Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1999-2000

Benoît Desjardins et Maria J. Esteban

Solutions faibles pour des problèmes d'interaction fluide-structure

Séminaire É. D. P. (1999-2000), Exposé n° VIII, 10 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1999-2000____A8_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Solutions faibles pour des problèmes d'interaction fluide-structure

B. Desjardins[1], **M.J. Esteban**[2]

[1] CEA/DIF, B.P. 12, 91680 Bruyères-le-Châtel, France.
[2] CEREMADE (UMR 7534), Université Paris-Dauphine, Place de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France.

Résumé.
Nous présentons dans cette note une nouvelle façon d'aborder les questions d'existence de solutions faibles pour certains problèmes d'interaction fluide-structure. Dans l'état actuel, cette approche permet de traiter le cas de solides rigides ou très faiblement déformables, immergés dans un fluide visqueux incompressible ou dans un fluide visqueux compressible dont l'évolution est isentropique.

1 Présentation générale de la méthode.

Le mouvement d'un fluide dans lequel évoluent des solides est un problème de frontière libre, formée par les bords des solides en contact avec le fluide. Il s'agit donc de problèmes de couplage 3D–3D ou 2D–2D. D'autres modèles du même type décrivent la dynamique de fluides à l'intérieur d'une paroi ou d'un solide déformable (comme les modèles de circulation sanguine [14]). Dans notre présentation, nous ne traitons que du premier type de problèmes.

Dans la plupart des situations présentant une frontière libre, l'existence de solutions découle de l'utilisation de méthodes de point-fixe, car cette frontière n'est pas connue *a priori*. Divers travaux ont été menés dans cette direction pour l'analyse d'interactions fluide-structure (voir par exemple [7, 9, 16]). Il s'avère que tous ces travaux doivent considérer des espaces de fonctions très régulières, afin de faire converger les méthodes itératives contenues dans la procédure de point-fixe.

Dans une série de travaux récents [3, 4], nous avons procédé de manière différente, en essayant de ne considérer que des espaces d'énergie définis par les estimations *a priori*. D'autres travaux dans cette direction se trouvent dans [1, 10] (voir aussi [15]). Dans [1], on considère un unique solide, et on résout le problème en se plaçant dans le repère lié au solide, en utilisant une méthode de pénalisation pour déterminer la position du bord. La méthode utilisée dans [10] en dimension 2 dans le cas incompressible se rapproche de celle décrite dans cette note : les solides sont approchés par des fluides incompressibles dont la viscosité tend vers l'infini, par l'intermédiaire d'une formulation Eulérienne globale dans le domaine Ω. Enfin, le problème stationnaire de la chute libre d'un objet dans l'espace entier est considéré dans [15].

D'autre part, parmi les problèmes de frontière libre que l'on peut rencontrer, les problèmes d'interaction fluide-structure présentent des difficultés liées au fait que les équations régissant le mouvement des fluides et des solides s'écrivent généralement dans des coordonnées différentes : Eulériennes pour les fluides, Lagrangiennes pour les solides.

Ces particularités nous ont amenés à introduire une définition de solution faible adaptée aux problèmes à étudier. Cette notion de solution est non classique en ce qu'elle dépend de la frontière libre, qui n'est pas connue *a priori*, ce qui accentue le caractère non-linéaire de cette définition.

Le contexte dans lequel notre méthode s'applique est le suivant : soit Ω un domaine de l'espace $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3, occupé par un fluide visqueux contenant k solides rigides, $S_1, \ldots, S_k$. Nous supposons que la régularité de la frontière de l'ouvert Ω et de celle des solides est au moins $C^{1,1}$. Le fluide occupera à tout instant $t \geq 0$ la région $\Omega_F(t)$, qui coï ncide avec $\Omega \setminus \cup_i \overline{\Omega_i(t)}$, où $\Omega_i(t)$ désigne la position du solide S_i à l'instant t.

Le mouvement du fluide est supposé être décrit par les équations de Navier-Stokes. Dans le cas d'un fluide incompressible de densité $\bar{\rho}_F$ et viscosité μ, les équations considérées sont :

$$\bar{\rho}_F \left(\partial_t \mathbf{v} + \text{div } (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})\right) + \nabla p - \mu \Delta \mathbf{v} = \bar{\rho}_F \mathbf{f} \text{ dans } \Omega_F(t), \tag{1}$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega_F(t), \ \mathbf{v}_{|t=0} = \mathbf{v}_0 \text{ dans } \Omega_F(0) \text{ et } \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{2}$$

Dans le cas compressible, nous ne considérons que le cas isentropique avec densité $\bar\rho_F(t,\mathbf{x})$ et viscosités λ et μ satisfaisant les conditions $\mu>0$, $\lambda+2\mu>0$, et loi de pression en puissance de γ ($\gamma\geq 2$) :

$$\partial_t(\bar\rho_F\mathbf{v})+\text{div }(\bar\rho_F\mathbf{v}\otimes\mathbf{v})-\mu\Delta\mathbf{v}-(\lambda+\mu)\nabla\text{div }\mathbf{v}+\nabla\bar\rho_F^{\gamma}=\bar\rho_F\mathbf{f}\text{ dans }\Omega_F(t), \quad (3)$$

$$\partial_t\bar\rho_F+\text{div}\,(\bar\rho_F\mathbf{v})=0\text{ dans }\Omega_F(t),\ (\bar\rho_F,\bar\rho_F\mathbf{v})_{|t=0}=(\bar\rho_{F,0},\mathbf{m}_0)\text{ dans }\Omega_F(0), \quad (4)$$

où $\mathbf{f}\in L^1(0,T;L^q(\Omega))^d$ ($q=2$ dans le cas incompressible et $q{=}2\gamma/(\gamma-1)$ dans le cas compressible) représente les forces volumiques extérieures, par exemple la force de la gravité agissant sur le système.

D'un autre côté, les solides bougent de manière rigide, leur vitesse respective $\mathbf{w}_i$ étant définie par la vitesse du centre de masse et par sa rotation. Ces quantités évoluent bien-sûr par le biais des forces agissant sur les solides, forces volumiques d'une part, et forces surfaciques créées par la poussée du fluide sur la frontière des solides d'autre part.

Nous faisons l'hypothèse importante (et physiquement réaliste) que les vitesses solides et fluides et la composante normale des contraintes sont continues à travers l'interface fluide-solides.

Au lieu d'écrire toutes ces conditions en détail, nous décrivons ci–dessous une formulation en vitesse et densités globales qui nous permet d'introduire une définition de solutions faibles. L'idée de reformuler le problème globalement dans Ω a déjà été souvent utilisée, tout particulièrement dans les problèmes multi-fluides [12] [13], où au lieu de considérer les équations des divers fluides séparément, ainsi que les conditions de couplage aux interfaces, on écrit une unique équation pour un fluide non-homogène. Cette approche présente l'avantage de dispenser du traitement explicite de la frontière libre.

La formulation globale peut s'écrire de la manière suivante : on cherche une vitesse $\mathbf{u}:\Omega\to\mathbb{R}^d$ et une densité $\rho=\rho_F+\rho_1+\ldots+\rho_k$, avec $\rho_F(t,\mathbf{x})=\bar\rho_F(t,\mathbf{x})1_{\Omega_F(t)}(\mathbf{x})$, $\rho_i(t,\mathbf{x})=\bar\rho_i 1_{\Omega_i(t)}(\mathbf{x})$, $\bar\rho_i$ étant la densité du solide S_i.

A cause de la conservation de la masse totale, la densité locale ρ est solution d'une équation de tranport : $\partial_t\rho+\text{div }(\rho\mathbf{u})=0$ dans $(0,T)\times\Omega$. Cette équation assure dans le cas incompressible que ρ est toujours une fonction constante par morceaux, égale à $\bar\rho_F$ dans $\Omega_F(t)$ et égale à $\bar\rho_i$ dans $\Omega_i(t)$ pour chaque $i=1,\ldots,k$.

La rigidité du mouvement du solide S_i peut s'écrire : $\rho_i\mathrm{D}(\mathbf{u})=0$ dans $(0,T)\times\Omega$ pour $1\leq i\leq k$, où $\mathrm{D}(\mathbf{u})$ désigne la partie symétrique de $\nabla\mathbf{u}$.

D'autre part, nous pouvons définir le tenseur de contraintes dans le fluide par $\sigma=2\mu\mathrm{D}(\mathbf{v})-p\,\mathbf{I}$ (resp. $\sigma=2\mu\mathrm{D}(\mathbf{v})+(\lambda\,\text{div}\,\mathbf{v}-\bar\rho_F^{\gamma})\,\mathbf{I}$) dans le cas incompressible (resp. dans le cas compressible). Le tenseur global des contraintes est alors défini par :

$$\mathcal{T} = \frac{\rho_F}{\bar{\rho}_F}\sigma + \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i}{\bar{\rho}_i}\Sigma_i,$$

où Σ_i désigne le tenseur de Cauchy du solide S_i, et l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\partial_t(\rho\mathbf{u}) + \text{div } (\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = \text{div } \mathcal{T} + \rho\mathbf{f}. \tag{5}$$

Pour compléter le problème, nous ajoutons les conditions initiales: $\mathbf{u}_{|t=0}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ dans $\Omega_F(0)$, $\mathbf{u}_{|t=0}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_{i|t=0}(\mathbf{x})$ dans $\Omega_i(0)$, $1 \leq i \leq k$, $\rho_{F,0}(\mathbf{x}) = \bar{\rho}_{F,0}(\mathbf{x})1_{\Omega_F(0)}(\mathbf{x})$, $\rho_{i,0}(\mathbf{x}) = \bar{\rho}_i 1_{\Omega_i(0)}(\mathbf{x})$, $1 \leq i \leq k$, et $\rho_{|t=0} = \rho_0 := \rho_{F,0} + \sum_{i=1}^{k} \rho_{i,0}$, la condition aux limites $\mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega$ et dans le cas incompressible, nous devons également rajouter la condition $\text{div } \mathbf{u} = 0$ dans Ω.

Dans le cas incompressible, des calculs formels sur les équations en vitesse et densité conduisent à l'inégalité suivante :

$$\int_\Omega \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x} + \mu\int_0^t\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x}ds \leq \int_\Omega \frac{1}{2}\rho_0|\mathbf{u}_0|^2\, d\mathbf{x} + \int_0^t\int_\Omega \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\, d\mathbf{x}ds, \tag{6}$$

qui permet d'obtenir les estimations *a priori* :

$$\rho \in L^\infty((0,T)\times\Omega),\ \mathbf{u} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))^d \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))^d,\ \text{div}\,\mathbf{u} = 0, \tag{7}$$

dès que $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)^d$, et $\mathbf{f} \in L^1(0,T;L^2(\Omega))^d$ pour tout $T > 0$. Dans le cas compressible, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \frac{\rho_F^\gamma}{\gamma-1}\right)(t)\, d\mathbf{x} + \int_0^t\int_\Omega \left(\mu|\nabla\mathbf{u}|^2 + (\lambda+\mu)|\text{div } \mathbf{u}|^2\right) d\mathbf{x}ds \\ \leq \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\rho_0|\mathbf{u}_0|^2 + \frac{\rho_{F,0}^\gamma}{\gamma-1}\right) d\mathbf{x} + \int_0^t\int_\Omega \rho\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\, d\mathbf{x}ds,\end{aligned} \tag{8}$$

ce qui donne

$$\rho \in L^\infty(0,T;L^\gamma(\Omega)),\ \sqrt{\rho}\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))^d,\ \mathbf{u} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))^d, \tag{9}$$

dès que $0 \leq \rho_{F,0} \in L^\gamma(\Omega)$, $|\mathbf{m}_0|^2/\rho_0 \in L^1(\Omega)$ et $\mathbf{f} \in L^1(0,T;L^q(\Omega))^d$ pour tout $T > 0$.

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire une notion de solution faible. Pour cela, nous définissons l'espace des fonctions test

$$\mathcal{V}_\rho = \left\{ \phi \in H^1((0,T)\times\Omega)^d \,/\, \phi_{|\partial\Omega} = 0,\ (\rho_i\, \mathrm{D}\phi)(t,\mathbf{x}) = 0,\ 1 \le i \le k \right\}, \tag{10}$$

qui pour tout t contient toutes les fonctions de vitesse de $H_0^1(\Omega)$ qui correspondent à des mouvements rigides dans les ouverts $\Omega_i(t)$. L'espace $\mathcal{V}$ dépend alors de la solution $(\rho, \mathbf{u})$, ce qui crée une non-linéarité qui s'ajoute à celle que l'on trouve dans les équations de Navier-Stokes (5), et qui complique l'analyse par rapport aux modèles multifluides. Dans le cas incompressible, nous demandons aux éléments de $\mathcal{V}_\rho$ de satisfaire également $\operatorname{div} \phi = 0$ dans Ω.

Nous dirons que $(\rho, \mathbf{u})$ satisfaisant (7) (resp. (9)) est solution faible du problème incompressible (resp. compressible) si $\mathbf{u}_{|\partial\Omega} = 0$, $\rho_i \mathrm{D}(\mathbf{u}) = 0$ dans $\mathcal{D}'((0,T)\times\Omega)$ pour tout $1 \le i \le k$, $\partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$ dans $\mathcal{D}'((0,T)\times\Omega)$, $\rho_{|t=0} = \rho_0$, et pour tout $\phi \in \mathcal{V}_\rho$ et p.p. $t \in (0,T)$, on a

$$\int_0^t \int_\Omega (\rho\mathbf{u}\cdot\partial_t\phi + \rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} : \mathrm{D}(\phi) + \rho\mathbf{f}\cdot\phi)\ d\mathbf{x}\,ds + \int_\Omega \rho_0\mathbf{u}_0\cdot\phi(0)\,d\mathbf{x}$$

$$= \int_\Omega \rho\mathbf{u}(t)\cdot\phi(t)\,d\mathbf{x} + \mathcal{L}(\phi), \tag{11}$$

où

$$\mathcal{L}(\phi) = \int_0^T \int_\Omega 2\mu\mathrm{D}(\mathbf{u}) : \mathrm{D}(\phi)\,d\mathbf{x}ds,$$

$$(\text{resp. } \mathcal{L}(\phi) = \int_0^T \int_\Omega (2\mu\mathrm{D}(\mathbf{u}) : \mathrm{D}(\phi) + (\lambda \operatorname{div}\mathbf{u} - \rho^\gamma)\operatorname{div}\phi)\,d\mathbf{x}ds).$$

Remarquons que dans la définition ci-dessus n'apparaît aucun des multiplicateurs de Lagrange du problème : ni les tenseurs de contraintes de Cauchy des solides, Σ_i, ni la pression p dans le cas incompressible. Cette propriété est due au choix des fonctions test.

Afin d'énoncer notre résultat d'existence de solutions faibles pour les problèmes compressible et incompressible, nous devons faire des hypothèses sur l'absence de collisions entre solides ou entre les solides et la paroi extérieure $\partial\Omega$. En effet, nous ne savons pas traiter le cas des collisions, sans savoir s'il s'agit d'un obstacle technique ou d'une propritété intrinsèque au modèle. Le problème des collisions est fortement corrélé à celui de la régularité des solutions, un flot suffisamment régulier interdisant les collisions. Nous supposons donc par la suite que la distance minimale solide-solide et solide-bord extérieur initiale $\delta(0)$ est strictement positive et $\delta(t)$ désigne cette même distance à l'instant t. Notons que $\delta(t) \geq \delta(0) - Ct$, la dynamique des solides étant *a priori* Lipschitz en temps, ce qui garantit que $\delta(t) > 0$ en temps petit. Nous prouvons alors le théorème suivant :

Théorème 1.1 *(voir [4]) Sous les hypothèses énoncées ci-dessus, il existe un temps maximal* $T^* \in (0, +\infty]$ $(T^* = \inf\{t > 0 \,/\, \delta(t) = 0\})$ *et une solution faible* $(\rho, \mathbf{u})$ *du système incompressible (resp. du système compressible) telle que l'inégalité d'énergie* (6) *(resp.* (8)*) a lieu pour presque tout* $t \in (0, T^*)$.

La preuve détaillée se trouve dans [4] et se décompose suivant les étapes suivantes :

Tout d'abord nous démontrons un résultat de stabilité par rapport aux petites variations des données. Ceci est équivalent à l'obtention d'un résultat de compacité. Rappelons que ce genre de méthode a été très largement utilisé pour la résolution de problèmes aux dérivées partielles non-linéaires. Voir par exemple [17, 6].

Ensuite, nous montrons l'existence de solutions faibles pour des données initiales et des forces extérieures régularisées. Ceci est un travail plus classique, qui se fait par une méthode de Galerkin associée à l'utilisation d'arguments de type point-fixe.

Les procédures qui sont nécessaires pour mener à bien ces deux étapes reposent sur la démonstration d'un lemme de représentation qui permet d'identifier toute vitesse $\mathbf{u}$ du type de celle que nous recherchons, rigide dans $\Omega_i(t)$ et incompressible dans Ω pour tout t dans le cas incompressible, par les vitesses $\mathbf{w}_i$ d'un côté et par une vitesse (incompressible dans le cas incompressible) définie dans l'ouvert fluide initial $\Omega_F(0)$. Cette représentation nous permet de travailler dans des espaces de fonctions qui sont définies dans des ouverts fixes, ce qui facilite l'utilisation d'arguments de point-fixe.

Pour prouver le théorème à partir des deux étapes précédentes, nous devons enfin montrer que toute fonction test correspondant à une limite de solutions approchées peut être approchée dans des topologies fortes adéquates par des fonctions-test associées aux solutions approchées correspondantes. Plus précisément, si pour des données régularisées $\mathbf{f}^\varepsilon$, $\mathbf{u}_0^\varepsilon$, nous construisons des solutions approchées $(\rho^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon)$ qui vont appartenir à des espaces approchés $\mathcal{V}_{\rho^\varepsilon}$, et que, par la première étape, nous pouvons extraire des sous-suites qui convergent vers une paire densité-vitesse $(\rho, \mathbf{u})$, alors pour toute fonction-test Φ dans l'espace $\mathcal{V}_\rho$, nous construisons des fonctions-test Φ^ε telles que

$$\Phi^\varepsilon \underset{\varepsilon}{\longrightarrow} \Phi \quad \text{dans} \quad H^1((0,T) \times \Omega)\,.$$

Avant de passer à la section suivante, remarquons que des travaux en cours (en collaboration avec C. Grandmont et P. Le Tallec, [5]) permettent de traiter certains cas où les solides sont "légèrement" déformables, au sens où nous considérons pour les solides les équations de l'élasticité linéarisée avec un nombre fini de modes de déformation.

2 Lignes générales du résultat de stabilité et de sa démonstration.

Soit $(\rho^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite de solutions du problème compressible ou incompressible correspondant à des données $\mathbf{f}^\epsilon$, ρ_0^ε, $\mathbf{u}_0^\varepsilon$ qui convergent dans des topologies adéquates (par exemple dans $L^2(\Omega)$) vers les données $\mathbf{f}$, ρ_0, $\mathbf{u}_0$. Dans le cas incompressible, la compacité de la suite $(\rho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ découle simplement d'un résultat de Di Perna-Lions (voir [6]). Dans le cas compressible, on utilise d'abord la condition de rigidité pour déduire la compacité de la densité dans les zones solides. Cela permet d'avoir de la compacité sur le mouvement des solides et par conséquence, sur le mouvement de la frontière libre et du domaine fluide. Une fois ce résultat acquis, on obtient la compacité de la densité dans le domaine fluide par des arguments très proches de ceux utilisés par P.-L. Lions dans [12] pour montrer un résultat équivalent dans le cas d'un fluide inhomogène dans un domaine fixe. On passe alors à l'étude de la suite des vitesses $(\mathbf{u}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Il est clair que si l'on disposait d'une estimation *a priori*, même très faible, de la dérivée en temps des vitesses dans un espace de Sobolev, les estimations d'énergie permettraient d'obtenir un résultat de compacité pour les vitesses. Ce type d'estimation étant apparamment inaccessible, nous montrons un résultat qui donne une estimation *a priori* sur la dérivée discrète des vitesses. Ce résultat est basé sur une idée de Galdi *et al* dans le cas de l'étude de fluides évoluant dans des domaines dépendant du temps (voir [8]. Voir aussi [2]).

Lemme 2.1 *Soit $T > 0$ tel que $\delta(t) \geq \delta_0 > 0$ dans l'intervalle $(0,T)$. Alors, pour tout $h > 0$ sufisamment petit, nous avons*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_0^T \int_\Omega \rho^n(t,x) |\mathbf{u}^n(t+h,x) - \mathbf{u}^n(t,x)|^2 dt\, d\mathbf{x} \leq C_{\delta_0,T}\, h^\alpha, \tag{12}$$

où $\alpha = 2/(d+2)$ dans le cas incompressible (resp. $\alpha = (2\gamma-d)/(2\gamma d)$ dans le cas compressible).

3 Représentation des vitesses.

A toute vitesse $\mathbf{v}$ qui est rigide dans les ouverts $\Omega_i(t)$ à l'instant t (et eventuellement incompressible dans le cas incompressible) on peut associer une vitesse $\bar{\mathbf{v}}$, définie dans $\Omega_F(0)$, incompressible dans $\Omega_F(0)$ dans le cas incompressible, et qui a la même régularité que la vitesse $\mathbf{v}$, c'est-à-dire, $\bar{\mathbf{v}} \in L^2(0,T;H^1(\Omega_F(0)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega_F(0))$. Plus précisément, pour tout flot Lagrangien préservant le volume, X – par exemple, le flot généralisé de Di Perna-Lions ([6]) associé à une vitesse incompressible $\mathbf{u} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))^d$ $\cap$ $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))^d$ – tel que X correspond à un mouvement rigide dans $\Omega_i(0)$ on définit le flot $\widetilde{X}$ par

$$\widetilde{X}(t,x) = (X_S^\nu)^{-1}(t, X(t,x)), \tag{13}$$

où X_S^ν est un flot "rigide" qui pour tout $i = 1,\ldots,k$, étend $X_{|\Omega_i(0)}$ et qui est égal à l'identité à l'extérieur d'un ν-voisinage de $\Omega_i(0)$. On peut facilement vérifier que $\widetilde{X}$ est égal à l'identité sur $\partial\Omega$ et dans $\cup_{i=1}^k \Omega_i(0)$, de telle manière que le support de la vitesse Eulérienne associée à $\widetilde{X}$ soit inclus dans $\Omega_F(0)$.

L'intérêt de cette représentation est de remplacer une vitesse fluide dans un domaine dépendant du temps par une vitesse pseudo-fluide $\bar{\mathbf{v}}$ et des vitesses rigides définies respectivement dans $\Omega_F(0)$ et dans les domaines solides de référence. Ceci permet de travailler dans des espaces de fonctions définies dans des ouverts fixes. La définition de $\bar{\mathbf{v}}$ à partir de $\mathbf{v}$ s'effectue via la flot Lagrangien correspondant à un mouvement nul sur $\partial\Omega$ et sur $\Omega_i(0)$, $i = 1,\ldots,k$. Précisément, on utilise le flot Lagrangien de $\mathbf{v}$ et l'inverse du flot Lagrangien d'un mouvement rigide qui étend les mouvements solides contenus dans $\mathbf{v}$ et dont le support est inclus dans un petit voisinage des ouverts $\Omega_i(0)$. Remarquons en particulier que cette extension requiert l'hypothèse de non collision : $\delta(t) > 0$.

4 Construction de solutions approchées.

Les problèmes approchés correspondent alors au modèle d'origine, avec des données régularisées et des vitesses de convection régularisées. De plus, nous considérons un mouvement rigide défini dans les ouverts $\Omega_i(0)$ par le champ Lagrangien X_S, et une vitesse, compressible ou incompressible, à support dans $\Omega_F(0)$, $\mathbf{w}$. Nous régularisons égalément X_S et $\mathbf{w}$, de manière à obtenir des fonctions X_S^ε et $\mathbf{w}^\varepsilon$ suffisamment régulières. Par le lemme de représentation décrit dans la section précédente nous pouvons définir une vitesse globale $\widetilde{\mathbf{w}}^\varepsilon$. Ensuite, nous résolvons un problème linéaire, obtenu à partir du problème initial dans lequel les vitesses de convection dans les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont remplacées par $\widetilde{\mathbf{w}}^\varepsilon$. Cette opération est égalément réalisée au niveau des fonctions test. Ce problème linéaire est alors résolu par une méthode de Galerkin. Finalement, un argument de point-fixe permet de résoudre le problème non-linéaire, les estimations *a priori* nécessaires étant obtenues de manière relativement classique.

References

[1] C. Conca, J. San Martin, M. Tucsnak, Analysis of a fluid-rigid body problem, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 328 (199 9), no. 6, p. 473–478.

[2] B. Desjardins, On weak solutions of the compressible isentropic Navier-Stokes equations. *Applied Math. Letters*, Vol 12, (7), (1999), p. 107–111.

[3] B. Desjardins, M.J. Esteban, Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid, *Arch. for Rat. Mech. Anal.*, (146) (1999) p. 59-71.

[4] B. Desjardins, M.J. Esteban, On weak solutions for fluid-rigid structure interaction: compressible and incompressible models, *to appear in Comm. P. D. E.* (1999).

[5] B. Desjardins, M.J. Esteban, C. Grandmont, P. Le Tallec, Weak solutions for a fluid-elastic structure interaction model. *En préparation.*

[6] R.J. Di Perna, P.-L. Lions, Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, *Invent. Math.* **98** (1989), p. 511-547.

[7] D. Errate, M.J. Esteban, Y. Maday, Couplage fluide-structure. Un modèle simplifié en dimension 1. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **318** (1994), no. 3, p. 275-281.

[8] G.P. Galdi, J.G. Heywood, Y. Shibata, On the global existence and convergence to steady state of Navier-Stokes flow past an obstacle that is started from rest, *Arch. Rational Mech. Anal.* **138** (1997), no. 4, p. 307-318.

[9] C. Grandmont, Y. Maday, Existence de solutions d'un problème de couplage fluide-structure bidimensionnel instationnaire, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **326** (1998), p. 525-530.

[10] K.-H. Hoffmann, V.N. Starovoitov, On a motion of a solid body in a viscous fluid. Two-dimensional case, *Adv. Math. Sci. Appl., 1999, vol.9, N2, p. 633-648.*

[11] J. Leray, Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent les parois, *J. Math. Pures Appl.* **13** (1934), p. 331-418.

[12] P.-L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol 1. Incompressible models, and Vol 2, Compressible Models, *Oxford Univ. Press*, (1996).

[13] A. Nouri, F. Poupaud, An existence theorem for the multifluid Navier-Stokes problem, *J. Differential Equations* **122** (1995), no. 1, p. 71–88.

[14] A. Quarteroni, M. Tuveri, A. Veneziani, Computational Vascular Fluid Dynamics: Problems, Models and Methods, *Report EPFL/DMA 11.98, submitted to Computing and Visualisation in Science*, (1998).

[15] D. Serre, Chute libre d'un solide dans un fluide visqueux incompressible: Existence, *Japan J. Appl. Math.* **4** (1987), no. 1, p. 33-73.

[16] V.A. Solonnikov, Unsteady motion of a finite mass of fluid, bounded by a free surface, *J. Soviet Math.* **40** (1988), p. 672-686.

[17] L. Tartar, The compensated compactness method applied to systems of conservation laws *Systems of nonlinear partial differential equations* (Oxford, 1982), p. 263-285, *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci.*, 111, Reidel, Dordrecht-Boston, Mass., 1983.