SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1999-2000

Jean-Marc Delort

Temps d'existence pour l'équation de Klein-Gordon semi-linéaire à données petites faiblement décroissantes

Séminaire É. D. P. (1999-2000), Exposé n° II, 17 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1999-2000____A2_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Temps d'existence pour l'équation de Klein-Gordon semi-linéaire à données petites faiblement décroissantes

Jean-marc Delort
Université Paris-Nord
Institut Galilée
Av. jean-Baptiste Clément
93430 - Villetaneuse, France,

0 Introduction

Notons (t,x) les coordonnées sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \Box=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta_x$ l'opérateur de d'Alembert et soit u solution du problème de Klein-Gordon nonlinéaire

$$\begin{aligned}&\Box u+u=F(u,\partial_t u,\nabla_x u)\\&u_{|t=0}=\varepsilon u_0\\&\partial_t u_{|t=0}=\varepsilon u_1\end{aligned}\tag{1}$$

où F est une fonction C^∞ de ses arguments nulle à l'ordre 2 à l'origine, u_0 et u_1 sont des données assez régulières, et $\varepsilon>0$ est un petit paramètre. Notons $]T_*(\varepsilon),T^*(\varepsilon)[$ l'intervalle maximal d'existence d'une solution régulière. Le problème auquel on s'intéresse est celui de la minoration de $T^*(\varepsilon)$ (ou de la majoration de $T_*(\varepsilon)$) lorsque $\varepsilon\to 0$. Lorsque u_0 et u_1 sont non seulement régulières, mais de plus assez rapidement décroissantes à l'infini, le problème est bien compris : la solution existe globalement en temps (i.e. $T_*(\varepsilon)=-\infty$, $T^*(\varepsilon)=+\infty$) si ε est assez petit et si la dimension d'espace d est supérieure ou égale à 2. Ce résultat est dû indépendamment à Klainerman [10] et à Shatah [16] lorsque $d\geq 3$, et a été prouvé par Simon et Taflin [17] et Ozawa, Tsutaya et Tsutsumi [15] en dimension 2. En dimension 1 d'espace, Moriyawa, Tonegawa et Tsutsumi [14] ont montré que $T^*(\varepsilon)\geq e^{c/\varepsilon^2}$ pour une constante $c>0$, résolvant ainsi une conjecture d'Hörmander [7], [8]. Il résulte d'un exemple de Yordanov [18], ainsi que d'un travail de Keel et Tao [9] qu'une telle minoration est optimale, i.e. qu'en général la solution explose en un temps inférieur à e^{c'/ε^2} pour une autre constante $c' > 0$ si ε est assez petit.

Les preuves des résultats précédents reposent de manière essentielle sur le fait que les données décroissent assez rapidement à l'infini, en particulier au travers de l'utilisation des «champs de Klainerman» $t\partial_{x_i} + x_i\partial_t, x_i\partial_{x_j} - x_j\partial_{x_i}$ qui interviennent dans l'obtention d'estimation L^∞ optimales de u. La question que nous abordons ici est celle de la minoration de $T^*(\varepsilon)$ lorsqu'on ne dispose plus d'hypothèses de décroissance fortes à l'infini sur les données de Cauchy. Il est naturel d'envisager deux types possibles de comportement à l'infini pour u_0, u_1. Le premier consiste à supposer u_0, u_1 périodiques. Dans ce cas, nous avons prouvé dans [5] que le temps d'existence $T^*(\varepsilon)$ se minore par $c\varepsilon^{-2}$, et si on suppose que F s'annule à un ordre $r \geq 3$ en 0, par $c\varepsilon^{-(r-1)}|\log\varepsilon|^{-(r-3)}$. Ce résultat, qui ne fait appel à aucune hypothèse de structure sur F autre que son ordre d'annulation, est optimal au facteur logarithmique près, pour les r de la forme $r = 4k - 1$, $(k \geq 1)$. Le second type d'hypothèses qu'il est naturel d'envisager sur les données u_0, u_1, est celui de la *décroissance faible* à l'infini. Plus précisément, on peut considérer des données initiales qui sont dans un espace de Sobolev $H^N(\mathbb{R}^d)$ d'ordre suffisamment élevé, mais qui ne vérifient aucune hypothèse supplémentaire de décroissance à l'infini. En d'autres termes, le comportement exigé au voisinage de l'infini est celui qui assure la finitude de l'énergie des données et de leurs dérivées d'ordre assez grand. Sous de telles hypothèses, en dimension 1 d'espace, nous avons prouvé dans [3], [4] que, lorsque la nonlinéarité vérifie une «condition nulle» i.e. une condition de compatibilité avec l'opérateur de Klein-Gordon, la solution existe sur un intervalle de temps de longueur supérieure ou égale à $c\varepsilon^{-4}|\log\varepsilon|^{-6}$. Notre but ici est d'examiner le problème analogue en dimension d'espace $d \geq 2$. Les détails des preuves sont donnés dans [6].

Nous désignerons par $\|\cdot\|$ la norme L^2 dans la suite du texte.

1 Enoncé du théorème et réductions

Soit U fonction définie sur $]-T,T[\times\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ $U=(u_1,\cdots,u_m)$ solution du système

$$(2)\qquad \begin{aligned} \Box U + U &= F(U,\partial_t U,\nabla_x U)\\ U_{|t=0} &= \varepsilon U_0\\ \partial_t U_{|t=0} &= \varepsilon U_1 \end{aligned}$$

avec U_0, U_1 fonctions données sur $\mathbb{R}^d$. Nous supposerons que F est un polynôme en ses arguments, vérifiant l'hypothèse de structure suivante :

$$(3)\qquad F(U,\partial_t U,\nabla_x U) = G_0(U) + \sum_{1\le i,j\le m} G_{ij}(U)(\partial_t u_i \partial_t u_j - (\nabla_x u_j)(\nabla_x u_i))$$

où $G_0(U)$ est un polynôme nul au moins à l'ordre 2 en $U=0$ et G_{ij} sont des polynômes. Si $H^N(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace de Sobolev usuel, le principal théorème que nous nous proposons de prouver est le suivant :

Théorème 1 *Soit $N\in\mathbb{N}, N>\frac{d+3}{2}(d\ge 2)$. Il existe $c>0$ tel que pour tout couple (U_0,U_1) dans la boule unité de $H^N(\mathbb{R}^d)\times H^{N-1}(\mathbb{R}^d)$, tout $\varepsilon\in]0,1[$, (2) a une unique solution $U\in C^0(]-T_\varepsilon,T_\varepsilon[,H^N)\cap C^1(]-T_\varepsilon,T_\varepsilon[,H^{N-1})$ avec*

$$(4)\qquad T_\varepsilon \ge c\exp[c\varepsilon^{-\mu}]$$

où $\mu=\frac{2}{3}$ si $d=2, \mu=1$ si $d\ge 3$.

Remarque : Le théorème précédent est un résultat d'existence presque globale pour une nonlinéarité de la forme (3) et des données faiblement décroissantes à l'infini. Nous n'avons pas de raison de penser que l'exposant μ de (4) est optimal. En fait, améliorer μ jusqu'au cas limite de l'existence globale pose, compte tenu de la méthode de preuve que nous allons adopter, les mêmes problèmes que tenter de résoudre l'équation des ondes semi-linéaire (avec condition nulle pour la nonlinéarité) pour des données initiales dans $H^{d/2}(\mathbb{R}^d)\times H^{d/2-1}(\mathbb{R}^d)$: il s'agit du cas limite des travaux de Klainerman et Machedon consacrés à ces questions [11], [12].

La méthode de preuve que nous allons employer consiste suivant Lebeau [13], à réduire le problème par changement d'échelle à un problème d'existence locale à données peu régulières. Ce dernier sera justiciable d'idées analogues à celles employées par Klainerman et Machedon dans [11], [12], bien que notre approche consiste plutôt à systématiser les méthodes mises au point par Bourgain pour l'étude de l'équation de Schrödinger [1] ou des ondes [2]. Nous commençons par la réduction suivante : si $h > 0$ est un paramètre, posons $U^h(t,x) = U(t/h, x/h)$. Alors U est solution de (2) si et seulement si U^h vérifie

$$\begin{aligned}
&\square U^h + \frac{1}{h^2}U^h = \frac{1}{h^2}F(U^h, h\partial_t U^h, h\nabla_x U^h)\\
(5)\qquad &U^h_{|t=0} = V^h\\
&\partial_t U^h_{|t=0} = W^h
\end{aligned}$$

avec $V^h(x) = \varepsilon U_0(x/h), W^h(x) = \frac{\varepsilon}{h}U_1(x/h)$. Il s'agit de résoudre (5) sur un intervalle de longueur indépendante de h lorsque $(V^h)_h$ et $(W^h)_h$ sont dans des espaces provenant naturellement de H^N et H^{N-1} via le changement d'échelle. Nous désignerons par Δ_j $j \geq 0$ le multiplicateur de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ défini par

$$(6)\qquad \begin{aligned}
\Delta_j u &= \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{2^{j-1}<|\xi|<2^j}\hat{u}(\xi)) \text{ si } j \geq 1\\
\Delta_0 u &= \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{|\xi|<1}\hat{u}(\xi)).
\end{aligned}$$

Définition 2 *On note $H^s_N(\mathbb{R}^d)$ l'espace des familles de distributions $(u^h)_{h\in]0,1[}$, vérifiant $u^h \in L^2$ à h fixé, et telles qu'il existe $C > 0$, une suite $(c_j(h))_j$ dans la boule unité de L^2 avec*

$$(7)\qquad \|\Delta_j u^h\| \leq C c_j(h) h^s |\log h|^{-\nu}(1+2^j h)^{-N}$$

où $\nu = \frac{3}{2}$ si $d = 2$ et $\nu = 1$ si $d \geq 3$.

En d'autres termes, $(u^h)_h \in H^s_N$ si et seulement si $\|(1+hD)^N u^h\|$ est $\mathcal{O}(h^s|\log h|^{-\nu})$ $h \to 0$.

Théorème 3 *Soit $N \in \mathbb{N}, N > \frac{d+3}{2}$. Il existe $\delta > 0$ et pour toutes familles $(V^h)_{h\in]0,1[}$ (resp.$(W^h)_{h\in]0,1[}$) dans $H^{d/2}_N$ (resp. $H^{d/2-1}_{N-1}$) de normes inférieures à δ dans ces espaces, le système (5) a une unique solution*

$$(U^h)_h \in C^0(]-1,1[, H^{d/2}_N) \cap C^1(]-1,1[, H^{d/2-1}_{N-1})\ .$$

Montrons que le théorème 3 entraine le théorème 1 : on lie ε à h par la relation $\varepsilon = \alpha|\log h|^{-\nu}$ avec $\alpha > 0$ à choisir. Alors $U_0 \in H^N$ entraine que

$(V^h)_h$ est dans $H_N^{d/2}$ et $U_1 \in H^{N-1}$ entraine que $(W^h)_h$ est dans $H_{N-1}^{d/2-1}$. De plus leurs normes dans ces espaces sont $O(\alpha)$, donc inférieures à δ si α est fixé assez petit. Par le théorème 3, (5) admet une solution $(U^h)_h$ définie sur $]-1,1[$. Par changement d'échelle, on en déduit une solution U à (2) définie sur $]-1/h,1/h[$. Comme $\frac{1}{h} \sim c\exp[c\varepsilon^{-\mu}]$ avec $\mu = \frac{1}{\nu}$ on a le résultat.

2 Problème d'existence locale

Le théorème 3 est un résultat d'existence locale pour des données à faible régularité. La preuve va reposer sur l'utilisation des espaces de Sobolev 2-microlocaux suivants. Considérons les troncatures

(8)

$$\begin{aligned}
\Phi_{jk}^{\pm}(\tau,\xi) &= \mathbf{1}_{\{\pm\tau>0\}}\mathbf{1}_{\{2^{j-1}<|\xi|<2^j\}}\mathbf{1}_{\{2^{k-1}<|\tau\mp\sqrt{h^{-2}+\xi^2}|<2^k\}} \text{ si } j>0, k>0\\
\Phi_{0k}^{\pm}(\tau,\xi) &= \mathbf{1}_{\{\pm\tau>0\}}\mathbf{1}_{\{|\xi|<1\}}\mathbf{1}_{\{2^{k-1}<|\tau\mp\sqrt{h^{-2}+\xi^2}|<2^k\}} \text{ si } k>0\\
\Phi_{j0}^{\pm}(\tau,\xi) &= \mathbf{1}_{\{\pm\tau>0\}}\mathbf{1}_{\{2^{j-1}<|\xi|<2^j\}}\mathbf{1}_{\{|\tau\mp\sqrt{h^{-2}+\xi^2}|<1\}} \text{ si } j>0\\
\Phi_{00}^{\pm}(\tau,\xi) &= \mathbf{1}_{\{\pm\tau>0\}}\mathbf{1}_{\{|\xi|<1\}}\mathbf{1}_{\{|\tau\mp\sqrt{h^{-2}+\xi^2}|<1\}}.
\end{aligned}$$

On note $\Delta_{jk}^{\pm}$ les multiplicateurs de Fourier associés $\Delta_{jk}^{\pm}u = \mathcal{F}^{-1}(\Phi_{jk}^{\pm}(\tau,\xi)\hat{u}(\tau,\xi))$ et on décompose toute fonction $u \in L^2(dtdx)$ en

(9) $$u = \sum_{j,k} \Delta_{jk}^{+}u + \sum_{j,k} \Delta_{jk}^{-}u \ .$$

Définition 4 *On dit qu'une famille $(u^h)_h \in]0,1]$ de fonctions L^2 est dans $H_N^{s,s'}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ s'il existe $C>0$, une suite $(c_{jk}(h))_{j,k}$ vérifiant $\sum_j(\sum_k |c_{jk}(h)|)^2 \leq 1$ telle que*

(10) $$\|\Delta_{jk}^{\pm}u^h\| \leq Cc_{jk}(h)h^s|\log h|^{-\nu}2^{-ks'}(1+2^jh+2^kh)^{-N} \ .$$

La meilleure constante C définit la norme sur $H_N^{s,s'}$.

La signification de la définition précédente est la suivante :

• Le premier indice s mesure la régularité locale de $(u^h)_h$, en termes de degré d'annulation en h lorsque $h \to 0$.

• Le second indice s' mesure la régularité 2-microlocale de $(u^h)_h$ le long de la variété caractéristique de l'opérateur de Klein-Gordon semi-classique.

Compte-tenu du fait que $2^k \sim |\tau \mp \sqrt{h^{-2}+\xi^2}|$ sur le support de $\Phi^{\pm}_{jk}$, la définition (10) signifie que l'on peut appliquer à $(u^h)_h$ les dérivées particulières $|D_t \mp \sqrt{h^{-2}+D_x^2}|^{s'}$ sans affecter la régularité mesurée par le premier indice.

• Le troisième indice N indique le nombre de dérivations hD_t ou hD_x que l'on peut appliquer à $(u^h)_h$ sans affecter les deux régularités précédentes.

La stratégie de preuve, inspirée par Bourgain [1] et Klainerman-Machedon [12] consiste à effectuer un point fixe dans les espaces $H_N^{d/2,1/2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$. Si $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \chi \equiv 1$ au voisinage de $[-1,1]$, il suffit d'obtenir une solution au problème suivant

$$\begin{cases} \Box U + 1/h^2 U = \frac{1}{h^2}F(\chi(t)U, h\partial_t(\chi(t)U), h\nabla_x(\chi(t)U)) \\ U_{|t=0} = V^h \\ \partial_t U_{|t=0} = W^h \end{cases} \tag{11}$$

dans $H_N^{d/2,1/2}$ lorsque $V^h \in H_N^{d/2}(\mathbb{R}^d)$ et $W^h \in H_{N-1}^{d/2-1}(\mathbb{R}^d)$. Le point clef consiste à montrer les deux propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll} \bullet & U \in H_N^{d/2,1/2} \Longrightarrow 1/h^2 F(U, h\partial_t U, h\nabla_x U) \in H_{N-1}^{d/2-1,-1/2} \\ \bullet & \left.\begin{array}{l} \Box U + 1/h^2 U \in H_{N-1}^{d/2-1,-1/2} \\ U_{|t=0} \in H_N^{d/2}, \partial_t U_{|t=0} \in H_{N-1}^{d/2-1} \end{array}\right\} \Longrightarrow \chi(t)U \in H_N^{d/2,1/2} \end{array} \tag{12}$$

qui permettent de construire une suite bornée d'approximations successives de la solution cherchée sur $[-1,1]$ lorsque les données sont assez petites. La convergence de cette suite s'obtient ensuite par un raisonnement du même type. La seconde propriété (12) est une manière d'exprimer l'ellipticité 2-microlocale de l'opérateur de Klein-Gordon semi-classique le long de sa variété caractéristique, et est classique (cf. Bourgain [1]). Le point essentiel de la preuve consiste à établir la première assertion (12). Compte-tenu de la structure de F, il suffit de prouver la proposition suivante.

Proposition 5 *Soit $N > \frac{d+3}{2}$.*

i) Les applications $(u,v) \to h^{-2}u.v$ et $(u.v) \to (\partial_t u)(\partial_t v) - (\nabla_x u)(\nabla_x v)$ sont bornées de $H_N^{d/2,1/2} \times H_N^{d/2,1/2}$ dans $H_{N-1}^{d/2-1,-1/2}$.

ii) L'application $(u,v) \to u.v$ est bornée de $H_N^{d/2,1/2} \times H_{N-1}^{d/2-1,-1/2}$ dans $H_{N-1}^{d/2-1,-1/2}$.

Nous allons nous limiter à donner la preuve de la première assertion de i). Soient u, v dans $H_N^{d/2,1/2}$. Nous avons donc

$$(13)\qquad \begin{aligned} \|\Delta^{\pm}_{jk}u\| &\leq C c_{jk}(h) h^{d/2} |\log h|^{-\nu} 2^{-k/2}(1 + 2^j h + 2^k h)^{-N} \\ \|\Delta^{\pm}_{j'k'}v\| &\leq C c'_{j'k'}(h) h^{d/2} |\log h|^{-\nu} 2^{-k'/2}(1 + 2^{j'} h + 2^{k'} h)^{-N} \end{aligned}$$

pour des suites $(c_{jk})_{jk}$, $(c'_{j',k'})_{j',k'}$ vérifiant $\sum_j (\sum_k |c_{jk}|)^2 \leq 1, \sum_{j'} (\sum_{k'} |c'_{j'k'}|)^2 \leq 1$, et nous voulons prouver

(14)

$$\|\Delta^{\pm}_{j''k''}(h^{-2}uv)\| \leq C c''_{j''k''}(h) h^{d/2-1} |\log h|^{-\nu} 2^{k''/2}(1 + 2^{j''} h + 2^{k''} h)^{-N+1}$$

avec une suite $(c''_{j''k''})_{j'',k''}$ vérifiant $\sum_{j''} (\sum_{k''} |c''_{j''k''}|)^2 \leq 1$. Pour cela, nous substituons dans le produit uv les décompositions (9) de u et

$$(15)\qquad v = \sum_{j',k'} \Delta^{+}_{j'k'} v + \sum_{j',k'} \Delta^{-}_{j'k'} v$$

de v. Il nous suffit donc d'estimer par le membre de droite de (14)

$$(16)\qquad \sum_{e,e' \in \{+,-\}} \sum_{j,k} \sum_{j',k'} h^{-2} \|\Delta^{\pm}_{j''k''}(\Delta^{e}_{jk} u \Delta^{e'}_{j'k'} v)\| \ .$$

Le point clef de la preuve est d'obtention d'estimations convenables pour chacun des termes de cette somme. Nous allons prouver :

Théorème 6 *Soient k, k', k'' vérifiant $k' \leq k \leq k''$. Notons $\tilde{\jmath} = \min(j, j', j'')$. On a les inégalités suivantes :*

$$(17)\qquad \begin{aligned} \|\Delta^{\pm}_{j''k''}(\Delta^{+}_{jk} u \Delta^{-}_{j'k'} v)\| \leq{} & C 2^{\tilde{\jmath}\frac{d-1}{2} + \frac{k'}{2} + \frac{k}{2}}(1 + h \inf(2^j, 2^{j'}))(2^{\tilde{\jmath}} h)^{-1/2} \\ & \times \|\Delta^{+}_{jk} u\| \|\Delta^{-}_{j'k'} v\| \end{aligned}$$

$$(18)\qquad \begin{aligned} \|\Delta^{\pm}_{j''k''}(\Delta^{+}_{jk} u \Delta^{+}_{j'k'} v)\| \leq{} & C 2^{\tilde{\jmath}\frac{d-1}{2} + \frac{k'}{2} + \frac{k}{2}}(1 + 2^{\tilde{\jmath}} h)(2^{\tilde{\jmath}} h)^{-1/2} \\ & \times \|\Delta^{+}_{jk} u\| \ \|\Delta^{+}_{j'k'} v\| \ . \end{aligned}$$

Indiquons la signification des inégalités précédentes. Si nous posons $f = \Delta^+_{jk} u$ et $g = \Delta^{\pm}_{j'k'} v$ nous voulons étudier la norme L^2 de

$$(19) \qquad I(\tau,\xi) = \Phi^{\pm}_{j''k''}(\tau,\xi) \int \hat{f}(\tau-\tau',\xi-\xi')\hat{g}(\tau',\xi')d\tau' d\xi' \ .$$

Sur le support de l'intégrant on a

$$(20) \qquad |\tau' \mp \sqrt{h^{-2}+\xi'^2}| \sim 2^{k'} \ , \ |\xi'| \sim 2^{j'}, |\xi-\xi'| \sim 2^j$$

donc

$$(21) \quad |I(\tau,\xi)| \leq \left(\int_A d\tau' d\xi'\right)^{1/2} \left(\int |\hat{f}(\tau-\tau',\xi-\xi')|^2 |\hat{g}(\tau',\xi')|^2 d\tau' d\xi'\right)^{1/2}$$

où A est défini par (20). On en déduit immédiatement

$$(22) \qquad \|I\|_{L^2(d\tau d\xi)} \leq C 2^{\inf(j,j')\frac{d}{2}+\frac{k'}{2}} \|f\| \|g\| \ .$$

Lorsque $j'' \ll j \sim j'$, cette inégalité peut être améliorée en décomposant $\hat{g}$ en $\hat{g} = \sum_Q \hat{g}_Q$ où $\hat{g}_Q = \hat{g}\mathbf{1}_Q(\xi')$, Q décrivant une partition de $\mathbb{R}^d$ en cubes de côté $2^{j''}$. Lorsque ξ' décrit Q et lorsque ξ décrit la boule de centre 0 de rayon $2^{j''}$, $\xi - \xi'$ reste dans un cube $\tilde{Q}$ de même centre que $-Q$, de côté $100.2^{j''}$. Les cubes $\tilde{Q}$ ne se recouvrent qu'en nombre fini, donc la famille des $\hat{f}_{\tilde{Q}} = \hat{f}\mathbf{1}_{\tilde{Q}}$ est presque orthogonale. On décompose alors $I = \sum_Q I_Q$ avec

$$(23) \qquad I_Q(\tau,\xi) = \Phi^{\pm}_{j''k''}(\tau,\xi) \int \hat{f}_{\tilde{Q}}(\tau-\tau',\xi-\xi)\hat{g}_Q(\tau',\xi')d\tau' d\xi' \ .$$

On a

(24)

$$|I_Q(\tau,\xi)| \leq \left(\int_{\substack{(\tau',\xi')\in A \\ \xi'\in Q}} d\tau' d\xi'\right)^{1/2} \left(\int |\hat{f}_{\tilde{Q}}(\tau-\tau',\xi-\xi')|^2 |\hat{g}_Q(\tau',\xi')|^2 d\tau' d\xi'\right)^{1/2}$$

d'où l'on déduit

$$\|I_Q\|_{L^2} \leq C 2^{j''\frac{d}{2}+\frac{k'}{2}} \|f_{\tilde{Q}}\| \ \|g_Q\|$$

$$\|I\| \leq \sum_Q \|I_Q\| \leq C 2^{j''d/2+k'/2} (\sum_{\tilde{Q}} \|f_{\tilde{Q}}\|^2)^{1/2} (\sum_Q \|g_Q\|^2)^{1/2} \leq C 2^{j''d/2+k'/2} \|f\| \|g\| \ .$$

Compte-tenu de (22), on a donc l'inégalité

$$\|I\| \leq C2^{\tilde{j}\frac{d}{2}+\frac{k'}{2}}\|f\|\|g\| \tag{25}$$

qui n'est rien d'autre qu'une version des injections de Sobolev : elle signifie essentiellement que l'on contrôle une norme L^∞ à partir d'une norme L^2 quitte à perdre une demi-dérivée par rapport à chaque variable. Par comparaison, la perte dans les inégalités (17), (18) est plus économique. Le facteur de perte dans (17) s'écrit en effet

$$2^{\tilde{j}\frac{d}{2}+\frac{k'}{2}}\left[2^{\frac{k}{2}-\frac{\tilde{j}}{2}}(1+h\inf(2^j,2^{j'}))(2^{\tilde{j}}h)^{-1/2}\right]. \tag{26}$$

Le terme entre crochets dans cette expression signifie essentielement que l'on peut remplacer la perte d'une demi-dérivée locale, représentée par $2^{\tilde{j}/2}$ par la perte d'une demi-dérivée 2-microlocale, représentée par $2^{k/2}$, modulo une perte supplémentaire en $(1+h\inf(2^j,2^{j'}))(2^{\tilde{j}}h)^{-1/2}$. Cette perte est plus économique, puisqu'elle peut être compensée dès que l'on est en droit d'appliquer à u ou v l'opérateur $|D_t \pm \sqrt{h^{-2}+D_x^2}|^{1/2}$ sans affecter la régularité locale de ces distributions, ce qui est exactement ce que permettent les hypothèses $u, v \in H_N^{d/2,1/2}$. Avant d'indiquer la preuve du thèorème 6, montrons comment il permet de prouver la proposition 5. Nous n'allons donner que l'idée de la preuve, en oubliant les propriétés de sommabilité que doit satisfaire la suite $(c''_{j''k''})_{j'',k''}$ de (14), ainsi que les termes en $\log h$ (qui n'interviennent qu'en relation avec ces propriétés de sommabilité). Nous nous limiterons aussi à la contribution à (16) des termes pour lesquels $e=+, e'=-$, $k' \leq k \leq k''$, $j'' \ll j \sim j'$, les autres termes étant justiciables d'un traitement analogue. Le terme général de (16) se majore compte-tenu de (17) et de (13) par

$$\begin{aligned} &Ch^{-2}2^{j''\frac{d-1}{2}+k'/2+k/2}(1+2^jh)(2^{j''}h)^{-1/2} \\ &\times h^{d/2}2^{-k/2}(1+2^jh+2^kh)^{-N} \\ &\times h^{d/2}2^{-k'/2}(1+2^{j'}h+2^{k'}h)^{-N} \ . \end{aligned}$$

Cette quantité est majorée par $Ch^{d/2-1}2^{k''/2}(1+2^{j''}h+2^{k''}h)^{-N+1}$ si et seulement si on a une estimation uniforme

$$(2^{k''}h)^{-1/2}(2^{j''}h)^{\frac{d-2}{2}}(1+2^jh)(1+2^jh+2^kh)^{-N}(1+2^{j'}h+2^{k'}h)^{-N} \times(1+2^{j''}h+2^{k''}h)^{N-1}\leq C \tag{27}$$

Cette dernière estimation est vraie, si N est fixé assez grand, grâce au lemme suivant :

Lemme 7 *Supposons* $\Delta^{\pm}_{j''k''}(\Delta^{+}_{jk}u\Delta^{-}_{j'k'}v)\not\equiv 0$. *On a alors*

$$2^{k''}\geq\frac{c}{h}(1+2^{\tilde{j}}h)^{-1}\ . \tag{28}$$

Si de plus $k''\gg k,k'$, *on a*

$$2^{k''}h\leq C(1+h\inf(2^j,2^{j'}))\ . \tag{29}$$

Nous renvoyons à [3], [4] pour la preuve de ce lemme, qui consiste à exploiter la courbure de la variété caractéristique de l'équation de Klein-Gordon relativement à la variable radiale (et qui est donc spécifique à Klein-Gordon, en contraste avec le cas de l'équation des ondes). Il suffit alors de remarquer que grâce à (28) le premier terme de (27) est majoré par $C(1+2^{\tilde{j}}h)^{1/2}$. Le fait que (27) soit borné est alors conséquence des inégalités $k'\leq k\leq k'', j''\ll j\sim j'$ et de (29) si N a été pris assez grand.

Remarque : Le fait que le type d'estimation que nous venons de prouver ne fournisse des résultats utilisables que pour des nonlinéarités vérifiant une condition nulle est lié à la perte supplémentaire en $(1+h\inf(2^j,2^{j'}))$ qui apparait dans (17). Nous renvoyons à [6] et à [4] pour une discussion détaillée de ce point.

3 Preuve des estimations non linéaires.

Commençons par prouver le lemme suivant

Lemme 8 *Soit* $F_\pm(\xi,\xi') = \sqrt{h^{-2}+(\xi-\xi')^2} \mp \sqrt{h^{-2}+\xi'^2}$. *Soit* $\Gamma(\tau,\xi,\tau',\xi')$ *une fonction* L^2 *supportée dans le domaine*

$$|\tau-\tau'-\sqrt{h^{-2}+(\xi-\xi')^2}| \le 2^k, |\tau' \pm \sqrt{h^{-2}+\xi'^2}| \le 2^{k'} \tag{30}$$

avec $k' \le k$. *Soit* $I(\tau,\xi) = \int \Gamma(\tau,\xi,\tau',\xi')d\tau' d\xi'$ *et si pour* $\ell \in \mathbb{Z}$ $\chi_\ell^\pm(\xi,\xi') = \mathbf{1}_{\ell 2^k < F_\pm(\xi,\xi') < (\ell+1)2^k}$ *posons*

$$I_\ell(\tau,\xi) = \int \Gamma(\tau,\xi,\tau',\xi')\chi_\ell^\pm(\xi,\xi')d\xi' \ . \tag{31}$$

Il existe une constante universelle $C > 0$ *telle que*

$$\|I\|_{L^2} \le C(\sum_\ell \|I_\ell\|_{L^2}^2)^{1/2} \ . \tag{32}$$

Démonstration : (cas du signe $+$). Il s'agit de montrer que la famille $(I_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$, qui vérifie $I = \sum_\ell I_\ell$, est presque orthogonale dans $L^2(d\tau d\xi)$. Soient ℓ, ℓ' et $(\tau,\xi) \in \mathrm{Supp} I_\ell \cap \mathrm{Supp} I_{\ell'}$. Il existe donc (τ_1',ξ_1') et (τ_2',ξ_2') avec

$$\begin{array}{l} (\tau,\xi,\tau_1',\xi_1') \in \mathrm{Supp}\ \Gamma, (\tau,\xi,\tau_2',\xi_2') \in \mathrm{Supp}\ \Gamma \\ \ell 2^k < F_+(\xi,\xi_1') < (\ell+1)2^k \\ \ell' 2^k < F_+(\xi,\xi_2') < (\ell'+1)2^k \end{array} \tag{33}$$

d'où $(\ell-\ell'-1)2^k < F_+(\xi,\xi_1') - F_+(\xi,\xi_2') < (\ell-\ell'+1)2^k$. Or

$$\begin{aligned} F_+(\xi,\xi_1') - F_+(\xi,\xi_2') &= (\sqrt{h^{-2}+(\xi-\xi_1)'^2} - (\tau-\tau_1')) - (\sqrt{h^{-2}+\xi_1'^2}+\tau_1') \\ &\quad -(\sqrt{h^{-2}+(\xi-\xi_2)'^2} - (\tau-\tau_2')) - (\sqrt{h^{-2}+\xi_2'^2}+\tau_2') \end{aligned}$$

d'où en utilisant (30) avec $(\tau',\xi') = (\tau_1',\xi_1')$ ou (τ_2',ξ_2')

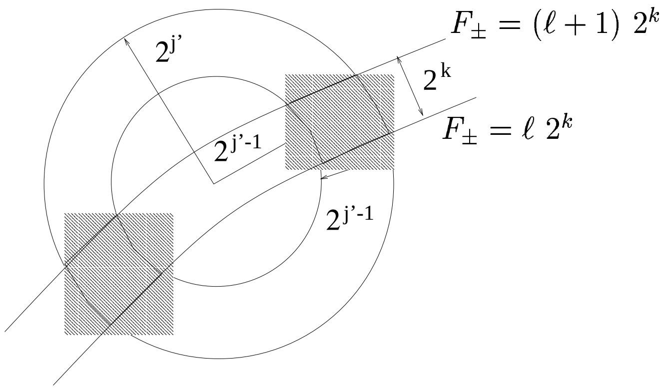
$$|F_+(\xi,\xi_1') - F_+(\xi,\xi_2')| \le 4.2^k$$

Par conséquent $|\ell-\ell'| \le 5$ ce qui termine la preuve.

L'idée principale pour obtenir (17), (18), inspirée de Bourgain [1], consiste à appliquer le lemme précédent avec $\Gamma = \hat{f}(\tau - \tau', \xi - \xi')\hat{g}(\tau', \xi')$, f et g désignant respectivement $\Delta^{+}_{jk}u$ et $\Delta^{\pm}_{j'k'}v$. Les hypothèses (30) sont alors vérifiées et, avec la notation (31),

$$
(34) \qquad |I_\ell(\tau,\xi)| \le 2^{k'/2}\left(\int \chi^{\pm}_{\ell}(\xi,\xi')\mathbf{1}_{|\xi'|\sim 2^{j'}}\mathbf{1}_{|\xi-\xi'|\sim 2^{j}}d\xi'\right)^{1/2} \times\left(\int |\hat{f}(\tau-\tau',\xi-\xi')|^2|\hat{g}(\tau',\xi')|^2\chi^{\pm}_{\ell}(\xi,\xi')d\tau'd\xi'\right)^{1/2} .
$$

Le gain par rapport à l'estimation (20) réside dans le fait que l'intégrale en ξ' est calculée sur un domaine plus petit que dans cette inégalité, domaine obtenu en intersectant une couronne de l'espace des ξ' par la zone comprise entre deux courbes de niveau de la fonction $F_{\pm}$.



Si $F_{\pm}$ pouvait être prise comme coordonnée locale dans le calcul du volume du domaine ci-dessus, et ce de manière uniforme relativement aux divers paramètres, la première intégrale de (34) se majorerait par $C2^{k+(d-1)\inf(j,j')}$. Utilisant le lemme 8, on déduirait de (34) l'inégalité

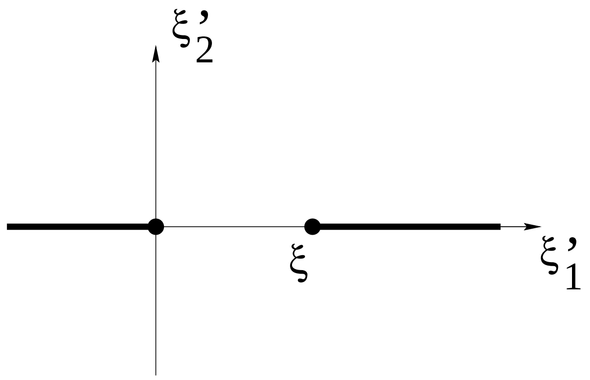
$$
(35) \qquad \|I\| \le C2^{k'/2+k/2}2^{\inf(j,j')\frac{d-1}{2}}\|f\|\|g\| .
$$

Pour pouvoir rendre ce raisonnement rigoureux, on rencontre deux difficultés.

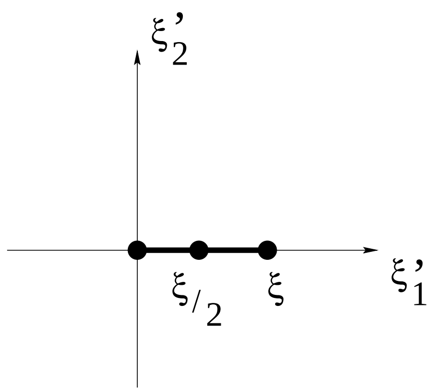
• D'une part, $F_{\pm}$ ne peut pas toujours servir de coordonnée locale. En effet $\xi' \to F_{-}(\xi,\xi')$ a un point critique en $\xi' = \frac{\xi}{2}$, et de plus, même loin des points critiques, $\frac{\partial F_{\pm}}{\partial \xi'}$ peut ne pas admettre des minorations uniformes par rapport aux divers paramètres j, j', j'' et h.

• D'autre part, dans le cas où $j'' \ll j \sim j'$, l'inégalité (35) fait apparaître un terme de perte en $2^{j\frac{d-1}{2}}$, alors que la perte correspondante dans l'inégalité que l'on souhaite obtenir dans le théorème 6 est en $2^{j''\frac{d-1}{2}}$.

Pour traiter le premier des deux points précédents, dessinons l'ensemble des points critiques non seulement de $\xi' \to F_\pm(\xi, \xi')$, mais également des fonctions $\xi' \to F^0_\pm(\xi, \xi') = |\xi - \xi'| \mp |\xi'|$ qui apparaissent comme cas limite des précédentes. La fonction F_+ n'a pas de point critique et F^0_+ admet comme points critiques la droite passant par 0 et ξ, privée du segment $]0, \xi[$:



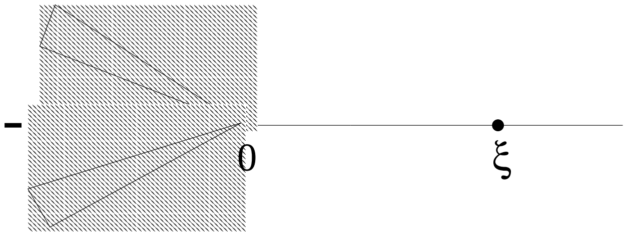
La fonction F_- a un point critique en $\xi' = \frac{\xi}{2}$ et F^0_- a pour points critiques le segment $]0, \xi[$:



Pour calculer le volume du domaine compris entre deux lignes de niveau de $F_\pm$, il est donc nécessaire d'étudier le comportement de cette fonction au voisinage des points critiques précédents. Limitons-nous au cas de F_+ lorsque $j'' \ll j \sim j'$ i.e. lorsque $|\xi|$ est très petit devant $|\xi'|$. Par symétrie nous pouvons aussi supposer $\xi.\xi' \leq 0$ i.e. étudier la situation correspondant à la partie gauche du premier schéma précédent. Procédant de manière analogue à Bourgain [2] écrivons $I(\tau,\xi) = \sum_{r=0}^{+\infty} I^r(\tau,\xi)$ avec

$$I^r(\tau,\xi) = \Phi^{\pm}_{j''k''}(\tau,\xi) \int \hat{f}(\tau-\tau',\xi-\xi')\hat{g}(\tau',\xi')\Omega_r(\xi,\xi')d\tau'd\xi' \tag{36}$$

où Ω_r tronque dans un angle (du projectif) $2^{-r-1} < |ang(\xi,\xi')| < 2^{-r}$ si $r \geq 1$ et dans $|ang(\xi,\xi')| > 1/2$ si $r = 0$. Sur le support de l'intégrant de (36), ξ' reste dans un domaine dont la distance à la ligne de points critiques est uniformément contrôlée.



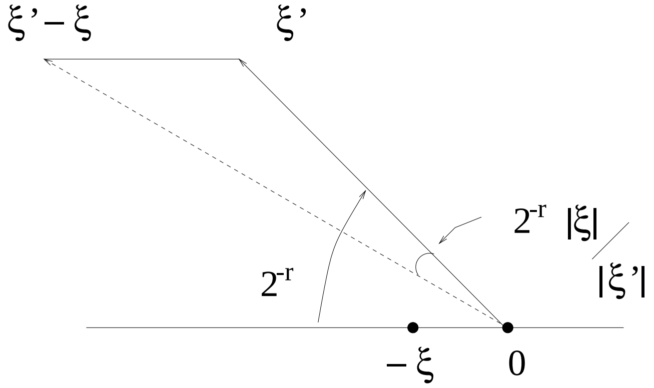
Il nous faut également tenir compte de la seconde difficulté signalée plus haut lorsque $j'' \ll j \sim j'$, en raisonnant comme dans (23), en adaptant toutefois l'argument à la nouvelle situation géométrique. Ecrivons pour cela $1 = \sum_Q \mathbf{1}_Q(\xi')$ où Q décrit une partition de $\mathbb{R}^d$ en domaines de la forme

$$p2^{j''} < |\xi'| < (p+1)2^{j''} \ , \ \xi' \in \gamma_\alpha \ , \tag{37}$$

les $(\gamma_\alpha)_\alpha$ formant une partition de l'espace en cônes d'angle $2^{-r+(j''-j')}$. Par conséquent chaque Q est de longueur $2^{j''}$ par rapport à la direction radiale et $2^{j''-r}$ par rapport aux $d-1$ directions transversales à celle-ci. Pour tout Q de la forme (37) désignons par $\widetilde{Q}$ l'ensemble décrit par $\xi - \xi'$ lorsque ξ décrit la boule de centre 0, de rayon $2^{j''}$, ξ' décrit Q et $|ang(\xi,\xi')|$ est astreint à rester inférieur à 2^{-r} :

$$\widetilde{Q} = \{\xi - \xi'; \xi' \in Q, |\xi| \leq 2^{j''}, |ang(\xi,\xi')| < 2^{-r}\} \ . \tag{38}$$

Les $\widetilde{Q}$ ne se recouvrent alors qu'en nombre fini : le schéma suivant montre en effet que $|ang(\xi,\xi-\xi')| < C\frac{|\xi|}{|\xi'|}2^{-r} \leq C2^{j''-j'-r}$



Par conséquent, lorsque ξ' décrit l'un des cônes γ_α de (37), que $|\xi| \leq 2^{j''}$ et que $|ang(\xi, \xi')| < 2^{-r}$, $\xi' - \xi$ reste dans un cône d'angle $C2^{-r+(j''-j')}$, d'où résulte la propriété de recouvrement fini. Nous pouvons écrire $I^r(\tau, \xi) = \sum_Q I^r_Q(\tau, \xi)$ avec

$$(39) \qquad I^r_Q(\tau, \xi) = \Phi^{\pm}_{j''k''}(\tau, \xi) \int \hat{f}_{\tilde{Q}}(\tau - \tau', \xi - \xi')\hat{g}_Q(\tau', \xi')\Omega_r(\xi, \xi')d\tau' d\xi'$$

en utilisant les notations $\hat{f}_{\tilde{Q}} = \hat{f}\mathbf{1}_{\tilde{Q}}, \hat{g}_Q = \hat{g}\mathbf{1}_Q$. Il ne reste plus alors qu'à appliquer à chaque I^r_Q la décomposition $I^r_Q = \sum_\ell I^r_{Q,\ell}$ introduite dans le lemme 8 en prenant $\Gamma = \Phi^{\pm}_{j''k''}(\tau, \xi)\hat{f}_{\tilde{Q}}(\tau - \tau', \xi - \xi')\hat{g}_Q(\tau', \xi')\Omega_r(\xi, \xi')$. Comme en (34), (35) ce lemme permet de ramener la majoration de $\|I^r_Q\|$ à partir de $\|f_{\tilde{Q}}\|\|g_Q\|$ à la majoration de l'intégrale

$$(40) \qquad \int_{\xi' \in Q} \Omega_r(\xi, \xi')\chi^+_\ell(\xi, \xi')d\xi' \; .$$

Sur le support de l'intégrant, il est alors possible d'obtenir pour $|\frac{\partial F_+}{\partial \xi'}(\xi', \xi')|$ des estimations inférieures et supérieures uniformément contrôlées en fonction des divers paramètres. Des changements de coordonnées adaptés permettent alors de majorer (40) et d'obtenir pour $\|I^r\| \leq \sum_Q \|I^r_Q\|$ une inégalité de la forme

$$(41) \qquad \|I^r\| \leq C 2^{j''\frac{d-1}{2} + \frac{k'}{2} + \frac{k}{2}} 2^{\frac{j'-j''}{2}} \frac{2^{-r\frac{d-3}{2}}}{(1 + 2^r\sigma)} \|f\|\|g\|$$

avec $\sigma = (1+2^{j'}h)^{-1}$. L'inégalité (17) s'obtient en sommant en r les inégalités précédentes.

Remarque : Le terme en $1+2^r\sigma$ au dénominateur de (41) est spécifique de l'équation de Klein-Gordon, et n'apparaitrait pas dans les inégalités similaires pour l'équation des ondes. Il joue un rôle essentiel en petites dimensions ($d=2,3$) puisqu'il assure alors la sommabilité de la série $\sum_r \|I^r\|$ et est donc, en dernier analyse, responsable en partie du gain dans les estimations de solutions de Klein-Gordon par rapport aux solutions de l'équation des ondes.

Références

[1] J. Bourgain : *Fourier transforms restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations*, I, II, Geom. Funct. Anal. 3 (1993) 107-156, 202-262.

[2] J. Bourgain : Appendice à l'article : *Remark on Strichartz Type Inequalities de S. Klainerman et M. Machedon*, IMRN, n°5, (1996), 201-220.

[3] J.-M. Delort : *L'équation de Klein-Gordon à données petites faiblement décroissantes*, Séminaire Equations aux Dérivées partielles, Ecole Polytechnique, 1996-1997, exposé n°V.

[4] J.-M. Delort : *Sur le temps d'existence pour l'équation de Klein-Gordon semi-linéaire en dimension 1*, Bull. Soc. Math. Fr. 125, (1997), 269-311.

[5] J.-M. Delort : *Temps d'existence pour l'équation de Klein-Gordon semi-linéaire à données petites périodiques*, Amer. J. Math. 120, (1998), 663-689.

[6] J.-M. Delort et D. Fang : *Almost global existence for solutions of semilinear Klein-Gordon equations with small weakly decaying Cauchy data*, prépublication, (1998).

[7] L. Hörmander : *The lifespan of classical solutions of non-linear hyperbolic equations*, Springer Lecture Notes in Math. 1256, (1987), 214-280.

[8] L. Hörmander : *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Mathématiques et Applications 26, Springer, (1997).

[9] M. Keel et T. Tao : *Small data blow-up for semilinear Klein-Gordon equations*, Amer. J. Math., 121, n°3, (1999), 629-669.

[10] S. Klainerman : *Global existence of small amplitude solutions to non-linear Klein-Gordon equations in four space-time dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. 38, (1985) 631-641.

[11] S. Klainerman et M. Machedon : *Smoothing estimates for null forms and the local existence theorem*, Comm. Pure Appl. Math. 46, n°9, (1993), 1221-1268.

[12] S. Klainerman et M. Machedon : *Smoothing estimates for null forms and applications*, Duke Math. J.81, (1995-1996) 99-133.

[13] G. Lebeau : Communication personnelle.

[14] K. Moriyama, S. Tonegawa et Y. Tsutsumi : *Almost global existence of solutions for the quadratic semilinear Klein-Gordon equation in one space dimension*, Funkcialaj Ekvacioj 40, n°2, (1997), 313-333.

[15] T. Ozawa, K. Tsutaya et Y. Tsutsumi : *Global existence and asymptotic behaviour of solutions for the Klein-Gordon equations with quadratic nonlinearity in two space dimensions*, Math. Z. 222, (1996), 341-362.

[16] J. Shatah : *Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations*, Comm. Pure Appl. Math. 38, (1985), 685-696.

[17] J.C. H. Simon et E. Taflin : *The Cauchy problem for non linear Klein-Gordon equations*, Commun. Math. Phys 152, (1993), 433-478.

[18] B. Yordanov : *Blow-up for the one dimensional Klein-Gordon equations with a cubic nonlinearity*, preprint.

Jean-Marc Delort
Université Paris-Nord
Institut Galilée
Av. Jean-Baptiste Clément
F-93430 - Villetaneuse