SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1999-2000

Albert Cohen

Ondelettes, espaces d'interpolation et applications

Séminaire É. D. P. (1999-2000), Exposé n° I, 12 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1999-2000____A1_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Ondelettes, espaces d'interpolation et applications

Albert Cohen
Laboratoire d'Analyse Numérique
Université P. & M. Curie, Paris

Résumé

Nous établissons des résultats d'interpolation non-standards entre les espaces de Besov et les espaces L^1 et BV, avec des applications aux lemmes de régularité en moyenne et aux inégalités de type Gagliardo-Nirenberg. La preuve de ces résultats utilise les décompositions dans des bases d'ondelettes.

1. Introduction

De nombreux classes d'espaces fonctionels - Sobolev, Hölder, Besov - peuvent être caractérisés par des methodes d'analyse harmonique: séries de Fourier, bases d'ondelettes, décomposition de Littlewood-Paley, approximation par des fonctions splines. De telles caractérisations sont utiles dans de multiples contextes tels que l'étude des opérateurs, l'analyse théorique et numérique des équations aux dérivées partielles.

Les espaces L^1 et $W^{1,1}$ sont "rebelles" à de telles caractérisations, au sens où ils n'admettent pas de base inconditionelle: pour toute base $(e_n)_{n\geq 0}$, il est possible de choisir une fonction f appartenant à un tel espace et dont la décomposition

$$f = \sum_{n\geq 0} f_n e_n \tag{1}$$

est "instable" au sens où il existe une série $\sum_{n\geq 0} g_n e_n$ avec $|g_n| \leq |f_n|$ pour tout n, qui ne converge vers aucun élément du même espace. Autrement dit de tels espaces ne peuvent être caractérisés par une propriété portant sur la suite des modules $(|f_n|)_{n\geq 0}$. Il en est bien sur de même pour l'espace BV qui n'est pas séparable.

Il est néammoins possible d'établir des "presque-caractérisations" de ces espaces en termes d'analyse harmonique. Un exemple frappant concerne l'espace BV des fonctions à variation bornée. On considère la décomposition d'une fonction $f \in L^1([0,1]^d)$ dans une base d'ondelettes

$$f = \sum_{I \in \mathcal{D}} f_I \psi_I. \tag{2}$$

Nous rappelons que de telles bases sont naturellement indexées par l'ensemble $\mathcal{D} := \{I := 2^{-j}([0,1]^d + k),\ j \geq 0,\ k \in \{0, \cdots, 2^j - 1\}^d\}$ des cubes dyadiques (ψ_I est localisée autour de I), et renvoyons à [11] ou [7] pour une introduction générale sur les ondelettes. On choisit ici de normaliser les fonctions de bases dans BV, i.e. $\|\psi_I\|_{BV} = 1$ indépendemment de $I \in \mathcal{D}$. On a alors le résultat suivant dont la preuve se trouve dans [5] dans le cas du système de Haar ou dans [6] pour des ondelettes à support compact plus générales:

Théoreme 1.1 *Pour tout $f \in BV$, la suite des coefficients $(f_I)_{I \in \mathcal{D}}$ est dans l'espace faible $w\ell^1(\mathcal{D})$.*

Plus précisément, il existe $C > 0$ telle que pour tout $f \in BV$ et $\varepsilon > 0$

$$\#\{I\,;\,|f_I| \geq \varepsilon\} \leq C\|f\|_{BV}\varepsilon^{-1}. \tag{3}$$

Comme d'autre part il est clair que $(f_I)_{I \in \mathcal{D}} \in \ell^1(\mathcal{D})$ entraine $f \in BV$, on a obtenu l'encadrement suivant pour l'espace discret $bv(\mathcal{D})$ des suites de coefficients d'ondelettes des fonctions de BV:

$$\ell^1(\mathcal{D}) \subset bv(\mathcal{D}) \subset w\ell^1(\mathcal{D}) \tag{4}$$

De tels encadrements fournissent un accès simple à des résultats d'analyse, ainsi l'inégalité de Sobolev "précisée" en dimension $d = 2$

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}} \|f\|_{BV}. \tag{5}$$

Nous renvoyons à [6] pour l'interprétation et la preuve détaillée de cette inégalite dans sa version homogène sur $\mathbb{R}^2$. La version ci-dessus s'obtient simplement en remarquant que les espaces L^2 et l'espace de Besov $B^{-1}_{\infty,\infty}$ sont respectivement caractérisés par l'appartenance à ℓ^2 et ℓ^∞ des suites $(f_I)_{I \in \mathcal{D}}$, et en utilisant l'inégalité

$$\|(f_I)\|_{\ell^2}^2 \leq \|(f_I)\|_{\ell^\infty} \|(f_I)\|_{w\ell^1}, \tag{6}$$

où $\|(f_I)\|_{w\ell^1} := \sup_{\varepsilon>0} \varepsilon \#\{I\,;\, |f_I| \geq \varepsilon\}$. Notons qu'il n'existe à ce jour aucune autre preuve de ce résultat. L'encadrement (4), permet d'interpréter cette inégalité comme une conséquence d'un résultat d'*interpolation* suivant la méthode réelle de Lions-Peetre (voir [1]): on a en effet

$$\ell^2 = [\ell^\infty, \ell^1]_{1/2,2} \subset [\ell^\infty, bv]_{1/2,2} \subset [\ell^\infty, w\ell^1]_{1/2,2} = \ell^2, \tag{7}$$

et par conséquent l'identité

$$L^2 = [B^{-1}_{\infty,\infty}, BV]_{1/2,2}. \tag{8}$$

Dans cet article nous allons tenter de cerner les possibilités d'une telle approche afin d'obtenir des résultats d'interpolation plus généraux entre les espaces de Sobolev-Besov et l'espace L^1 où l'espace BV. La difficulté qui apparaît est que la caractérisation par ondelettes des espaces de Besov généraux fait intervenir les normes ℓ^p des coefficients f_I pénalisés par des poids multiplicatifs $|I|^s$ où $|I| := \mathrm{Vol}(I)$, et les encadrements entre ℓ^1 et $w\ell^1$ du type ci-dessus sont alors mal adaptés. On est alors amené à généraliser les espaces ℓ^p et l'espace $w\ell^p$ de la manière suivante.

Définition 1.2 *Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. L'espace ℓ^p_γ est constitué des suites $(f_I)_{I\in\mathcal{D}}$ telles que $(|I|^{-\gamma} f_I)_{I\in\mathcal{D}} \in \ell^p(\mathcal{D}, |I|^\gamma)$, i.e.*

$$\sum_{I\in\mathcal{D}} |I|^{\gamma - p\gamma} |f_I|^p < \infty. \tag{9}$$

L'espace $w\ell^p_\gamma$ est constitué des suites $(f_I)_{I\in\mathcal{D}}$ telles que $(|I|^{-\gamma} f_I)_{I\in\mathcal{D}} \in w\ell^p(\mathcal{D}, |I|^\gamma)$, i.e. il existe $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{|f_I| \geq |I|^\gamma \varepsilon} |I|^\gamma \leq C\varepsilon^{-p}. \tag{10}$$

Dans le cas $\gamma = 0$ cette définition redonne clairement les espaces ℓ^p et $w\ell^p$ classique. Notons d'autre part que ℓ^1_γ coïncide avec ℓ^1 pour tout γ, mais que $w\ell^1_\gamma$ diffère de $w\ell^1$. Nous serons amené à poser la question générale suivante:

Si les ondelettes ψ_I sont normalisées dans $X = L^1$ ou BV, pour quelles valeurs de γ a-t-on la propriété $f \in X \Rightarrow (f_I)_{I\in\mathcal{D}} \in w\ell^1_\gamma(\mathcal{D})$?

Nous étudions tout d'abord l'espace L^1 dans §2 et établissons des résultats d'appartenance à $w\ell^1_\gamma$ pour certaines valeurs de γ. Une application de ces résultats concerne les lemmes de régularité en moyenne. Nous revenons ensuite sur l'espace BV dans §3 et annoncons des résultats analogues dont la preuve sera détaillée dans [4] et qui permettent d'aboutir à une généralisation de l'inégalité (5) en toute dimension. Pour simplifier la présentation, nous travaillerons sur le cube unité $Q = [0,1]^d$ et avec les ondelettes de Haar, dont nous rappelons ici la définition précise: partant de la fonctions $\psi^0 = \chi_{[0,1]}$ et $\psi^1 := \chi_{[0,1/2]} - \chi_{[1/2,1]}$, on construit $2^d - 1$ ondelettes multidimensionelles

$$\psi^e = \psi^{e_1}(x_1)\cdots\psi^{e_d}(x_d), \quad e = (e_1,\cdots,e_d) \in E := \{0,1\}^d - (0,\cdots,0).$$

La base de Haar multidimensionelle est alors constituée de la fonction χ_Q et des fonctions $\psi^e(2^j\cdot -k)$, $e \in E$, $j \geq 0$, $k \in \{0,\cdots,2^j-1\}^d$. Ces fonctions peuvent être réindexées suivant $(\psi_I^e)_{I\in\mathcal{D},e\in E}$ où $I = 2^{-j}(Q+k)$ est exactement le support de ψ_I^e. Afin d'alleger les notations nous posons $f_I = (f_I^e)_{e\in E}$ et $\psi_I = (\psi_I^e)_{e\in E}^T$ de sorte que l'on peut écrire

$$f = \sum_{I\in\mathcal{D}} f_I\psi_I,$$

en incluant la fonction χ_Q dans ψ_I lorsque $I = Q$. Tous nos résultats peuvent être étendus à des ondelettes à support compact plus générales par un argument du a Y. Meyer que le lecteur pourra trouver dans [6]. Rappelons que pour des ondelettes de régularité C^r, $r > s$, on a la caractérisation

$$\begin{aligned} f \in B^s_{p,p} \quad &\Leftrightarrow \textstyle\sum_{j\geq 0}[2^{sj}\|\sum_{|I|=2^{-jd}} f_I\psi_I\|_{L^p}]^p < \infty \\ &\Leftrightarrow \textstyle\sum_{I\in\mathcal{D}} |I|^{-ps/d}|f_I|^p\|\psi_I\|^p_{L^p} < \infty \\ &\Leftrightarrow (|I|^{-s/d}|f_I|\|\psi_I\|_{L^p}) \in \ell^p. \end{aligned} \tag{11}$$

avec les modifications usuelles si $p = \infty$ (voir [11] ou [3]).

2. Résultats autour de l'espace L^1

Dans cette section, on normalise les ondelettes ψ_I dans L^1, si bien que l'on a la propriété

$$(f_I) \in \ell^1 \Rightarrow f := \sum_{I\in\mathcal{D}} f_I\psi_I \in L^1. \tag{12}$$

Cela signifie aussi que les coefficients f_I sont donnés par $f_I = \langle f, \psi_I^* \rangle$ où les ondelettes duales ψ_I^* sont normalisées dans L^∞. On a alors le résultat suivant

Théorème 2.1 *Soit γ tel que $\gamma > 1$ ou $\gamma < 0$. On a alors la propriété $f \in L^1 \Rightarrow (f_I) \in w\ell^1_\gamma$. Plus précisément, il existe une constante $C = C(\gamma)$ telle que pour tout $f \in L^1$ et $\varepsilon > 0$,*

$$\sum_{|f_I| \geq \varepsilon |I|^\gamma} |I|^\gamma \leq C \|f\|_{L^1} \varepsilon^{-1}. \tag{13}$$

Preuve: on remarque tout d'abord que

$$|f_I| = |\langle f, \psi_I^* \rangle| \leq C a_I \tag{14}$$

où $a_I := \int_I |f|$. Nous allons en fait montrer que la suite (a_I) est dans $w\ell^1_\gamma$ si $\gamma > 1$ ou $\gamma < 0$. Pour $f \in L^1$ et $\varepsilon > 0$ on définit

$$\Lambda_\varepsilon := \{I \in \mathcal{D} \; ; \; a_I > \varepsilon |I|^\gamma\}, \tag{15}$$

et on va estimer $\sum_{I \in \Lambda_\varepsilon} |I|^\gamma$.

Dans le cas $\gamma > 1$, on définit $\Lambda_\varepsilon^{\max}$ l'ensemble des cubes maximaux de Λ_ε, i.e. les cubes $I \in \Lambda_\varepsilon$ tels que pour tout $J \in \Lambda_\varepsilon$, $I \subset J$ entraine $I = J$. On a clairement

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{I \in \Lambda_\varepsilon} |I|^\gamma &\leq \textstyle\sum_{I \in \Lambda_\varepsilon^{\max}} \sum_{J \subset I} |J|^\gamma \\
&= \textstyle\sum_{I \in \Lambda_\varepsilon^{\max}} \sum_{j \geq 0} \sum_{J \subset I, |J| = 2^{-jd}|I|} |J|^\gamma \\
&= \textstyle\sum_{I \in \Lambda_\varepsilon^{\max}} |I|^\gamma \sum_{j \geq 0} 2^{(1-\gamma)dj} \\
&\leq C \textstyle\sum_{I \in \Lambda_\varepsilon^{\max}} |I|^\gamma \\
&\leq C\varepsilon^{-1} \textstyle\sum_{I \in \Lambda_\varepsilon^{\max}} a_I.
\end{aligned}$$

On remarque alors que les cubes de $\Lambda_\varepsilon^{\max}$ sont nécessairement disjoints si bien que $\sum_{I \in \Lambda_\varepsilon^{\max}} a_I \leq \|f\|_{L^1}$ ce qui prouve (13).

Dans le cas $\gamma < 0$, on définit $\Lambda_\varepsilon^{\min}$ l'ensemble des cubes minimaux de Λ_ε, i.e. les cubes $I \in \Lambda_\varepsilon$ tels que pour tout $J \in \Lambda_\varepsilon$, $J \subset I$ entraine $I = J$. On remarque d'autre part que pour $|I| \leq C(f, \varepsilon)$ on a toujours $a_I \leq \varepsilon |I|^\gamma$, si bien que Λ_ε est nécessairement un ensemble fini. On a donc

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{I \in \Lambda_\varepsilon} |I|^\gamma &\leq \textstyle\sum_{I \in \Lambda_\varepsilon^{\min}} \sum_{J \text{ t.q } I \subset J} |J|^\gamma \\
&= \textstyle\sum_{I \in \Lambda_\varepsilon^{\min}} |I|^\gamma \sum_{j \geq 0} 2^{\gamma dj} \\
&\leq C \textstyle\sum_{I \in \Lambda_\varepsilon^{\min}} |I|^\gamma \\
&\leq C\varepsilon^{-1} \textstyle\sum_{I \in \Lambda_\varepsilon^{\min}} a_I.
\end{aligned}$$

On conclut de même en remarquant que les cubes de $\Lambda_\varepsilon^{\min}$ sont nécessairement disjoints. $\square$

Remarque 2.2 Il est possible de construire des contre-exemples qui montrent que le résultat du théorème 2.1 est faux si $0 \leq \gamma \leq 1$ (voir [4]). En particulier, la propriété $w\ell^1$ (i.e. $\gamma = 0$) n'est pas vérifiée.

Nous allons utiliser ce résultat pour déduire des propriétés d'interpolation entre les espaces de Besov et l'espace L^1. Sous les hypothèses de normalisation L^1 des ondelettes, on a $\|\psi_I\|_{L^p} \sim |I|^{1/p-1}$ et les espaces de Besov $B^s_{p,p}$ sont alors caractérisés par la propriété $(|I|^{-s/d+1/p-1}|f_I|) \in \ell^p$, i.e. pour $p > 1$

$$f \in B^s_{p,p} \Leftrightarrow (f_I) \in \ell^p_\gamma, \quad \gamma = 1 + sp^*/d. \tag{16}$$

Le théorème 2.1 nous permet alors d'obtenir aisément le résultat suivant.

Théorème 2.3 *Soit γ tel que $\gamma > 1$ ou $\gamma < 0$, (s,p) et (t,q) tels que $1 < q < p$ et $sp^*/d = tq^*/d = \gamma - 1$. On a alors*

$$[B^s_{p,p}, L^1]_{\theta,q} = B^t_{q,q}, \quad 1/q = \theta + (1-\theta)/p. \tag{17}$$

Preuve: Il suffit d'utiliser l'identité

$$\ell^q_\gamma = [\ell^p_\gamma, \ell^1_\gamma]_{\theta,q} = [\ell^p_\gamma, w\ell^1_\gamma]_{\theta,q}, \tag{18}$$

et l'encadrement fourni par les propriétés (24) et (13). $\square$

Remarque 2.4 Ces résultats restent valables en remplacant l'espace L^1 par l'espace $\mathcal{M}$ des mesures. Il faut bien entendu utiliser des ondelettes continues pour donner un sens aux produits $\langle f, \psi_I^* \rangle$.

Une application du théorème 2.3, proposée dans [8], concerne les lemmes de régularité en moyenne introduits dans [10]. Rappelons tout d'abord la version la plus simple de ces lemmes dont la démonstration se fait aisément en utilisant la transformée de Fourier.

Théorème 2.4 ([10]) *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, $f(x,y) \in L^2(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}\times\Omega)$ telle que $y.\nabla_x f \in L^2(\mathbb{R}^{\mathrm{d}} \times \Omega)$. Alors la fonction g définie par*

$$g(x) := \int_\Omega f(x,y)dy, \tag{19}$$

appartient à l'espace $H^{1/2}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$.

La généralisation de ce résultat au cadre L^p, $p \neq 2$, i.e. sous l'hypothèse $f(x,y) \in L^p(\mathbb{R}^{\mathrm{d}} \times \Omega)$ telle que $y.\nabla_x f \in L^p(\mathbb{R}^{\mathrm{d}} \times \Omega)$, a été étudiée dans [9] puis dans [2] qui fournit la régularité optimale: si $1 < p < \infty$, alors

$$g \in B^s_{p,p}, \quad s = \min\{1/p, 1/p^*\}. \tag{20}$$

Notons que dans le cas $p = \infty$ et $p = 1$ on a seulement la propriété évidente $g \in L^p$, i.e. on ne gagne pas de régularité en moyennant. Pour $1 < p < 2$ ou $2 < p < \infty$, l'idée est de se ramener à un résultat d'interpolation par l'astuce suivante: on considére l'équation linéaire

$$f + y.\nabla_x f = h, \tag{21}$$

et l'opérateur T qui à la donnée h associe $g(x) = \int_\Omega f(x,y)dy$, et on remarque que le résultat de régularité en moyenne est équivalent au fait que T opère continuement de $L^p(\mathbb{R}^{\mathrm{d}} \times \Omega)$ dans $B^s_{p,p}(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$.

Le cas $2 < p < \infty$ se traite facilement en remarquant que T opère continuement de L^2 dans $H^{1/2}$ et de L^∞ dans lui même et par conséquent dans $B^0_{\infty,\infty}$ qui le contient. On utilise alors le résultat d'interpolation classique

$$B^{1/p}_{p,p} = [B^0_{\infty,\infty}, H^{1/2}]_{2/p,p}. \tag{22}$$

Dans le cas $1 < p < 2$, on remarque que T opère continuement de L^2 dans $H^{1/2}$ et de L^1 dans L^1, et on peut conclure par le théorème 2.3 qui nous fournit le résultat d'interpolation

$$B^{1/p^*}_{p,p} = [L^1, H^{1/2}]_{2/p^*,p}. \tag{23}$$

Remarque 2.5 Ce résultat de régularité est optimal au sens suivant: Pour tout $q < p$, il existe une fonction $f(x,y) \in L^p(\mathbb{R}^d \times \Omega)$ telle que $y.\nabla_x f \in L^p(\mathbb{R}^d \times \Omega)$ et $g \notin B^s_{p,q}$ (voir [8]).

Remarque 2.6 La preuve proposée dans [2] pour aboutir au même résultat de régularité pour $1 < p < 2$ utilisait l'espace de Hardy H^1 faute de résultat d'interpolation disponible entre L^1 et les Besov.

3. Résultats autour de l'espace BV

Dans cette section on normalise les ondelettes dans BV, si bien que l'on a la propriété

$$(f_I) \in \ell^1 \Rightarrow f := \sum_{I \in \mathcal{D}} f_I \psi_I \in BV. \tag{24}$$

Les ondelettes duales ψ_I^* sont alors normalisées suivant $\|\psi_I^*\|_{L^\infty} \sim |I|^{-1/d}$. A l'exception du cas $I = Q$, toutes les ondelettes ψ_I^* sont d'intégrale nulle. En notant $m_I(f) := |I|^{-1} \int_I f$ la moyenne de f sur I on a alors si f est régulière l'estimation pour tout $I \neq Q$,

$$\begin{aligned} |f_I| &= |\langle f, \psi_I^* \rangle| \\ &= |\langle f - m_I(f), \psi_I^* \rangle| \\ &\le |I|^{-1/d} \|f - m_I(f)\|_{L^1(I)} \\ &\le |I|^{-1-1/d} \int_{I \times I} |f(x) - f(y)| dx dy \\ &\le C \int_I |\nabla f|, \end{aligned} \tag{25}$$

et par conséquent pour tout $f \in BV$

$$|f_I| \le C v_I \tag{26}$$

où v_I représente la variation de f sur I. Cette estimation nous permet d'aboutir à un premier résultat similaire au théorème 2.1

Théorème 3.1 *Soit γ tel que $\gamma > 1$ ou $\gamma < 0$. On a alors la propriété $f \in BV \Rightarrow (f_I) \in w\ell^1_\gamma$. Plus précisément, il existe une constante $C = C(\gamma)$ telle que pour tout $f \in BV$ et $\varepsilon > 0$,*

$$\sum_{|f_I| \ge \varepsilon |I|^\gamma} |I|^\gamma \le C \|f\|_{BV} \varepsilon^{-1}. \tag{27}$$

Preuve: On procède exactement comme dans la preuve du théorème 2.1 en remplacant les a_I par les v_I et en utilisant le fait que pour un ensemble E de cubes disjoints on a $\sum_{I\in E} v_I \leq |f|_{BV}$. Ceci nous donne la propriété

$$\sum_{|f_I|\geq\varepsilon|I|^\gamma, I\neq Q} |I|^\gamma \leq C|f|_{BV}\varepsilon^{-1}, \tag{28}$$

qui entraine (27) en remarquant simplement que $|f_Q| \leq C\|f\|_{L^1}$. $\square$

Notons que ce résultat n'inclut pas le théorème 1.1 qui correspond au cas $\gamma = 0$. On a en fait le résultat suivant dont la preuve, nettement plus délicate que les précédentes, est détaillée dans [4].

Théorème 3.2 *Le résultat du théorème 3.1 reste vrai pour* $0 \leq \gamma < 1 - 1/d$.

L'estimation (26) est insuffisante pour prouver le théorème 3.2 au sens où la suite (v_I) n'appartient pas en général à $w\ell^1_\gamma$ si $0 \leq \gamma \leq 1$. Pour s'en convaincre dans le cas $\gamma = 0$, il suffit de considérer les fonctions $f_k = 2^{k(d-1)}\chi_{Q_k}$ où $Q_k = [0, 2^{-k}]^d$. Ces fonctions vérifient $|f_k|_{BV} \leq C(d)$ indépendemment de k, et puisqu'il y a k cubes dyadiques de $\mathcal{D}$ contenant Q_k, on a

$$\#\{I \; ; \; v_I \geq C(d)\} \geq k \geq \frac{k}{C(d)}|f|_{BV}. \tag{29}$$

Ceci contredit (27) dans le cas $\gamma = 0$, puisque k peut être choisi arbitrairement grand. On a en fait recours à l'estimation plus fine

$$|f_I| \leq |I|^{-1-1/d} \int_{I\times I} |f(x) - f(y)|dxdy := w_I, \tag{30}$$

et on prouve alors que la suite (w_I) appartient à $w\ell^1_\gamma$ pour $\gamma < 1 - 1/d$.

Remarque 3.3 Il est possible de construire des contre-exemples qui montrent que (27) est faux si $1 - 1/d \leq \gamma \leq 1$ (voir [4]).

Remarque 3.4 Il est interessant d'observer le cas d'une fonction indicatrice $f = \chi_\Omega$ où Ω est un ensemble de périmètre fini. Dans ce cas, on remarque qu'à l'échelle 2^{-j}, il y a au plus $C2^{(d-1)j}\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega) \sim C2^{(d-1)j}|f|_{BV}$

cubes I pour lesquels f_I est non nul (ce sont tout simplement les cubes qui interceptent $\partial\Omega$) et que l'on a alors l'estimation $|f_I| \leq C2^{-j}$. On peut ainsi montrer "à la main" que la propriété (27) est vérifiée pour de telles fonctions si et seulement si $\gamma \neq 1-1/d$. Il serait alors tentant d'invoquer la formule de la co-aire pour en déduire le résultat pour une fonction de BV quelconque. Rappelons que cette formule identifie la variation totale à l'intégrale des périmètres des ensembles de niveaux $\Omega_\lambda := \{x \, ; \, f(x) \geq \lambda\}$ suivant

$$\int |\nabla f| = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega_\lambda) d\lambda \sim \int_{\mathbb{R}} |\chi_{\Omega_\lambda}|_{BV} d\lambda. \tag{31}$$

Comme pour f bornée inférieurement, on peut écrire

$$f(x) = \int_{\min(f)}^{+\infty} \chi_{\Omega_\lambda}(x) d\lambda + \min(f), \tag{32}$$

le résultat prouvé sur les fonctions indicatrices parait alors s'étendre à toute fonction de BV régulière (donc bornée inférieurement) et par conséquent à toute fonction de BV. Une telle approche échoue car la quasi-norme

$$\|(f_I)\|_{w\ell^1_\gamma} := \sup_{\varepsilon>0} \varepsilon \sum_{|f_I| \geq \varepsilon |I|^\gamma} |I|^\gamma, \tag{33}$$

ne vérifie pas l'inégalité triangulaire et on ne peut pas utiliser (31) et (32) pour "intégrer" (27) sur les χ_{Ω_λ}.

Remarque 3.5 La différence entre la condition $\gamma \notin [0,1]$ pour L^1 ou $\mathcal{M}$ et $\gamma \notin [1-1/d, 1]$ apparait en dimension $d > 1$. Elle reflète le fait qu'en plusieurs dimensions, le gradient d'une fonction de BV n'est pas un vecteur de mesures arbitraires puisqu'elles satisfont les relations de Schwarz au sens des distributions. En ce sens l'espace BV est plus "contraint" que l'espace $\mathcal{M}^d$.

Nous terminons par les résultats d'interpolation et les inégalités de type Gagliardo-Nirenberg qui se déduisent de l'encadrement $\ell^1 \subset bv \subset w\ell^1_\gamma$. Sous les hypothèses de normalisation L^1 des ondelettes, on a $\|\psi_I\|_{L^p} \sim |I|^{1/p-1-1/d}$ et les espaces de Besov $B^s_{p,p}$ sont alors caractérisés par la propriété $(|I|^{-(s+1)/d+1/p-1}|f_I|) \in \ell^p$, i.e. pour $p > 1$

$$f \in B^s_{p,p} \Leftrightarrow (f_I) \in \ell^p_\gamma, \;\; \gamma = 1 + (s+1)p^*/d. \tag{34}$$

On obtient ainsi de façon similaire au cas L^1 le résultat suivant.

Théorème 3.6 *Soit γ tel que $\gamma > 1$ ou $\gamma < 1 - 1/d$, (s,p) et (t,q) tels que $1 < q < p$ et $(s+1)p^*/d = (t+1)q^*/d = \gamma - 1$. On a alors*

$$[B^s_{p,p}, BV]_{\theta,q} = B^t_{q,q}, \quad 1/q = \theta + (1-\theta)/p. \tag{35}$$

Remarque 3.7 Ce résultat reste valable en remplacant BV par $W^{1,1}$. Il faut alors utiliser des ondelettes contenue dans $W^{1,1}$ afin d'avoir la propriété $(f_I) \in \ell^1 \Rightarrow f \in W^{1,1}$.

On peut tirer de ces résultats de nombreuses inégalités généralisant (5). Par exemple

$$\|f\|^2_{H^s} \leq C\|f\|_{B^{2s-1}_{\infty,\infty}}\|f\|_{BV}, \tag{36}$$

valable en toute dimension pour $s < 1/2$ et qui montre en particulier que (5) est vérifiée en toute dimension. On notera que $s = 1/2$ est la valeur critique au dessus de laquelle les fonctions indicatrices χ_Ω ne sont plus contenues dans H^s.

References

[1] Bergh, J. and J. Löfström, *Interpolation spaces*, Springer Verlag, 1976.

[2] Bezard, M., Régularité L^p précisée des moyennes dans les équations de transport, Bull. Soc. Math. France **22**, 29-76, 1994.

[3] Cohen, A., Wavelet methods in numerical analysis, in the Handbook of Numerical Analysis, vol. VII, P.-G. Ciarlet et J.-L. Lions eds., Elsevier, Amsterdam, 2000.

[4] Cohen, A., W. Dahmen, I. Daubechies and R. DeVore, Harmonic analysis of the space BV, preprint Laboratoire d'Analyse Numérique, Université P. & M. Curie, Paris, 2000.

[5] Cohen, A., R. DeVore, P. Petrushev and H. Xu, Non linear approximation and the space $BV(\mathbb{R}^2)$, Amer. J. Math. **121**, 587-628, 1999.

[6] Cohen, A., Y. Meyer and F. Oru, Improved Sobolev inequalities, actes seminaires X-EDP, 1998

[7] Daubechies, I., *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, 1992.

[8] DeVore, R. and G. Petrova, The averaging lemma, preprint Dept. Math., Univ. South. Carolina, Novembre 1999.

[9] DiPerna, R., P.-L. Lions and Y. Meyer, L^p regularity of velocity averages, Annales de l'IHP, Analyse non linéaire **8**, 271-288, 1991.

[10] Golse, F., P.-L. Lions, B. Perthame and Sentis, Regularity of the moments of the solution of a transport equation, J. Funct. Anal. **76**, 110-125, 1988.

[11] Meyer, Y., *Ondelettes et Opérateurs*, Hermann, Paris, 1990.