1/2}\ , \tag{4.2}$$

il est démontré dans [HeMor1] le théorème suivant qui complète des résultats de [Mon] et [HeMo].

Théorème 4.2 .
Si A est C^∞, alors il existe $C > 0$ tel que

$$-C\,h^{19/8} \leq \inf\ \mathrm{Sp}\,(P_{h,A,\Omega})\ -\ [b + \frac{a^2}{2b}h]h \leq C\,h^{5/2}\ . \tag{4.3}$$

La démonstration s'appuie, pour la majoration, sur des constructions de quasimodes et, pour la minoration, sur techniques voisines de celles de Melin. Au bout du compte, on s'appuie sur la bonne connaissance du spectre d'un oscillateur harmonique magnétique donnée par exemple dans [Mat]. Notons aussi qu' il est établi dans [HeMo] (cf antérieurement [Br] et [HeNo2]) que l'état fondamental décroit exponentiellement en dehors des voisinages des points où $B(x) = b$.

Considérons maintenant le deuxième cas. Le premier résultat déjà observé chez [PiFeSt] est le suivant.

Théorème 4.3 *Localisation dans le bord.*
Supposons que la condition :
$$\Theta_0 b' < b\ , \tag{4.4}$$
soit satisfaite. Alors il existe $C > 0$, $\alpha > 0$ et $\nu \in I\!R$, tels que, si u_h est un état fondamental de $P^N_{A,h,\Omega}$, alors :
$$\exp \alpha \frac{d(x,\partial\Omega)}{h^{\frac{1}{2}}} |u_h(x)| \leq C\ h^{-\nu} ||u_h||_{L^2}\ ,\ \forall x \in \Omega\ . \tag{4.5}$$
Notons que la condition (4.4) est toujours satisfaite quand B est constant car $b = b'$ et $\Theta_0 < 1$.

Le prochain résultat décrit la localisation à l'intérieur du bord .

Théorème 4.4 .
Soit
$$p(\partial\Omega) = \{\omega \in \partial\Omega \mid B(\omega) = b'\}\ . \tag{4.6}$$
Supposons que : $\Theta_0 b' < b$. Alors, il existe $\alpha_1 > 0$ et, pour tout $\epsilon > 0$, des constantes $C(\epsilon)$ et $h_0(\epsilon)$ telles que une fonction propre normalisée vérifie :
$$|| \exp \frac{\alpha_1 \tilde{d}(z, p(\partial\Omega))}{h^{\frac{1}{2}}} u_h|| \leq C(\epsilon) \exp \frac{\epsilon}{h^{\frac{1}{2}}}\ , \tag{4.7}$$
pour tout $h \in]0, h_0(\epsilon)]$. Ici la "distance" $\tilde{d}$ est définie par :
$$\tilde{d}(z, p(\partial\Omega)) = d(z, \partial\Omega) + \chi(d(z,\partial\Omega)) d_{\partial\Omega}(s(z))\ , \tag{4.8}$$
où $d_{\partial\Omega}$ est la distance d'Agmon associée dans le bord à la métrique $(B(s,0) - b')ds^2$.

Le prochain théorème est conjecturé par Bernoff-Sternberg [BeSt] (voir aussi [LuPa3] et [PiFeSt]) et est obtenu sous sa forme complète dans notre travail récent avec A. Morame [HeMor1]

Théorème 4.5 .
Si le champ magnétique est constant > 0, nous avons :
$$\mu^{(1)}(h) \sim \Theta_0 h - 2c_{max} M_3 h^{\frac{3}{2}} + 0(h^{\frac{5}{3}})\ . \tag{4.9}$$
où M_3 est la constante universelle apparaissant dans le cas du disque.

La preuve de la majoration est basée sur la construction de quasimodes et remonte (au moins formellement) à Bernoff-Sternberg [BeSt]. Des restes sont proposés dans [LuPa1] et [PiFeSt]. Le meilleur reste pour la majoration dans le cas général est proposé dans [HeMor1] (estimation en $\mathcal{O}(h^{\frac{7}{4}})$. Dans les coordonnées adaptées, on utilise des fonctions de la forme :
$$u := \phi(h^{-\frac{1}{2}} t) \exp -\gamma h^{-\frac{1}{4}} s^2\ \cdot\ \exp i h^{-1} [\Phi_0(s,t) + h^{\frac{1}{2}} \Phi_1(s,t)] \tag{4.10}$$
Le résultat est bien sûr cohérent avec le résultat mentionné pour le disque et discuté en (3.15). La minoration s'appuie sur des partitions de l'unité fines ([HeMor1]) et sera discutée au prochain paragraphe.

Le cas du champ magnétique constant (localisation de l'état fondamental) est complété par le théorème 2.2.

5 Partitions de l'unité et estimations d'Agmon

5.1 Préliminaires

Nous donnons dans ce paragraphe quelques éléments de la preuve des résultats énoncés au paragraphe précédent. Nous ne nous attarderons pas sur la construction des quasi-modes et donnons des indications sur la minoration de la plus petite valeur propre et sur la localisation de l'état fondamental. La minoration repose sur une technique de localisation et la comparaison avec des modèles que nous décrirons dans un paragraphe à part. La localisation s'appuie essentiellement sur la technique des inégalités d'Agmon. Dans le cadre semi-classique, cette technique fut principalement développée par Helffer-Sjöstrand [HeSj1], [HeSj4] mais l'inspiration vint d'autres résultats dus en particulier à : Lithner, Agmon [Ag], Simon [Si] et des résultats microlocaux de Sjöstrand (microhyperbolicité). L'extension dans le cas avec champ magnétique est présentée dans [Br], [HeSj4], [HeNo2], [HeMo].

Si dans le cas du problème de Dirichlet, l'inégalité (2.4) était le point de départ de l'analyse de la décroissance, ce n'est plus possible pour le problème de Neumann. On peut toutefois garder une partie de la stratégie suivie dans [HeMo]. Nous supposerons toujours que $B(x) > 0$ dans $\overline{\Omega}$.

5.2 Localisation par des partitions de l'unité

Soit $0 \leq \rho \leq 1$. Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\epsilon_0 > 0$ et tout $h > 0$, on puisse trouver une partition de l'unité χ_j^h vérifiant dans Ω,

$$\sum_j |\chi_j^h|^2 = 1 \,, \tag{5.1}$$

$$\sum_j |\nabla \chi_j^h|^2 \leq C\, \epsilon_0^{-2}\, h^{-2\rho} \,, \tag{5.2}$$

et

$$\mathrm{supp}(\chi_j^h) \subset Q_j = B(z_j, \epsilon_0\, h^\rho) \,, \tag{5.3}$$

où $B(c, r)$ désigne la boule dans $I\!R^2$ de centre c et de rayon r. En outre :

$$\text{ou bien } \ \mathrm{supp}\, \chi_j^h \cap \partial\Omega = \emptyset \,, \ \text{ ou bien } z_j \in \partial\Omega \,. \tag{5.4}$$

En fonction de ces deux cas, on peut décomposer la somme dans (5.1) sous la forme :

$$\sum = \sum_{int} + \sum_{bd} \,,$$

où "int" (resp. "bd ") réfère aux j tels que $z_j \in \Omega$ (resp. tels que $z_j \in \partial\Omega$) .
Le second point est d'implémenter cette partition dans l'expression de l'énergie :

$$q_h^N(u) = \sum_j q_h(\chi_j^h u) - h^2 \sum_j ||\, |\nabla \chi_j^h|\, u\, ||^2 \,,\ \forall u \in H^1(\Omega) \,. \tag{5.5}$$

Ici q_h^N (ou $q_{h,A}^N$) désigne la forme quadratique :

$$q_{h,A}^N(u) = \int_\Omega |h\nabla u - iAu|^2 \, dx \; . \tag{5.6}$$

5.3 Minoration

Selon les boules, on va utiliser l'estimation pour (et la comparaison avec) les modèles dans $I\!R^2$ ou $I\!R^2_+$. On voit apparaître deux types d'erreur. Celles liées à l'approximation (d'autant meilleures qu'on est très localisé) et celles dues à la localisation (d'autant meilleures qu'on est peu localisé). Par exemple, on a :

$$h^2 \sum_j || \, |\nabla \chi_j^h| \, u \, ||^2 \leq C \, h^{2-2\rho} \, \epsilon_0^{-2} \, ||u||^2 \; . \tag{5.7}$$

Ceci mesure le prix à payer lorsqu'on localise dans des petites boules. En particulier, on perd trop si $\rho > \frac{1}{2}$. On peut maintenant utiliser le résultat concernant le demi-plan pour obtenir :

$$q_{h,A}(\chi_j^h u) \geq (1 - Ch^{2\theta} - C\epsilon_0 h^\rho) h\Theta_0 \int B(z_j) |\chi_j^h u|^2 \, dx - C \, h^{4\rho - 2\theta} ||\chi_j^h u||^2 \; . \tag{5.8}$$

En recollant les estimations et en optimisant les choix de ρ, θ et ϵ_0, on obtient, avec $\rho = \frac{3}{8}$, $\theta = \frac{1}{8}$, $\epsilon_0 = 1$:

$$q_{h,A}(u) \geq \left(\min(b, \Theta_0 b') h - C h^{\frac{5}{4}} \right) ||u||^2 \; . \tag{5.9}$$

Ce résultat n'est pas optimal. Il est en fait montré dans [HeMor1], en estimant mieux les restes dans le cas où u est l'état fondamental, un reste en $\mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}})$, pour $\mu^{(1)}(h)$.

5.4 Décroissance par rapport à la distance au bord.

Pour le contrôle de la décroissance en dehors de $\partial\Omega$, il est plus avisé de prendre $\rho = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{1}{8}$ et ϵ_0 grand. On obtient, en utilisant (2.4) quand c'est possible, la proposition :

Proposition 5.1 .
Il existe C et h_0 tels que, pour tout $\epsilon_0 > 0$, il existe $C(\epsilon_0)$ tel que, pour $h \in]0, h_0]$, on ait l'inégalité :

$$\begin{array}{rl} q_{h,A}(u) & \geq h \sum_{int} \int B(x) |\chi_j^h u|^2 dx \\ & \quad - C(\epsilon_0) h \sum_{bnd} \int |\chi_j^h u|^2 \, dx \\ & \quad - \frac{Ch}{\epsilon_0^2} \sum_{int} \int |\chi_j^h u|^2 dx \; . \end{array} \tag{5.10}$$

pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

Rappelons maintenant l'identité à la base des inégalités d'Agmon. Si Φ est réelle, Lipschitzienne et si u est dans le domaine de la réalisation de Neumann de $P_{h,A}$, on a (par une simple intégration par parties) :

$$
\begin{array}{ll}
\text{Re } \langle P_{h,A}u, \exp \frac{2\Phi}{h^{\frac{1}{2}}} u\rangle \\
= \text{ Re } \langle (\frac{h}{i}\nabla - A)u, (\frac{h}{i}\nabla - A) \exp \frac{2\Phi}{h^{\frac{1}{2}}} u\rangle \\
= \langle (\frac{h}{i}\nabla - A) \exp \frac{\Phi}{h^{\frac{1}{2}}} u, (\frac{h}{i}\nabla - A) \exp \frac{\Phi}{h^{\frac{1}{2}}} u\rangle - h|||\nabla\Phi| \exp \frac{\Phi}{h^{\frac{1}{2}}} u||^2 \\
= q_h[A](\exp \frac{\Phi}{h^{\frac{1}{2}}} u) - h|||\nabla\Phi| \exp \frac{\Phi}{h^{\frac{1}{2}}} u||^2 \ .
\end{array}
\tag{5.11}
$$

Si on applique cette inégalité avec $u = u_h$ un vecteur propre associé à la plus petite valeur propre $\mu^{(1)}(h)$, on obtient :

$$
\mu^{(1)}(h)|| \exp \frac{\Phi}{h^{\frac{1}{2}}} u||^2 = q_{h,A}(\exp \frac{\Phi}{h^{\frac{1}{2}}} u) - h|||\nabla\Phi| \exp \frac{\Phi}{h^{\frac{1}{2}}} u||^2 \ . \tag{5.12}
$$

Il ne reste plus qu'à réimplémenter l'inégalité précédente dans cette dernière conjuguée à une majoration relativement faible de $\mu^{(1)}(h)$ (obtenue préalablement par construction de quasimodes). La méthode marche (sans chercher l'optimalité) en prenant $\Phi(x) = \alpha \max(d(x, \partial\Omega), h^{\frac{1}{2}})$, où $\alpha > 0$ assez petit et ϵ_0 est choisi assez grand. On obtient en effet un contrôle de $\sum_{int} \int |\exp \frac{\Phi}{h^{\frac{1}{2}}} \chi_j^h u|^2 dx$ par $C \ \sum_{bnd} \int |\exp \frac{\Phi}{h^{\frac{1}{2}}} \chi_j^h u|^2 \, dx$, et cette dernière quantité est majorée par la quantité $C \ \int_{d(x,\Omega) \leq C\sqrt{h}} |u_h|^2 dx$.

5.5 Décroissance dans le bord due à la variation du champ.

Nous nous contentons ici d'indiquer quelques éléments de la démonstration. Nous supposons toujours que $\theta_0 b' < b$ et faisons l'hypothèse assez générique que la restriction de B à $\partial\Omega$ n'a que des minima non dégénérés. L'étude précédente (cf (5.8)) avec le choix de $\rho = \frac{3}{8}$ et $\theta = \frac{1}{8}$.

$$
\begin{array}{ll}
q^N_{h,A}(u) & \geq h \sum_{int} \int B(x)|\chi_j^h u|^2 dx \\
& \quad +(1 - Ch^{\frac{1}{4}})h\Theta_0 \sum_{bnd} \int B(z_j)|\chi_j^h u|^2 \, dx \\
& \quad -C\, h^{\frac{5}{4}} \sum_{bnd} ||\chi_j^h u||^2 \\
& \quad -Ch^{\frac{5}{4}} \sum_{int} ||\chi_j^h u||^2 \ .
\end{array}
\tag{5.13}
$$

Appliquée à $u = \exp \frac{\Phi_h}{h^{\frac{1}{2}}} u_h$, cette inégalité donne :

$$
\begin{array}{ll}
0 & \geq h \sum_{int} \int \left(B(x) - \Theta_0 b' - Ch^{\frac{1}{4}} - |\nabla\Phi|^2 \right) \ |\chi_j^h \exp \frac{\Phi_h}{h^{\frac{1}{2}}} u|^2 dx \\
& \quad +(1 - Ch^{\frac{1}{4}})h\Theta_0 \sum_{bnd} \int \left(B(x) - b' - C\, h^{\frac{1}{4}} - |\nabla\Phi|^2 \right) \ |\chi_j^h \exp \frac{\Phi_h}{h^{\frac{1}{2}}} \, u|^2 \, dx \ .
\end{array}
\tag{5.14}
$$

Avec le choix de $\Phi = \chi(t)\phi(s)$, où $\phi = \alpha_1 \, d_{\partial\Omega}$, α_1 est suffisamment petit et $\chi(t)$ localise près de la frontière, nous obtenons :

$$
0 \geq \sum_{bnd} \int (B(s,0) - b' - Ch^{\frac{1}{4}} - C|\phi'(s)|^2)|\chi_j^h \exp \frac{\Phi}{h^{\frac{1}{2}}} \, u_h|^2 \, dx \ . \tag{5.15}
$$

Cela conduit à l'existence, pour tout $\epsilon > 0$, de $C_\epsilon > 0$ telle que :

$$\int_{d(x,\partial\Omega)\leq C\, h^{\frac{3}{8}}} |\exp \frac{\Phi}{h^{\frac{1}{2}}}\, u_h|^2\, dx \leq C_\epsilon \exp \frac{\epsilon}{h^{\frac{1}{2}}} ||u_h||^2_{L^2}\ . \tag{5.16}$$

Ceci termine pour l'essentiel la démonstration du théorème 4.4.

5.6 Décroissance au bord due aux effets de courbure

Bien sûr, ces estimations sont insuffisantes pour traiter les théorèmes 4.4 et 4.5 lorsque $B =$ const. > 0. Il ne suffit plus d'approcher par le modèle dans $I\!R^2_+$. Dans le cas convexe, l'approche par le modèle du disque est meilleure. Dans le cas général, on doit travailler au voisinage du bord dans les coordonnées spéciales, où l'opérateur prend la forme :

$$(hD_x - A)^2 = a^{-1}[(hD_s - \widetilde{A}_1)a^{-1}(hD_s - \widetilde{A}_1) + (hD_t - \widetilde{A}_2)a(hD_t - \widetilde{A}_2)], \tag{5.17}$$

où $a(w) = 1 - tc(s)$, $c(s)$ désigne la courbure et le nouveau potentiel magnétique $\widetilde{A}$ vérifie

$$\widetilde{A}_1\, ds + \widetilde{A}_2\, dt = A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2\ .$$

De plus, après changement de jauge, on peut supposer que $\widetilde{A}_1 = 0$ dans un voisinage de $\partial\Omega$.

Après analyse semi-classique, il apparait un potentiel électrique qui crée la localisation dans le bord et qui est essentiellement $-h^{\frac{3}{2}}c(s)$. Dans le même esprit que précédemment, on montre alors une décroissance en $\exp -\frac{\psi}{h^{\frac{1}{4}}}$ où ψ est définie sur $\partial\Omega$ et lié à la métrique d'Agmon sur le bord $(c_{max} - c(s))ds^2$. Ceci nécessite en particulier une étude fine avec des contrôles des restes en $o(h^{\frac{3}{2}})$, travaille établi en [HeMor1].

6 Résultats récents en dimension 3

Le cas de la dimension 3 n'a été abordé que très récemment par [LuPa5] qui ont établi les résultats présentés ici. La démonstration s'appuie sur une longue étude de modèles dont nous montrerons dans [HeMor2] qu'elle peut être simplifiée. Nous en esquissons quelques éléments ici. L'étude commence comme pour la dimension 2 par l'étude de modèles. Moyennant une partition de l'unité, on imagine bien qu'on va utiliser un modèle pour les boules intérieures qui est l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant dans $I\!R^3$ et une famille de modèles correspondant aux boules rencontrant le bord.
Si on considère le modèle à champ magnétique constant :

$$P(h,\vec{b}) := h^2 D^2_{x_1} + (hD_{x_2} - B_3x_1)^2 + (hD_{x_3} - B_2x_1 - B_1x_2)^2\ ,$$

il est bien connu que dans $I\!R^3$, le spectre est donné par $[\beta, +\infty[$ où

$$\beta = \sqrt{\sum_i |B_i|^2}\ .$$

Dans le cas de la réalisation de Neumann dans $\{x_1 > 0\}$, la situation est plus amusante. On peut toujours après changement d'échelle se ramener au cas où $\beta = 1$, mais l'estimation du bas du spectre dépend alors de l'angle ϑ que fait le champ magnétique avec la normale au plan $x_1 = 0$. Le problème se réduit d'abord, après une rotation respectant le plan $\{x_1 = 0\}$, à :

$$L(\vartheta, D_t) = D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + (D_t - \cos\vartheta x_1 - \sin\vartheta x_2)^2 \; .$$

puis, après transformée de Fourier partielle, devient :

$$L(\vartheta, \tau) = D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + (\tau - \cos\vartheta x_1 - \sin\vartheta x_2)^2 \; ,$$

dans $x_1 > 0$ avec condition de Neumann en $x_1 = 0$.
Si on remarque que le bas du spectre est donné par :

$$\sigma(\vartheta) := \inf \mathrm{Sp}\; (L(\vartheta, D_t) = \inf_\tau (\inf \mathrm{Sp}\; (L(\vartheta, \tau))) \; ,$$

on démontre que cette fonction est continue, décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ de 1 à Θ_0.

C'est donc lorsque le champ magnétique est parallèle au plan $\{x_1 = 0\}$ que le bas du spectre est minimal. Il s'agit là d'une affirmation bien connue des physiciens dès les années 60 mais qui n'avait pas été démontrée.

Cette étude conduit alors au théorème suivant :

Théorème 6.1 *Dans le cas où le champ magnétique est constant, l'état fondamental est localisé près des points du bord où le plan tangent est parallèle au champ magnétique.*

Le théorème est obtenu par [LuPa5]. Un cas typique est celui de l'ellipsoide : $\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 \leq 1$. L'ensemble en question est l'intersection du bord de l'ellipsoide avec le plan : $\alpha x_1 B_1 + \beta x_2 B_2 + \gamma x_3 B_3 = 0$. Même s'il y a un certain nombre de cas considérés dans [LuPa5], il reste à préciser, dans l'esprit du théorème 2.2 la localisation en tenant compte de la variation d'une courbure à définir.

7 Conclusion

La question de la localisation effective lorsqu'il y a plus d'un point de courbure maximale reste ouverte. On retrouve là les questions analogues à celle de l'étude des problèmes de multipuits pour l'équation de Schrödinger que nous avions traités avec J. Sjöstrand [HeSj1]-[HeSj3].

Comme résultat de l'analyse présentée ici, notons que le problème extérieur est également intéressant. Dans la limite semiclassique, il apparait dans un intervalle $[\Theta_0\, b\, h + \mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}})\; ,\; h\, b[$, un spectre de Neumann discret correspondant à des états localisés au bord.

Comme suggéré par J. Sjöstrand (et semble-t-il utilisé dans les travaux numériques de K. Hornberger et U. Smilansky [HoSm]), il serait intéressant de développer une théorie systématique de restriction du problème au bord.

Finalement, nous avons montré dans les résultats présentés en introduction que les techniques de [HeMor1] s'adaptaient bien au cas non-linéaire et donnaient de bonnes informations sur la nucléation.

Références

[Ag] S. Agmon : Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations. Math. Notes, T. 29, Princeton University Press (1982).

[AHS] J. Avron, I. Herbst et B. Simon : Schrödinger operators with magnetic fields I. Duke Math. J. 45 (1978), p. 847-883.

[BaPhTa] P. Bauman, D. Phillips et Q. Tang : Stable nucleation for the Ginzburg-Landau system with an applied magnetic field. IMA Preprint Series 1416 (1996). Arch. Rational Mech. Anal. 142 (1998), p. 1-43.

[BeRu] J. Berger et J. Rubinstein : On the zero set of the wave function in superconductivity. Comm. in Math. Physics 202 (1999), p. 621-628.

[BeSt] A. Bernoff et P. Sternberg : Onset of superconductivity in decreasing fields for general domains. J. Math. Phys. 39 (1998), p. 1272-1284.

[BoHe] C. Bolley et B. Helffer : An application of semi-classical analysis to the asymptotic study of the supercooling field of a superconducting material. Annales de l'Institut Henri Poincaré (Section Physique Théorique), Vol. 58, n^{o} 2 (1993), p. 169-233.

[Br] R. Brummelhuis : Exponential decay in the semi-classical limit for eigenfunctions of Schrödinger operators with magnetic fields and potential which degenerate at infinity. Comm. in PDE 16 (1991), n^{o} 8-9, p. 1489-1502.

[Ch] S.J. Chapman : Nucleation of superconductivity in decreasing fields. European J. Appl. Math. 5 (1994), Part 1, p. 449-468, Part 2, p. 468-494.

[CHO] S.J. Chapman, S.D. Howison et J.R. Ockendon, Macroscopic models for superconductivity, SIAM Review **34** (1992), p. 529-560.

[CSS] J.M. Combes, R. Schrader et R. Seiler : Classical bounds and limits for distributions of Hamiltonian operators in electromagnetic fields. Ann. of Physics 111 (1978), p. 1-18.

[DaHe] M. Dauge et B. Helffer : Eigenvalues variation I, Neumann problem for Sturm-Liouville operators. Journal of Differential Equations, Vol. 104, n°2, august 1993, p. 243-262.

[dG] P.G. De Gennes : Superconductivity of Metals and Alloys, Benjamin, New York and Amsterdam (1966).

[DuHe] M. Dutour et B. Helffer : On bifurcations from normal solutions for superconducting states. à paraî tre dans Rendiconti del seminario Matematico dell' Università e del Politecnico di Torino (2001).

[Er] L. Erdös : Rayleigh-type isoperimetric inequality with a homogeneous magnetic field. Calc. Var. and PDE. 4 (1996), p. 283-292.

[GinLa] V. Ginzburg et L. Landau, On the theory of superconductivity, Soviet Phys. JETP **20** (1950), p. 1064-1082.

[GioPh] T. Giorgi et D. Phillips : The breakdown of superconductivity due to strong fields for the Ginzburg-Landau model. Siam J. Math. Anal. 30 (1999), p. 341-359.

[He1] B. Helffer : Introduction to the semiclassical analysis for the Schrödinger operator and applications. *Springer lecture Notes in Math.*, n^0 1336 (1988).

[He2] B. Helffer : Semi-classical analysis for the Schrödinger operator with magnetic wells, (after R. Montgomery, B. Helffer-A. Mohamed), Proceedings of the conference in Minneapolis, The IMA Volumes in Mathematics and its applications, Vol. 95. Quasiclassical Methods, Springer Verlag (1997) p. 99-114.

[HHOO] B. Helffer, T. et M. Hoffmann-Ostenhof et M. Owen : Nodal sets for the groundstate of the Schrödinger operator with zero magnetic field in a non simply connected domain. Comm. in Math. Phys. 202 (1999), p. 629-649.

[HeMo] B. Helffer et A. Mohamed : Semiclassical analysis for the ground state energy of a Schrödinger operator with magnetic wells, Journal of Functional Analysis 138, n^o 1 (1996), p. 40-81.

[HeMor1] B. Helffer et A. Morame : Magnetic bottles in connection with superconductivity. Preprint Dec. 2000.

[HeMor2] B. Helffer et A. Morame : En préparation.

[HeNo1] B. Helffer et J. Nourrigat : Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs. Birkhäuser, Boston 1985.

[HeNo2] B. Helffer et J. Nourrigat : Décroissance à l'infini des fonctions propres de l'opérateur de Schrödinger avec champ électromagnétique polynomial. Journal d'Analyse Mathématique de Jérusalem, Vol. 58 (1992), p. 263-275.

[HePa] B. Helffer et X-B. Pan : Upper critical field and location of surface nucleation of superconductivity. En préparation.

[HeRo] B. Helffer et D. Robert : Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique, Annales de l'IHP (section Physique théorique), Vol.41, n°3 (1984), p. 291-331.

[HeSj1] B. Helffer et J. Sjöstrand : Multiple wells in the semiclassical limit I. *Comm. in PDE* 9(4) (1984), p. 337-408.

[HeSj2] B. Helffer et J. Sjöstrand : Puits multiples en limite semiclassique V - le cas des minipuits -, Volume in honor of S. Mizohata 1986,

[HeSj3] B. Helffer et J. Sjöstrand : Puits multiples en limite semi-classique VI - le cas des puits variétés -, Annales de l'IHP (section physique théorique) vol. 46, 4 (1987), p. 353-373.

[HeSj4] B. Helffer et J. Sjöstrand : Effet tunnel pour l'équation de Schrödinger avec champ magnétique, Annales de l'ENS de Pise, Vol XIV (4) (1987), p. 625-657.

[HoSm] K. Hornberger et U. Smilansky : The boundary integral method for magnetic billards. J. Phys. A 33 (2000), p. 2829-2855.

[Ja] Hala T. Jadallah : The onset of superconductivity in a domain with a corner. Preprint Août 2000.

[KwPa] K. H. Kwek et X-B. Pan : Schrödinger operators with non-degenerately vanishing magnetic fiels in bounded domains. Preprint 2000.

[LuPa1] K. Lu et X-B. Pan : Estimates of the upper critical field for the Ginzburg-Landau equations of superconductivity. Physica D 127 (1999), p. 73-104.

[LuPa2] K. Lu et X-B. Pan : Eigenvalue problems of Ginzburg-Landau operator in bounded domains. Journal of Math. Physics, Vol. 40, n^o 6, June 1999, p. 2647-2670.

[LuPa3] K. Lu et X-B. Pan : Gauge invariant eigenvalue problems on $I\!R^2$ and $I\!R^2_+$. Trans. AMS, 352 (3), 2000, p. 1247-1276.

[LuPa4] K. Lu et X-B. Pan : Ginzburg-Landau system and surface nucleation of superconductivity. Proceeding of the IMS Workshop on Reaction-Diffusion systems. Chinese University of Hong-Kong, December 6-11 (1999).

[LuPa5] K. Lu et X-B. Pan : Surface nucleation of superconductivity in 3-dimension. J. of Differential Equations 168(2) (2000), p. 386-452.

[Mat] H. Matsumoto : Semiclassical asymptotics of eigenvalues for Schrödinger operators with magnetic fields. Journal of Functional Analysis, 129, n^o 1 (1995), p. 168-190.

[MatUe] H. Matsumoto et N. Ueki : Spectral analysis of Schrödinger operators with magnetic fields. Journal of Functional Analysis 140, n^o 1, (1996), p. 218-255.

[Mel] A. Melin : Lower bounds for pseudo-differential operators, Ark. Math. 9 (1971), p. 117-140.

[Mon] R. Montgomery : Hearing the zero locus of a magnetic field. Comm. Math. Physics 168 (1995), p. 651-675.

[Pan] X-B. Pan : Upper critical for superconductors with edges and corners. Preprint 2000. Soumis.

[PiFeSt] M. del Pino, P.L. Felmer et P. Sternberg : Boundary concentration for eigenvalue problems related to the onset of superconductivity. Comm. Math. Phys. 210, (2000), p. 413-446.

[ReSi] M. Reed et B. Simon : Methods of modern Mathematical Physics, IV : Analysis of operators. Academic Press, New York, 1978.

[SdG] D. Saint-James et P. De Gennes, Onset of superconductivity in decreasing fields, Physics Letters, **6** :(5)(1963), p. 306-308.

[SST] D. Saint-James, G. Sarma et E.J. Thomas, Type II Superconductivity, Pergamon Press, Oxford, 1969.

[SaSe] E. Sandier et S. Serfaty : Global minimizers for the Ginzburg-Landau functional below the first critical magnetic field. Annales IHP (Analyse non-linéaire)17 (2000), n$^{\rm o}$ 1, p. 119-145.

[Sh] I. Shigekawa : Eigenvalue problems for the Schrödinger operator with the magnetic field on a compact Riemannian manifold. Journal of Functional Analysis, Vol. 75, n^o 1, Nov. 1987.

[Si] B. Simon : Semi-classical analysis of low lying eigenvalues I, Ann. Inst. Henri Poincaré 38 (4) (1983), p. 295-307.

[Ti] M. Tinkham, Introduction to Superconductivity, McGraw-Hill Inc., New York, 1975.

[Ue1] N. Ueki : Lower bounds for the spectra of Schrödinger operators with magnetic fields, Journal of Functional Analysis 120, n^o 2 (1994), p. 344-379. Erratum n^o 11 (1995), p. 257-259.

[Ue2] N. Ueki : Asymptotics of the infimum of the spectrum of Schrödinger operators with magnetic fields. J. Math. Kyoto Univ. 37, n^o 4 (1998), p. 615-638.