Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1999-2000

Luc Robbiano et Claude Zuily

Front d'onde à l'infini pour l'équation de Schrödinger

Séminaire É. D. P. (1999-2000), Exposé n° XVI, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1999-2000____A16_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Front d'onde à l'infini pour l'équation de Schrödinger

Luc Robbiano
Université de Versailles-St Quentin
45, avenue des États Unis 78035 Versailles

Claude Zuily
Université Paris Sud
Département de Mathématiques
91405 Orsay cedex France

0 Introduction

On s'intéresse dans cet exposé aux proriétés de régularité des solutions du problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger à coefficients variables,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + i\Delta_g u = 0 \ , \ t > 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \ , \end{array} \right. \tag{0.1}$$

où Δ_g désigne le Laplacien relatif à une métrique g sur $\mathbb{R}^n$.

Une des caractéristiques de cette équation, connue sous le nom de "vitesse infinie de propagation", réside dans le fait que la régularité de la solution de (0.1) pour des temps $t > 0$ dépend du comportement à l'infini de la donnée : oscillation, décroissance... De nombreux travaux ont décrit ce phénomène en termes microlocaux (voir [D1], [D2], [Sh], [CKS] dans le cas C^∞, [RZ 1] [RZ 2] dans le cas analytique). Dans tous ces travaux les énoncés étaient du type "telle propriété de u_0 à l'infini" implique "telle régularité de u pour $t > 0$" ; ils mettaient donc en jeu deux informations distinctes. Dans un article paru en 1999 au Duke Math-Journal, J. Wunsch [W], en s'appuyant sur les travaux de R. Melrose, proposait de réunir ces deux types d'information dans un objet, le "front d'onde qsc C^∞", où les théorèmes précédents apparaitraient comme des résultats de propagation de ce front d'onde. La définition de cet objet utilisait une théorie d'opérateurs pseudo-différentiels dans des variétés à coins due à R. Melrose [M2]. Ce que nous proposons dans cet exposé c'est une autre approche, basée sur une théorie de transformation Fourier-Bros-Iagoniltzer "à la Sjöstrand" [Sj] mais à deux échelles ; cette théorie nous permet de définir également le front d'onde analytique et de démontrer des théorèmes de propagation de cet objet : on retrouve ainsi les résultats de [RZ 1] [RZ 2]

1 Le cadre géométrique

On reprend ici le formalisme de Melrose [M1] et de Wunsh [W]. Tous les objets seront ici analytiques. Soit M une variété compacte à bord ∂M. Une fonction ρ qui définit le bord est une fonction régulière, positive sur M telle que $\partial M = \{x \in M \ , \rho(x) = 0\}$ avec $d\rho \neq 0$ sur ∂M.

a) Métriques de scattering

Une métrique de scattering sur M est une métrique Riemannienne sur M qui, pour un certain choix de fonction qui définit le bord, s'écrit

$$g = \frac{d\rho^2}{\rho 4} + \frac{h}{\rho^2} \tag{1.1}$$

dans un voisinage de ∂M où h est telle que $h_{|\partial M}$ soit une métrique Riemannienne.

Ce cadre géométrique contient, via la compactification stéréographique de $\mathbb{R}^n$, les métriques asymptotiquement plates. En effet prenons $M = S^n_+ = \{(t_0, t') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ : \ t_0 \geq 0 \ , \ t_0^2 + |t'|^2 = 1\}$. Une fonction qui définit le bord $\partial M = \{t_0 = 0, |t'| = 1\}$ est donnée près de $t_0 = 0$ par $\rho(t_0, t') = \frac{t_0}{(1-t_0^2)^{1/2}}$ (que l'on prolonge à M entier). On obtient ainsi une application $S^n_+ \setminus (1, 0) \to [0, +\infty[\times S^{n-1} \ , (t_0, t') \mapsto (\rho(t_0, t') \ , \frac{t'}{(1-t_0^2)^{1/2}})$. D'autre part $\mathbb{R}^n$ est difféomorphe à $\overset{\circ}{S}{}^n_+$ par l'application $z \overset{SP}{\longmapsto} (\frac{1}{\langle z \rangle}, \frac{z}{\langle z \rangle})$ où $\langle z \rangle = (1 + |z|^2)^{1/2}$ (projection steréographique). On a donc, par composition, une application $\mathbb{R}^n \setminus 0 \to [0, +\infty[\times S^{n-1} \ , \ z \mapsto (\frac{1}{|z|}, \frac{z}{|z|}) = (\rho, w)$. Comme $z = \frac{\omega}{\rho}$ on voit facilement que l'image de la métrique Euclidienne dz^2 est la métrique $g = \frac{d\rho^2}{\rho^4} + \frac{d\omega^2}{\rho^2}$.

Dans le cas général on notera (ρ, y) des coordonnées locales au voisinage du bord. Dans ces coordonnées on a

$$\begin{cases} h = h_{00}(\rho, y) d\rho^2 + 2h_{0j}(\rho, y) d\rho dy^j + h_{ij}(\rho, y) dy^i dy^j \\ \\ (h_{ij}(0, y))_{1 \leq i,j \leq n-1} \gg 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

b) Le fibré cotangent qsc ("quadratic scattering" suivant Melrose).

On notera ν_{qsc} les champs de vecteurs sur M qui sont, près du bord, combinaisons linéaires de $\rho^3\partial\rho$, $\rho^2\partial_{y_j}$, $1 \leq j \leq n-1$. Soit ${}^{qsc}TM$ les sections analytiques de ν_{qsc} et ${}^{qsc}T^*M$ son dual. La 1-forme canonique sur cet espace est

$$\alpha = \lambda\frac{d\rho}{\rho^3} + \mu \cdot \frac{dy}{\rho^2} \tag{1.3}$$

de sorte que le point courant de ${}^{qsc}T^*M$ sera repéré par ses coordonnées (ρ, y, λ, μ). On posera

$${}^{qsc}T^*_{\partial M}M = \{m \in {}^{qsc}T^*M : \rho = 0\} \tag{1.4}$$

D'autre part, lorsque $|\lambda| + |\mu|$ est grand il sera plus commode "d'éclater" la variable de fibre en posant

$$\sigma = \frac{1}{(\lambda^2 + |\mu|^2)^{1/2}} \ , \ \bar\lambda = \sigma\lambda \ , \ \bar\mu = \sigma\nu \ , \ \bar\lambda^2 + |\bar\mu|^2 = 1 \ . \tag{1.5}$$

Il sera alors plus commode de repérer un point m de ${}^{qsc}T^*M$ par ses coordonnées $m = (\rho, y, \sigma, (\bar\lambda, \bar\mu))$. On notera ${}^{qsc}\bar T^*M$ le compactifié radial de ${}^{qsc}T^*M$ (i.e. on prend les coordonnées ci-dessus avec $\sigma \geq 0$) puis

$${}^{qsc}S^*M = \{m \in {}^{qsc}\bar T^*M \ : \ \sigma = 0\} \tag{1.6}$$

Alors ${}^{qsc}\bar T^*M$ est une variété à coins, à deux faces définies par les équations $\rho = 0$ et $\sigma = 0$. On posera enfin

$$\mathcal{C} = {}^{qsc}\bar T^*_{\partial M} \cup {}^{qsc}S^*M \ . \tag{1.7}$$

2 Le front d'onde analytique *qsc* ou front d'onde à l'infini.

Cet objet sera un sous ensemble de $\mathcal{C}$ défini en (1.7). Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ il tiendra compte simultanément des informations de régularité ($\sigma = 0$) et de comportement à l'infini ($\rho = 0$). Il sera défini à l'aide d'une transformation de FBI (cf. [Sj]) à deux paramètres h et k ; k servant à tester la régularité microlocale et h le comportement à l'infini ; on testera pour cette dernière information, la distribution dans une zone de taille h près de $\rho = 0$; la variable pertinente sera donc $s = \frac{\rho}{h}$ qui évoluera dans un voisinage d'un point $s_0 > 0$. On introduit donc $s_0 > 0$; un point m_0 de $\mathcal{C}$ a pour coordonnées $m_0 = (h_0 s_0, y_0, \sigma_0, (\bar\lambda_0, \bar\mu_0))$ avec $h_0\sigma_0 = 0$. On pose

(2.1)

$$\begin{cases} X_0 = (s_0, y_0)\ ,\ \Xi_0 = \left(\frac{\bar\lambda_0}{s_0^3}\ ,\ \frac{\bar\mu_0}{s_0^2}\right), \\ X = (s, y)\ ,\ X_h = (\frac{\rho}{h}, y)\ ,\ \alpha = (\alpha_X, \alpha_\Xi), \alpha_X = (\alpha_s, \alpha_y)\alpha_\Xi = (\alpha_\tau, \alpha_\eta)\ . \end{cases}$$

a) les phases admissibles

Soit $\alpha_0 = (\alpha_X^0, \alpha_\Xi^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On dira que φ est une phase de FBI en (X_0, Ξ_0, α_0) si

$$\varphi = \varphi_2(X, \alpha_\Xi) + \varphi_3(\alpha) + ih\varphi_1(X, \alpha)\ ,\ X \in \mathbb{C}^n, \alpha \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \tag{2.2}$$

où les φ_j sont holomorphes dans un voisinage de (X_0, α_0), sont réelles lorsque X et α sont réels et vérifient

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial X}(X_0, \alpha_\Xi^0) = \Xi_0 \tag{2.3}$$

$$\varphi_1(X_0, \alpha_0) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial X}(X_0, \alpha_0) = 0\ ,\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial X^2}(X_0, \alpha_0) \gg 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial X \partial \alpha_\Xi}(X_0, \alpha_\Xi^0) \text{ et } \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial X \partial \alpha_X}(X_0, \alpha_0) \text{ sont inversibles.} \tag{2.5}$$

Par exemple

$$\varphi = (X - \alpha_X)\alpha_\Xi + ih(X - \alpha_X)^2 \tag{2.6}$$

est une phase de FBI en (X_0, Ξ_0, α_0) où $\alpha_0 = (X_0, \Xi_0)$.

b) Les symboles analytiques

Un symbole analytique est une expression de la forme

$$a(X, \alpha, h, k) = \sum_{j \geq 0} (h\sqrt{k})^j a_j(X, \alpha, h, k) \tag{2.7}$$

où les a_j sont des fonctions holomorphes dans un même voisinage complexe de (X_0, α_0), analytiques réel en (h, k) dans un même voisinage de (h_0, σ_0) dans $[0, +\infty[\times[0, +\infty[$ et qui satisfont

$$|a_j(X, \alpha, h, k)| \leq C^{j+1} j^{j/2}\ ,\ j \geq 0\ . \tag{2.8}$$

En fait les symboles que nous prendrons seront des somme finies de a_j. Un symbole a sera dit elliptique en $(X_0, \alpha_0, h_0, \sigma_0)$ si

$$a_0(X_0, \alpha_0, h_0, \sigma_0) \neq 0 \ . \tag{2.9}$$

c) Le front d'onde analytique à l'infini.

Soit $m_0 = (h_0 s_0, y_0, \sigma_0, (\bar{\lambda}_0, \bar{\mu}_0)) \in \mathcal{C}$ i.e. $h_0.\sigma_0 = 0$, $\bar{\lambda}_0^2 + |\bar{\mu}_0|^2 = 1$. Soit $u \in \mathcal{D}'(M)$. On dira que $m_0 \notin {}^{qsc}WF_a(u)$ si il existe $\alpha_0 \in \mathbb{R}^{2n}$, une phase de FBI φ en $(X_0, \equiv_0, \alpha_0)$, un symbole analytique a, elliptique en $(X_0, \alpha_0, h_0, \sigma_0)$, une troncature $\chi \in C^\infty$ égale à 1 près de X_0, des voisinages V_{α_0} de α_0 dans $\mathbb{C}^{2n}, V_{h_0}, V_{\sigma_0}$ de h_0, σ_0 dans $[0, +\infty[$, des constantes $C > 0, \varepsilon_0 > 0$ telles que

(2.10)

$$|\mathcal{T}u(\alpha, h, k)| \doteqdot | \iint e^{ih^{-2}k^{-1}\varphi(X_h, \alpha, h)} a(X_h, \alpha, h, k)\chi(X_h)\overline{u(\rho, y)} d\rho dy| \leq C e^{-\frac{\varepsilon_0}{hk}}$$

(où $X_h = (\frac{\rho}{h}, y)$) pour tous $\alpha \in V_{\alpha_0}$, $h \in V_{h_0} \setminus \{0\}$, $k \in V_{\sigma_0} \setminus \{0\}$.

d) Le front d'onde analytique uniforme à l'infini.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(u(t; .))_{t \in I}$ une famille de distributions sur M et $t_0 \in I$. Soit $m_0 \in \mathcal{C}$. On dira que $m_0 \notin {}^{qsc}\widetilde{WF}_a(u(t_0, .))$ (front d'onde analytique uniforme) si il existe $\delta > 0$ tel que $u(t; \rho, y)$ vérifie une estimation du type (2.10) pour $|t - t_0| \leq \delta$ avec $(s_0, \alpha_0, \varphi, a, V_{\alpha_0}, V_{h_0} V_{\sigma_0}, C, \varepsilon_0)$ indépendants de t.

Théorème 2.1 *Les définitions de* ${}^{qsc}WF_a(U)$ *et* ${}^{qsc}\widetilde{WF}_a(u(t;))$ *sont indépendantes de* $s_0, \alpha_0, \varphi, a, \chi$ *qui satisfont les conditions requises.*

Il s'agit évidemment d'un résultat crucial de la théorie dont la démonstration est délicate et très technique.

Remarque 2.2 :

(1) Comme on le voit, deux paramètres h et k interviennent dans la définition du front d'onde à l'infini. Cependant si le point m_0 est de la forme $m_0 = (0, y_0, \sigma_0, (\bar{\lambda}_0, \bar{\mu}_0))$ avec $\sigma_0 > 0$ (resp. $m_0 = (\rho_0, y_0, 0, (\bar{\lambda}_0, \bar{\mu}_0))$ avec $\rho_0 > 0$) on peut tout simplement ignorer le paramètre k (resp. h) et le fixer à la valeur $k = 1$ (resp. $h = 1$). Il en résulte, en particulier que dans $({}^{qsc}S^*M)^0$ le front d'onde à l'infini coïncide avec le front d'onde analytique usuel (cf. [Sj])

(2) Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $e^{\delta|z|}u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors en utilisant les identifications décrites dans l'introduction i.e. en posant $z = \frac{\omega}{\rho}$ pour $|z| \geq 1$, on voit que ${}^{qsc}WF_a(u) \cap ({}^{qsc}\overline{T}^*_{\partial M}M)^0 = \emptyset$.

(3) Soit $u(x) = e^{i<Ax,x>}$ où A est une matrice réelle $n \times n$ symétrique. On a

$${}^{qsc}WF(u) = \left\{(0, \omega, \lambda = -A\omega.\omega \ , \mu = A\omega - (A\omega.\omega)\omega), \omega \in S^{n-1}\right\} \ .$$

3 Le Laplacien et son flot

Le Laplacien Δ_g relatif à la métrique g s'écrit

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^{n} D_j(\sqrt{G} g^{jk} D_k) \tag{3.1}$$

où $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $G = \det(g_{jk})$, $(g^{ik}) = (g_{jk})^{-1}$.

Comme g est une métrique de scattering, il est plus commode, au voisinage du bord, d'utiliser les coordonnées locales (ρ, y). Dans ces coordonnées on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_g = \frac{1}{\rho^2}[(\rho^3 D_\rho)^2 + \rho^4 \Delta_0 + c(n)\rho^5 D_\rho + \rho R(\rho, y, \rho^3 D_\rho, \rho^2 D_y)] \\ \Delta_0 = \frac{1}{\sqrt{H}} \sum\limits_{j,k=1}^{n-1} D_j(\sqrt{H}\bar{h}^{jk} D_k) \ , \ H = \det(h_{jk}(0,y)) \\ (\bar{h}^{jk}(y)) = (h_{jk}(0,y))^{-1} \end{array} \right. \tag{3.2}$$

Le symbole principal de Δ_g s'écrit alors
(3.3)

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_2(\Delta_g)(\rho, y, \tau, \eta) = \frac{1}{\rho^2} p(\rho, y, \rho^3\tau, \rho^2\eta) = p(\rho, y, \rho^2\tau, \rho\eta) \\ p(\rho, y, \lambda, \mu) = \lambda^2 + \|\mu\|^2 + \rho\tau(\rho, y, \lambda, \mu) \\ \text{où } \|\mu\|^2 = \sum\limits_{j,k=1}^{n-1} \bar{h}^{jk}(y)\mu_j\mu_k \text{ et } r = \rho a^{oo}(\rho, y)\lambda^2 + a^{oj}(\rho, y)\lambda\mu_j + a^{jk}(\rho, y)\mu_j\mu_k \end{array} \right.$$

La 2-forme symplectique $\omega = d\alpha$ sur ${}^{qsc}\overline{T}^* M$ s'écrit

$$\omega = \frac{d\lambda \wedge d\rho}{\rho^3} + \frac{d\mu \wedge dy}{\rho^2} - 2\frac{d\rho \wedge d\mu}{\rho^3}.\mu \tag{3.4}$$

Le hamiltonien H_Δ du symbole Δ_g est alors défini par

$$d(\frac{1}{\rho^2} p)(\cdot) = \omega(H_\Delta, \cdot) \tag{3.5}$$

On montre alors que

$$\left\{ \begin{array}{l} H_\Delta = X_0 + \widetilde{X} \\ X_0 = 2\lambda\rho\partial\rho + 2(\lambda^2 - \|\mu\|^2)\partial_\lambda + 2\langle \mu, \partial_y \rangle + 4\lambda\mu.\partial_\mu - (\partial_y \|\mu\|^2)\partial_\mu \\ \text{où } \langle a, b \rangle = \Sigma \bar{h}^{jk}(y) a_j b_k \ , \ \|a\|^2 = \langle a, a \rangle \ . \\ \widetilde{X} = \rho^2 p_1 \partial_\rho + \rho p_2 \partial_y + q_1 \rho \partial_\lambda + q_2 \rho \partial_\mu \end{array} \right. \tag{3.6}$$

3.1 Le flot dans $({}^{qsc}\overline{T}^*_{\partial M}M)^0$

Dans cet ensemble le flot de Δ_g sera celui de X_0.

Soit $m_0 = (0, y_0, \lambda_0, \mu_0) \in ({}^{qsc}\overline{T}^*_{\partial M}M)^0$. Le flot de X_0 issu de m_0 est décrit par les équations

$$(3.7) \qquad \begin{cases} \dot\rho(t) = 2\lambda(t)\rho(t) & \rho(0) = 0 \\ \dot y_j(t) = 2\sum\limits_{k=1}^{n-1} \bar h^{jk}(y(t))\mu_k(t) & y(0) = y_0 \\ \dot\lambda(t) = 2(\lambda^2(t) - \|\mu(t)\|^2) & \lambda(0) = \lambda_0 \\ \dot\mu(t) = 4\lambda(t)\mu(t) - \partial_y\|\mu(t)\|^2 & \mu(0) = \mu_0 \end{cases}$$

Ce système a une unique solution maximale définie sur $[0, T^*[$.

Cas 1 : $\mu_0 = 0$,

On a $\mu(t) = 0$, $\rho(t) = 0$, $y(t) = y_0$ pour $t \in [0, T^*[$. D'autre part $\dot\lambda(t) = 2\lambda^2(t)$ de sorte que $T^* = \frac{1}{2\lambda_0}$ si $\lambda_0 > 0$ et $T^* = +\infty$ si $\lambda_0 < 0$. De plus si $\lambda_0 > 0$ on a $\lim\limits_{t\to\frac{1}{2\lambda 0}} \lambda(t) = +\infty$. Ceci montre que, dans ce cas toute courbe intégrale issue de m_0 atteint le coin i.e. $\rho = \sigma = 0$ en un temps fini $T = \frac{1}{2\lambda_0}$ tandis que si $\lambda_0 < 0$ cette courbe reste pour tout temps à l'intérieur de ${}^{qsc}T^*_{\partial M}M$. On a bien sûr une discussion analogue sur $]T_*, 0]$. Ceci incite à poser

$$(3.8) \qquad \begin{cases} \mathcal{H} & = \{m = (\rho, y, \lambda, \mu) \ : \ \rho = \mu = 0\} \\ \mathcal{H}_\mp & = \{m \in \mathcal{H} \ : \ \lambda \lessgtr 0\} \\ \mathcal{H}^c_\mp & = \{m : \rho = \mu = \sigma = 0 \ , \ \bar\lambda = \mp 1\} \end{cases}$$

Cas 2 : $\mu_0 \neq 0$.

On montre que dans ce cas la courbe intégrale issue de m_0 est définie pour tout temps et reste entièrement dans $({}^{qsc}\overline{T}^*_{\partial M}M)^0$.

3.2 Le flot dans ${}^{qsc}S^*M$.

On travaille dans les coordonnées $(\rho, y, \sigma, (\bar\lambda, \bar\mu))$. Le champ de vecteur σH_Δ est alors bien défini (jusqu'en $\sigma = 0$) et son flot constituera celui du Laplacien.

3.3 Comportement en grand temps du flot

Définition 3.1 *Une courbe intégrale maximale de σH_Δ sur ${}^{qsc}S^*M$ sera dite non captée dans le passé (resp. dans le futur) si elle est définie pour tout $t \in (-\infty, 0]$ (resp. $[0, +\infty)$) et si $\lim\limits_{t\to-\infty} \rho(t) = 0$ (resp. $\lim\limits_{t\to+\infty} \rho(t) = 0$).*

Définition 3.2 *i) Soit* $m \in {}^{qsc}\overline{T}^* M$, $m \notin \mathcal{H}$. *On dira que* m *n'est pas capté dans le passé (resp. dans le futur) si la courbe intégrale de* σH_Δ *issue de* m *est non captée dans le passé (resp. dans le futur).*

ii) Soit $m \in \mathcal{H}$, $m = (0, y_0, \sigma_0 \ , \ (\pm 1, 0))$. *On dira que* m *est non capté dans le passé (resp. dans le futur) si toutes les courbes intégrales de* σH_Δ *dans* ${}^{qsc}S^* M$ *arrivant pour* $t \to +\infty$ *(resp.* $t \to -\infty$*) au point* $\bar{m} = (0, y_0; 0, (\pm 1, 0))$ *sont non captées dans le passé (resp. futur).*

On notera T_- (resp. T_+) l'ensemble des points captés dans le passé (resp. dans le futur).

Proposition 3.3 *Soit* $m \in {}^{qsc}S^* M \setminus (\mathcal{H}^c_- U T_-)$. *Alors* $N_{-\infty}(m) = \lim\limits_{t \to -\infty} \exp t\sigma H_\Delta(m) \in \mathcal{H}^c_+$ *(idem si on échange* $-$ *et* $+$*).*

4 Propagation du front d'onde à l'infini.

On considère dans ce paragraphe pour $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (on pourrait prendre $\mathcal{S}'$) une solution $u \in C^0([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^n))$ du probème

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + i\Delta_g u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \end{array} \right. \tag{4.1}$$

et on essaye de répondre à la question suivante. Etant donnés un point $m_0 \in \mathcal{C}$ et un temps $T > 0$ à quelle condition sur u_0 a-t-on $m_0 \notin {}^{qsc}WF_a(u(T, .))$?

Le point m_0 sera décrit par ses coordonnées

$$(i) \qquad m_0 = (\rho_0, y_0, 0, (\bar{\lambda}_0, \bar{\mu}_0)) \text{ avec } \bar{\lambda}_0^2 + |\bar{\mu}_0|^2 = 1 \qquad \text{si } \sigma_0 = 0 \ ,$$

$$(ii) \qquad m_0 = (0, y_0, \lambda_0, \mu_0) \text{ si } \sigma_0 > 0$$

Premier cas : $\rho_0 = 0, \sigma_0 > 0$ et

$$\mu_0 \neq 0 \ , \ T > 0 \text{ quelconque} \tag{1.i}$$

ou

$$\mu_0 = 0 \ , \ \lambda_0 > 0 \ , \ T > 0 \text{ quelconque} \tag{1.ii}$$

ou

$$\mu_0 = 0 \ , \ \lambda_0 < 0 \ , \ 0 < T < -\frac{1}{2\lambda_0} \ . \tag{1.iii}$$

Théorème 4.1 *On a* $m_0 \notin {}^{qsc}WF_a(u(T,.))$ *si et seulement si* $\exp(-TX_0)(m_0) \notin {}^{qsc}WF_a(u_0)$.

Deuxième cas : $\rho_0 = 0$, $\sigma_0 > 0$ et

$$(2.i) \qquad \mu_0 = 0\ ,\ \lambda_0 < 0\ ,\ T = -\frac{1}{2\lambda_0}.$$

Posons $m_1 = \exp(\frac{1}{2\lambda_0}X_0)(m_0)$. Il résulte du §3 que $m_1 \in \mathcal{H}^c_-$ i.e. $m_1 = (0, y_1; 0, (-1, 0))$. Notons $\dot{N}^{-1}_{+\infty}(m_1) = N^{-1}_{+\infty}(m_1) \setminus \{m_1\}$ l'ensemble des points différents de m_1 arrivant pour $t \to +\infty$ en m_1 par le flot de σH_Δ.

Théorème 4.2 *Supposons qu'il existe un voisinage* U *du point* $m_1 = \exp(\frac{1}{2\lambda_0}X_0)(m_0)$ *tel que* $\dot{N}^{-1}_{+\infty}(m_1) \cap U$ *ne rencontre pas* ${}^{qsc}\widetilde{WF}_a(u(0,.))$. *Alors* $m \notin {}^{qsc}WF_a(u(-\frac{1}{2\lambda_0},.))$.

Troisième cas : $\rho_0 = 0$, $\sigma_0 > 0$ et

$$(3.i) \qquad \mu_0 = 0\ ,\ \lambda_0 < 0 \text{ et } T > -\frac{1}{2\lambda_0}$$

Posons encore $m_1 = \exp(\frac{1}{2\lambda_0}X_0)(m_0) \in \mathcal{H}^c_-$. Si m_1 n'est pas capté dans le passé, tous les points de $N^{-1}_{+\infty}(m_1)$ sont non captés dans le passé ; l'ensemble $N_{-\infty}(N^{-1}_{+\infty}(m_1))$ est alors bien défini. On posera

$$\operatorname{scat}(m_1) = N_{-\infty}(N^{-1}_{+\infty}(m_1)) \subset \mathcal{H}^c_+$$

Théorème 4.3 *Soit* $m_1 = \exp(\frac{1}{2\lambda_0}X_0(m_0)$. *Supposons* m_1 *non capté dans le passé et que* $\exp[-(T + \frac{1}{2\lambda_0})X_0]\ (\operatorname{scat}(m_1)) \cap {}^{qsc}WF_a(u_0) = \emptyset$. *Alors* $m_0 \notin {}^{qsc}WF_a(u(T,.))$.

Quatrième cas : $\sigma_0 = 0$ et

$$(4.i) \qquad \rho_0 > 0\ ,\ T > 0$$

$$(4.ii) \qquad \rho_0 = 0\ ,\ m_0 \notin \mathcal{H}^c_-\ ,\ T > 0$$

Théorème 4.4 *Supposons* m_0 *non capté dans le passé (alors* $N_{-\infty}(m_0) \in \mathcal{H}^c_+$*). Supposons* $\exp(-TX_0)(N_{-\infty}(m_0)) \notin {}^{qsc}WF_a(u_0)$. *Alors* $m_0 \notin {}^{qsc}\widetilde{WF}_a(u(T,.))$.

Cinquième cas : $\sigma_0 = 0$

$$(5.i) \qquad \rho_0 = 0\ ,\ m_0 \in \mathcal{H}^c_-\ ,\ T > 0$$

Théorème 4.5 *Supposons* $\exp(-TX_0)(m_0) \notin {}^{qsc}WF_a(u_0)$. *Alors* $m_0 \notin {}^{qsc}\widetilde{WF}_a(u(T,.))$.

5 Quelques éléments de preuve

Les résultats décrits au paragraphe 4 sont obtenus en combinant les informations de quatre situations modèles.

A. Propagation du front d'onde dans $({}^{qsc}\overline{T}^*_{\partial M}M)^0$.

B. Propagation du front d'onde uniforme dans $({}^{qsc}S^*M)^0$ ou dans le coin.

C. Propagation de l'intérieur vers le coin.

D. Propagation du bord vers le coin.

Voici ce que l'on démontre dans chacun de ces cas.

Théorème A

Soit $m \in ({}^{qsc}\overline{T}^*_{\partial M}M)^0$ et supposons que $\exp(-TX_0)(m) \in ({}^{qsc}\overline{T}^*_{\partial M}M)^0$. Alors $m \notin {}^{qsc}WF_a(u(T,.)) \Longleftrightarrow \exp(-TX_0)(m) \notin {}^{qsc}WF_a(u_0)$.

Théorème B

Soit $t_0 > 0$ fixé. Soit $m \in ({}^{qsc}S^*M)^0$ (resp. $m \in {}^{qsc}\overline{T}^*M \cap {}^{qsc}S^*M$). Supposons que $\exp(\theta\sigma H_\Delta)(m) \in ({}^{qsc}S^*M)^0$ (resp. $\in {}^{qsc}\overline{T}^*_{\partial M}M \cap {}^{qsc}S^*M$) pour un certain $\theta > 0$. Alors

$$m \notin {}^{qsc}\widetilde{WF}_a(u(t_0,.)) \Longleftrightarrow \exp(\theta\sigma H_\Delta)(m) \notin {}^{qsc}\widetilde{WF}(u(t_0,.))\ .$$

Théorème C

Soient $m \in \mathcal{H}^c_-$ et $t_0 > 0$. Si il existe un voisinage U de m dans ${}^{qsc}S^*M$ tel que $\dot{N}^{-1}_{+\infty}(m)$ ne rencontre pas ${}^{qsc}\widetilde{WF}_a(u(t_0,.))$ dans U alors $m \notin {}^{qsc}\widetilde{WF}_a(u(t_0,.))$

Théorème D

Soit $m \in \mathcal{H}^c_+$. Supposons que $\exp(-TX_0)(m) \notin {}^{qsc}WF_a(u_0)$. Alors $m \notin {}^{qsc}\widetilde{WF}_a(u(T,.))$.

Notons que les théorèmes A et B sont de nature locale (i.e. il suffit de les prouver pour T ou θ petit) alors que les théorèmes C et D sont de nature globale car tout point, aussi proche du coin soit-il, met un temps infini pour arriver au coin.

Dans tous les cas la preuve consiste à trouver une famille continue de transformations de FBI qui microlocalise à l'instant initial au point m et à l'instant final au point décrit par le théorème ; ces transformations étant construites de telle manière qu'il y ait un lien entre les deux.

Ces transformations sont de la forme

(5.1)

$$\mathcal{T}u(\theta;t,\alpha,h,k) = \iint e^{ih^{-2}k^{-1}\varphi(\theta;X_h,\alpha,h)}a(\theta;X_h,\alpha,h,k)\chi(\theta;X_h)u(t;\rho,y)d\rho dy$$

où $X_h = (\frac{\rho}{h},y), a(\theta,.)$ est un symbole analytique et $\chi(\theta;.)$ une troncature. Décrivons maintenant la manière avec laquelle on choisit la phase et le symbole ; cela dépend bien entendu de la nature du résultat que l'on veut obtenir.

Cas du théorème A

Comme tout se passe à l'intérieur de ${}^{qsc}\overline{T}^*_{\partial M}M$ on peut supposer $k=1$ et $m=(0,y_0,\lambda_0,\mu_0)$. On cherchera φ et a de telle manière que l'on ait

$$(5.2)\qquad (\frac{\partial}{\partial\theta}+i\Delta_g^*)(e^{ih^{-2}\varphi}a)=\mathcal{O}(e^{-\varepsilon_1/h})\ ,\varepsilon_1>0\ ,$$

où Δ_g^* désigne l'adjoint de Δ_g. On cherchera φ et a sous la forme

$$(5.3)\qquad \varphi=\varphi_2(\theta;\frac{\rho}{h},y,\alpha)+ih\varphi_1(\theta;\frac{\rho}{h},y,\alpha)$$

où φ_2 et φ_1 sont holomorphes dans un voisinage complexe de $(0;s_0,y_0,\alpha_0)$ et réelles sur le réel.

$$(5.4)\qquad a=\sum_{j\geq 0}h^j a_j(\theta;\frac{\rho}{h},y,\alpha)\ .$$

On a

$$(5.5)\qquad (\frac{\partial}{\partial\theta}+i\Delta_g^*)(e^{ih^{-2}\varphi}a)=e^{ih^{-2}\varphi}.h^{-2}(I+II+III+IV)$$

$$(5.6)\qquad I=i\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}+s^4\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial s}\right)+s^2\sum_{j_1k=1}^{n-1}\bar{h}^{jk}(y)\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_j}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_k}\right)a$$

$$(5.7)\qquad \begin{cases} II & =-h\left(\mathcal{L}_1\varphi_1+iF_0(s,y,\frac{\partial\varphi_2}{\partial s}\ ,\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y})\right)a \\ \mathcal{L}_1 & =\frac{\partial}{\partial\theta}+2s^4\frac{\partial\varphi_2}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}+2s^2\sum\limits_{j,k=1}^{n-1}\bar{h}^{jk}(y)\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial y_j} \\ \text{où} & F_0 \text{ est un polynome en } \frac{\partial\varphi_2}{\partial s}\ ,\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \text{ réel sur le réel}\end{cases}$$

$$(5.8)\qquad III=h^2(\mathcal{L}_1a+F_1(s,y,(\partial^\alpha\varphi_j)_{|\alpha|\leq 2,j=1,2})a)$$

$$(5.9)\qquad IV=\sum_{j=1}^{2}h^{2+j}X_j(sh,s,y,(\partial^\alpha\varphi_\ell)\ ,\ \partial_s,\partial_y)a$$

où F_1 est polynomiale en $(\partial^\alpha\varphi_j)$ et analytique en (s,y) ; X_j est un opérateur différentiel homogène d'ordre j à coefficients du même type.

1) résolution de la première équation de phase :

On cherche φ_2 solution du problème de Cauchy

$$(5.10)\qquad \begin{cases} \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} + s^4(\frac{\partial\varphi_2}{\partial s})^2 + s^2\|\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\|^2 = 0 \\ \\ \varphi_{2|\theta=0} = (s-\alpha_s)\alpha_\tau + (y-\alpha_y)\alpha_\eta \end{cases}$$

où $\alpha = (\alpha_s, \alpha_y, \alpha_\tau, \alpha_\eta) \in \mathbb{C}^n$ est un paramètre proche de α_0 et $\|a\|^2 = \Sigma\bar{h}^{jk}a_j a_k$.

Remarquons que si on pose

$$(5.11)\qquad \varphi_2(\theta; s, y, \alpha) = \tilde{\varphi}_2(\theta; s, y, \alpha_\tau, \alpha_\eta) - \alpha_s\alpha_\tau - \alpha_y\alpha_\eta$$

le problème (5.10) est équivalent au problème

$$(5.12)\qquad \begin{cases} \frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial\theta} + s^4(\frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial s})^2 + s^2\|\frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial y}\|^2 = 0 \\ \\ \tilde{\varphi}_{2|\theta=0} = s\alpha_\tau + y\alpha_\eta \end{cases}$$

On résout cette équation de phase par l'utilisation classique de la géométrie symplectique.

On introduit pour cela le symbole

$$(5.13)\qquad \ell(s, y, \tau, \eta, \theta^*) = \theta^* + q(s, y, \tau, \eta)\ ,\ \ q = s^4\tau^2 + s^2\|\eta\|^2\ .$$

L'équation de (5.13) est équivalente à $\ell(s, y, \frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial s}, \frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial y}, \frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial\theta^*}) = 0$. La bicaractéristique de ℓ l'issue de $(\theta_0, \tilde{s}, \tilde{y}, \alpha_\tau, \alpha_\eta)$ est décrite par les équations

$$(5.14)\qquad \begin{cases} \dot{\theta}(t) = 1 & \theta(0) = 0 \\ \\ \dot{s}(t) = \frac{\partial q}{\partial\tau}(s(t), y(t), \tau(t), \eta(t)) & s(0) = \tilde{s} \\ \\ \dot{y}(t) = \frac{\partial q}{\partial\eta}(\quad\cdots\quad) & y(0) = \tilde{y} \\ \\ \dot{\theta}^*(t) = 0 & \theta^*(0) = -q(\tilde{s}, \tilde{y}, \tilde{\tau}, \tilde{\eta}) \\ \\ \dot{\tau}(t) = -\frac{\partial q}{\partial s}(s(t), y(t), \tau(t), \eta(t)) & \tau(0) = \alpha_\tau \\ \\ \dot{\eta}(t) = -\frac{\partial q}{\partial y}(\quad\cdots\quad) & \eta(0) = \alpha_\eta \end{cases}$$

Ce système a, pour $|t|$ petit, une solution unique s, y, τ, η qui sont des fonctions de $(t; \tilde{s}, \tilde{y}, \alpha_\tau, \alpha_\eta)$.

L'ensemble (pour α_τ, α_η fixés)

$$\Lambda = \{(t, s(t;\tilde{s},\tilde{y},\alpha_\tau,\alpha_\eta), y(\cdots), \theta^*(0), \tau(\cdots), \eta(\cdots) : (t,\tilde{s},\tilde{y}) \text{ proche de } (\theta, s_0, y_0)\}$$

est une variété Lagrangienne sur laquelle ℓ s'annule.

La projection π sur la base de Λ est un difféomorphisme local et $d\pi$ est injective.

Il existe donc $\tilde{\varphi}$ telle que

$$\Lambda = \{(t, s, y, \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\theta}, \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial s}, \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial y}) \ : \ (t,s,y) \text{ proche de } (0, s_0, y_0)\}$$

ce qui résout l'équation de (5.12).

2) résolution de la deuxième équation de phase :

On prend alors φ_1 solution du problème de Cauchy

$$\text{(5.15)} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}_1\varphi_1 & = -iF_0(s, y, \frac{\partial\varphi_2}{\partial s}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}) \\ \varphi_{1|\theta=0} & = (s-\alpha_s)^2 + (y-\alpha_y)^2 \end{cases}$$

C'est un problème linéaire non caractéristique qui admet une solution pour $|\theta|$ petit.

3) Lien entre les bicaractéristiques de p et le flot de X_0.

Proposition 5.1 *Soit* $m_0 = (0, y_0, \lambda_0, \mu_0) \in ({}^{qsc}\overline{T}^*_{\partial M}M)^0$ *et* $\alpha_0 = (s_0, y_0, \frac{\lambda_0}{s_0^3}, \frac{\mu_0}{s_0^2})$. *Soit* $(s(\theta;\alpha_0), y(\theta;\alpha_0), \tau(\theta;\alpha_0), \eta(\theta;\alpha_0))$ *la bicaractéristique de q définie en (5.13) issue de* α_0. *Posons*

$$\lambda(\theta) = [s(\theta;\alpha_0)]^3\tau(\theta;\alpha_0) \ , \ \mu(\theta) = [s(\theta\ ;\alpha_0)]^2\eta(\theta\ ;\alpha_0)$$

Alors $(0, y(\theta;\alpha_0)\ ,\ \lambda(\theta), \mu(\theta)) = \exp(\theta X_0)(m_0)$.

On montre ensuite que la phase $\varphi(\theta;...)$ ainsi obtenue microlocalise au point $\Big(s(\theta;\alpha_0), y(\theta;\alpha_0), \frac{\lambda(\theta)}{s^3(\theta;\alpha_0)}\ ,\ \frac{\mu(\theta)}{s^2(\theta;\alpha_0)}\Big)$

4) Résolution des équations de transport

On cherche un symbole a qui annule les termes III et IV de (5.8), (5.9). En travaillant dans les coordonnées $(\theta, \tilde{s}, \tilde{y})$ au lieu de (θ, s, y) on voit facilement que $\mathcal{L}_1$ s'écrit $\frac{\partial}{\partial\theta}$. On est ramenés en posant $\underline{a} = a - 1$ à résoudre, dans les symboles analytiques, le problème de Cauchy

$$\text{(5.16)} \qquad \begin{cases} [\frac{\partial}{\partial\theta} + c(\theta; s, y, \alpha)]\underline{a} + h^{-2}(h^3X_1 + h^4X_2)\underline{a} = b \\ \underline{a}_{|\theta=0} = 0 \end{cases}$$

où les X_j sont des opérateurs différentiels d'ordre j à coefficients réguliers en $(\tilde{s}, \tilde{y}, \theta, \alpha, h)$ près de $(s_0, y_0, 0, \alpha_0, 0)$ et b est un symbole.

On utilise pour cela la méthode des ouverts emboités décrite dans [Sj].

5) idée de la fin de la preuve du théorème A

Les constructions précédentes permettent d'aboutir à la formule (5.2). On a alors le

Lemme 5.2 *Il existe deux fonctions régulières U et V, $\varepsilon_1 > 0$, $C_1 > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, un voisinage V_{α_0} tels que*

$$\mathcal{T}u(\theta; t, \alpha, h) = U(\theta - t; \alpha, h) + V(\theta; t, \alpha, h)$$

$$|V(\theta; t, \alpha, h)| \leq Ce^{-\frac{\varepsilon_1}{h}} \ , \ \forall (\theta, t, \alpha, h) \in] - c_1, c_1[\times [0, T] \times V_{\alpha_0} \times]0, c_2[\ .$$

En effet, on utilise le fait que $\mathcal{T}u(\theta; t, \alpha, h)$ vérifie (5.2) puis que $u(t, .)$ est solution de l'équation de Schrödinger $\frac{\partial u}{\partial t} + i\Delta_g u = 0$ pour montrer que $(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial t})\mathcal{T}u(\theta; t, \alpha, h)$ est à décroissance exponentielle en $1/h$.

Il résulte du Lemme 5.2 que, modulo un terme exponentiellement décroissant on a $\mathcal{T}u(-\theta; 0, \alpha, h) = \mathcal{T}u(0; \theta, \alpha, h)$; ceci prouve que d'une information sur u_0 au point $\exp(-\theta X_0)(m_0)$ on déduit une information sur $u(\theta; .)$ au point m_0 et le théorème A en découle.

Cas des théorèmes B, C, D :

Le schéma général de la preuve est le même qu'au théorème A avec cependant des différences que nous allons préciser. Tout d'abord il faut dans ces trois cas garder les deux paramètres h et k dans la famille de transformations de FBI ; il faut ensuite remplacer $\frac{\partial}{\partial \theta} + i\Delta_g^*$ par $\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial \theta} + i\Delta_g^*$ ce qui conduit à l'équation de phase

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + p(sh, y, s^2\frac{\partial \varphi}{\partial s}, s\frac{\partial \varphi}{\partial s}) = 0 \tag{5.17}$$

Cette équation de phase est encore résolue par la géométrie symplectique complexe ; cependant elle est à résoudre localement en θ dans le cas du Th.B globalement sur $]T_*, 0]$ dans le Th.C et globalement sur $[0, +\infty[$ dans le Théorème D. Dans chaque cas il faut une étude précise du système décrivant les bicaractéristiques de p : estimations, forme des solutions etc... Une fois l'équation de phase résolue, la preuve n'en est pas pour autant terminée. En effet contrairement aux cas classiques où les équations de transport se résolvent aisément, on est ici aux prises avec des équations de transport dont les coefficients explosent (au voisinage de $T*$) ou tendent vers zéro (en $+\infty$) ce qui introduit des difficultés non négligeables dans leur résolution par la méthode des ouverts emboités. On renvoie à [RZ 3] pour les détails techniques.

Références

[CKS] W. Craig, T. Kappeler and W. Strauss, Microlocal dispersive smoothing for the Schrödinger equation, Comm. pure Appl. Math 48 (1995), 769-860.

[D1] S.I. Doi, Smoothing effects of Schrödinger evolution group on Riemannian manifold, Duke Math. Journ. 82 (1996), 679-706.

[D2] S.I. Doi, Smoothing effects for the Schrödinger equation (preprint).

[M1] R.B. Melrose, Geometric scattering theory, Cambridge Univ. press Cambridge, New-York, Melbourne 1995.

[M2] R.B. Melrose, Differential analysis on manifolds with corners (in preparation).

[RZ 1] L. Robbiano, C. Zuily, Microlocal analytic smoothing effect for the Schrödinger equation. Duke Math. J. 100 n° 1 (1999), 93-129.

[RZ 2] L. Robbiano, C. Zuily, Effet régularisant analytique microlocal pour l'équation de Schrödinger : le cas des données oscillantes. Comm. on P.D.E. 2000 (to appear).

[RZ 3] L. Robbiano, C. Zuily, Analytic wave front set at infinity for solutions of the Schrödinger equation (preprint 2000).

[Sh] N.A. Shananin, On singularities of solutions of the Schrödinger equation for a free particle, Mathematical Notes, 55 (1994), 626-631.

[Sj] J. Sjöstrand, Singularités analytiques microlocales, Astérisque, 95 (1982).

[W] J. Wunsch, Propagation of singularities and growth for the Schrödinger equation. Duke Math. J. 98 n° 1 (1999), 137-186.

[WZ] J. Wusch, M. Zworski, The FBI transform on compact C^∞ manifolds (preprint).