SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1999-2000

David Lannes

Redressement Optique

Séminaire É. D. P. (1999-2000), Exposé n° XIV, 9 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1999-2000____A14_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Redressement Optique

David Lannes
MAB, Université Bordeaux I
351 Cours de la Libération,
33405 Talence Cedex
lannes@math.u-bordeaux.fr

Le redressement optique est en gros la création et l'évolution d'un mode moyen par interaction non linéaire des modes oscillants dans des problèmes hyperboliques. La mise en évidence de tels phénomènes dans le cadre de l'optique diffractive se heurte à plusieurs problèmes, le principal d'entre eux étant un phénomène appelé *transparence* qui fait disparaître les non linéarités des équations asymptotiques. En fait, la description du redressement optique nécessite l'introduction d'une *quatrième* échelle de variables, au lieu des trois utilisées généralement en optique diffractive.

1 Introduction à l'optique diffractive linéaire

1.1 L'ansatz

On cherche des solutions approchées quand $\varepsilon \to 0$ de

$$L^\varepsilon(\partial_x)\mathbf{u}^\varepsilon = 0, \qquad x = (t,y),$$

avec $L^\varepsilon(\partial_x) := \partial_t + \sum_{j=1}^d A_j\partial_j + \frac{1}{\varepsilon}L_0$, avec les A_j symétriques et L_0 anti-symétrique.

On veut prendre en compte des phénomènes qui font intervenir 3 échelles différentes: celle en $O(1/\varepsilon)$ des oscillations, celle en $O(1)$ de l'optique géométrique, et celle en $O(\varepsilon)$ de la diffraction de type Fresnel.
On cherche donc une solution approchée

$$u^\varepsilon(x) = \mathcal{U}^\varepsilon(\varepsilon t, x, \underline{\beta}\cdot x/\varepsilon),$$

avec $\mathcal{U}^\varepsilon(Y,x,\theta)$ périodique en θ qui s'exprime sous la forme

$$\mathcal{U}^\varepsilon = \mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1 + \varepsilon^2\mathcal{U}_2,$$

et on veut choisir les profils $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ de manière à minimiser

$$L^\varepsilon(\partial_x)u^\varepsilon \quad = \quad \varepsilon^{-1} iL(\underline{\beta}D_\theta)\mathcal{U}_0$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \varepsilon^0 iL(\underline{\beta} D_\theta)\mathcal{U}_1 + L_1(\partial_x)\mathcal{U}_0 \\
&+ \quad \varepsilon^1 iL(\underline{\beta} D_\theta)\mathcal{U}_2 + L_1(\partial_x)\mathcal{U}_1 + \partial_T \mathcal{U}_0 \\
&+ \quad \varepsilon^2 \mathcal{R}^\varepsilon \big|_{T=\varepsilon t, x, \theta=\frac{\underline{\beta}\cdot x}{\varepsilon}},
\end{aligned}
$$

où $D_\theta := \partial_\theta / i$, et $L_1(\partial_x) := \partial_t + \sum_{j=1}^d A_j \partial_j$, et

$$
L(\underline{\beta}) = L(\underline{\tau},\underline{\eta}) := \underline{\tau} I + \sum_{j=1}^d A_j \underline{\eta}_j + \frac{1}{i} L_0.
$$

1.2 Minimisation du reste

On veut annuler les termes en ε^{-1}, ε^0 et ε^1 du développement précédent.

1. Annulation du terme en ε^{-1}

En cherchant $\mathcal{U}_0$ sous la forme $\mathcal{U}_0(T,x,\theta) = \mathcal{U}_{01}(T,x)e^{i\theta} + c.c.$, la condition $iL(\underline{\beta} D_\theta)\mathcal{U}_0 = 0$ se lit alors

$$
L(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01} = 0, \tag{1}
$$

ce qui ne peut avoir de solution non triviale que si $L(\underline{\beta})$ n'est pas inversible.

Définition 1 *La variété caractéristique est l'ensemble*

$$
\mathcal{C}_L := \{\beta = (\tau,\eta), \det L(\beta) = 0\}.
$$

On définit aussi le projecteur $\pi(\beta)$ sur $\ker L(\beta)$ et $L(\beta)^{-1}$ l'inverse partiel de $L(\beta)$.

On a alors la propriété suivante.

Lemme 1 *Les deux assertions suivantes sont équivalentes*

i) $L(\beta)a = b$

ii) $\pi(\beta)b = 0$ et $(I - \pi(\beta))a = L(\beta)^{-1}b$.

La condition (1) est donc équivalente à

$$
\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01} = \mathcal{U}_{01}. \tag{2}
$$

2. Annulation du terme en ε^0

En cherchant $\mathcal{U}_1$ sous la forme $\mathcal{U}_1(T,x,\theta) = \mathcal{U}_{11}(T,x)e^{i\theta} + c.c.$, la condition $iL(\underline{\beta} D_\theta)\mathcal{U}_1 + L_1(\partial_x)\mathcal{U}_0 = 0$ se lit alors

$$
iL(\underline{\beta})\mathcal{U}_{11} + L_1(\partial_x)\mathcal{U}_{01} = 0,
$$

ou encore, grâce au Lemme 1 et à (2),

$$
\begin{cases}
\pi(\underline{\beta})L_1(\partial_x)\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01} = 0 \\
(I - \pi(\underline{\beta}))\mathcal{U}_{11} = iL(\underline{\beta})^{-1}L_1(\partial_x)\mathcal{U}_{01}.
\end{cases}
$$

3. Annulation du terme en ε^1

En cherchant $\mathcal{U}_2$ sous la forme $\mathcal{U}_2(T,x,\theta) = \mathcal{U}_{21}(T,x)e^{i\theta} + c.c.$, la condition $iL(\underline{\beta}D_\theta)\mathcal{U}_2 + L_1(\partial_x)\mathcal{U}_1 + \partial_T\mathcal{U}_0 = 0$ se lit alors

$$iL(\underline{\beta})\mathcal{U}_{21} + L_1(\partial_x)\mathcal{U}_{11} + \partial_T\mathcal{U}_{01} = 0.$$

Cette équation projetée sur l'image de $\pi(\underline{\beta})$ se lit

$$\pi(\underline{\beta})L_1(\partial_x)\mathcal{U}_{11} + \partial_T\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01} = 0.$$

On décompose alors $\mathcal{U}_{11}$ sous la forme $\mathcal{U}_{11} = \pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{11} + (I - \pi(\underline{\beta}))\mathcal{U}_{11}$, et on remplace $(I - \pi(\underline{\beta}))\mathcal{U}_{11}$ par son expression pour trouver

$$\begin{aligned}\partial_T\mathcal{U}_{01} \quad &+ \quad \pi(\underline{\beta})L_1(\partial_x)\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{11} \\ &+ \quad iL(\underline{\beta})L_1(\partial_x)L(\underline{\beta})^{-1}L_1(\partial_x)\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01} = 0.\end{aligned}$$

Comme on n'a pour le moment aucune condition sur $\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{11}$, on peut *imposer*

$$\pi(\underline{\beta})L_1(\partial_x)\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{11} = 0, \tag{3}$$

et on obtient donc

$$\partial_T\mathcal{U}_{01} + iL(\underline{\beta})L_1(\partial_x)L(\underline{\beta})^{-1}L_1(\partial_x)\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01} = 0.$$

La proposition suivante permet de simplifier l'écriture de ces équations.

Proposition 1 *[DJMR] Si $\underline{\beta} = (\underline{\tau},\underline{\eta})$ est un point lisse de $\mathcal{C}_L$ et si $\tau(\underline{\eta})$ est un paramétrage local de $\mathcal{C}_L$ au voisinage de $\underline{\beta}$, alors*
i) $\pi(\underline{\beta})A_j\pi(\underline{\beta}) = -\partial_j\tau(\underline{\eta})\pi(\underline{\beta})$,
ii) $\pi(\underline{\beta})A_jL(\underline{\beta})^{-1}A_k\pi(\underline{\beta}) = \frac{1}{2}\partial^2_{jk}\tau(\underline{\eta})\pi(\underline{\beta})$.

On trouve donc $\mathcal{U}_{01} = \pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01}$ en résolvant

$$\begin{cases} (\partial_t - \tau'(\underline{\eta}) \cdot \partial_y)\mathcal{U}_{01} = 0 \\ \partial_T\mathcal{U}_{01} + \frac{i}{2}\tau''(\underline{\eta})(\partial_y,\partial_y)\mathcal{U}_{01} = 0, \end{cases}$$

autrement dit, la propagation selon les rayons est corrigées en grand temps par une diffraction due à l'équation de Schrödinger.

2 Optique diffractive non linéaire

2.1 L'ansatz

On cherche maintenant des solutions approchées de

$$L^\varepsilon(\partial_x)\mathbf{u}^\varepsilon = f(\mathbf{u}^\varepsilon,\mathbf{u}^\varepsilon).$$

Trois problèmes nouveaux se posent par rapport au cas linéaire, Tout d'abord le *temps d'existence*, qui est lié à la taille des solutions considérées. On doit également prendre en compte la *génération d'harmoniques*: les harmoniques supérieures $2\underline{\beta}$, $3\underline{\beta}$, $\cdots$ sont peu gênantes car ces nombres d'onde ne sont en pratique pas sur la variété caractéristique et ne peuvent donc pas être propagés; par contre le mode moyen est beaucoup plus délicat à traiter puisque 0 est sur cette variété et n'en est pas un point lisse.

Définition 2 *On appelle* redressement optique *l'interaction qui a lieu en grand temps entre la propagation du mode moyen et celle des modes oscillants.*

Le troisième problème qui se pose est le *contrôle des correcteurs.* Il faut en effet s'assurer que $\varepsilon\mathcal{U}_1 + \varepsilon^2\mathcal{U}_2$ reste négligeable devant $\mathcal{U}_0$.

Pour faire face à ces difficultés nouvelles, on cherche désormais une solution approchée

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon\mathcal{U}^\varepsilon(\varepsilon t,x,\frac{\beta\cdot x}{\varepsilon}),$$

avec $\mathcal{U}^\varepsilon(T,x,\theta)$ périodique en θ et s'exprimant sous la forme

$$\mathcal{U}^\varepsilon = \mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1 + \varepsilon^2\mathcal{U}_2.$$

Pour être sûr que les correcteurs restent négligeables sur des temps $O(1/\varepsilon)$, on impose la *condition de croissance sous-linéaire* [JMR1]

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}|\mathcal{U}_j(t,\cdot)|_{L^\infty_{T,y,\theta}} = 0, \qquad j = 1,2.$$

2.2 Détermination des profils

On cherche

$$u^\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{U}_0 + \varepsilon\mathcal{U}_1 + \varepsilon^2\mathcal{U}_2)|_{T=\varepsilon t,x,\theta=\frac{\beta\cdot x}{\varepsilon}},$$

de manière à annuler les premières puissances de ε du reste $L^\varepsilon(\partial_x)u^\varepsilon - f(u^\varepsilon,u^\varepsilon)$. En cherchant $\mathcal{U}_j(T,x,\theta) = \mathcal{U}_{j1}(T,x)e^{i\theta} + c.c. + \mathcal{U}_{j0}(T,x)$, pour $j = 0,1$, et $\mathcal{U}_2$ avec également les harmoniques $\pm 2\underline{\beta}$, on obtient en utilisant la même méthode que précédemment les *conditions de polarisation*

$$\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01} = \mathcal{U}_{01}, \qquad \text{et} \qquad \pi(0)\mathcal{U}_{00} = \mathcal{U}_{00},$$

l'équation de transport du premier mode oscillant

$$(\partial_t - \tau'(\underline{\eta})\cdot\partial_y)\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01},$$

ainsi qu'une équation de propagation du premier mode moyen

$$\pi(0)L_1(\partial_x)\pi(0)\mathcal{U}_{00} = 0,$$

qui n'est PAS une équation de transport car $0 \in \mathcal{C}_L$ n'est pas lisse. On trouve également les équations d'évolution lente sur $\mathcal{U}_{01}$ et $\mathcal{U}_{00}$,

$$\begin{aligned}\partial_T\mathcal{U}_{01} \quad &+ \quad (\partial_t - \tau'(\underline{\eta})\cdot\partial_y)\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{11} + \frac{i}{2}\tau''(\underline{\eta})(\partial_y,\partial_y)\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01}\\ &= \quad 2\Re\big[\pi(\underline{\beta})f(\pi(0)\mathcal{U}_{00},\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01})\big],\end{aligned}\tag{4}$$

et

$$\begin{aligned}\partial_T\mathcal{U}_{00} \quad &+ \quad \pi(0)L_1(\partial_x)\pi(0)\mathcal{U}_{10} + i\pi(0)L_1(\partial_x)L(0)^{-1}L_1(\partial_x)\pi(0)\mathcal{U}_{00}\\ &= \quad 2\pi(0)f(\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01},\overline{\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01}}) + \pi(0)f(\pi(0)\mathcal{U}_{00},\pi(0)\mathcal{U}_{00}).\end{aligned}\tag{5}$$

2.3 Projecteurs moyenne

Nous introduisons cet outil (cf. [L]), qui nous permettra de comprendre comment résoudre *simultanément* les équations d'évolution lente et les équations d'évolution selon les variables de l'optique géométrique.

Posons $T(\partial_x) = \partial_t + v \cdot \partial_y$, et définissons

$$G_T^h w(t,y) = \frac{1}{h} \int_0^h w(t+s,y+sv) ds.$$

Quand la limite existe, on définit

$$G_T w = \lim_{h \to \infty} G_T^h w.$$

On généralise cette définition au cas où $T(\partial_x) = \partial_t + i\lambda(D_y)$ en posant

$$G_T^h w(t,y) = \frac{1}{h} \int_0^h \Big(\int e^{i(y\cdot\eta + s\lambda(\eta))} \widehat{w}(t+s,\eta) d\eta \Big) ds.$$

On a alors les propriétés suivantes ([L])

Proposition 2 *i) Si $T(\partial_x)w = 0$ alors on a $G_T w = w$.*

ii) Si $T(\partial_x) = \partial_t + i\lambda(D_y)$ et $T_1(\partial_x) = \partial_t + i\lambda_1(D_y)$, et que $\lambda \neq \lambda_1$ p.p., alors,

$$\text{si } T_1(\partial_x)w = 0, \text{on a } G_T w = 0.$$

iii) Si w est à croissance sous-linéaire, alors on a $G_T T(\partial_x) w = 0$.

iv) Si $T_1(\partial_x)w_1 = 0$ et $T_2(\partial_x)w_2 = 0$, alors on a

$$G_T(w_1 w_2) = 0,$$

sauf si T est un opérateur de transport et si $T_1 = T_2 = T$.

2.4 Comportement du mode moyen

En vue d'utiliser ces projecteurs moyenne, on réalise la décomposition spectrale de

$$\pi(0) L_1(\partial_x) \pi(0) \mathcal{U}_{00} = 0.$$

On écrit

$$T_0(\partial_x) := \pi(0) L_1(\partial_x) \pi(0) = \sum_\alpha (\partial_t + i\lambda_\alpha(D_y)) E_\alpha(D_y),$$

et donc

$$\mathcal{U}_{00} = \pi(0)\mathcal{U}_{00} = \sum_\alpha \mathcal{U}_{00,\alpha},$$

où $U_{00,\alpha} := E_\alpha(D_y)\mathcal{U}_{00}$ vérifie

$$(\partial_t + i\lambda_\alpha(D_y))\mathcal{U}_{00,\alpha} = 0.$$

Par ailleurs, on a

Proposition 3 *[L] La variété caractéristique de l'opérateur $T_0(\partial_x)$ est le cône tangent à $\mathcal{C}_L$ en $(0,0)$.*

2.5 Obtention des équations asymptotiques

<u>CAS I:</u> Aucune des composantes de $\mathcal{U}_{00,\alpha}$ n'est transportée à la vitesse de groupe $-\tau'(\underline{\eta})$.

Compte tenu de la Prop. 2, l'application du projecteur moyenne associé au transport selon la vitesse de groupe sur l'Eq. (4) donne

$$\partial_T \mathcal{U}_{01} + \frac{i}{2}\tau''(\underline{\eta})(\partial_y,\partial_y)\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01} = 0$$

et par différence, on obtient donc aussi

$$(\partial_t - \tau'(\underline{\eta}) \cdot \partial_y)\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{11} = 2\Re\big[\pi(\underline{\beta})f(\mathcal{U}_{00},\mathcal{U}_{01})\big],$$

(et donc, si $f = 0$, i.e. dans le cas linéaire, on retrouve, sous forme de *condition nécessaire*, la condition (3) que nous avions imposée plus haut).

En appliquant les projecteurs moyenne associés aux composantes $T_{0,\alpha}(\partial_x)$ de $T_0(\partial_x)$ on trouve de même, pour tout α,

$$\partial_T \mathcal{U}_{00,\alpha} + iR_{0,\alpha}(\partial_y,\partial_y)\mathcal{U}_{00,\alpha} = E_\alpha(D_y)f(\mathcal{U}_{00,\alpha},\mathcal{U}_{00,\alpha})$$

Le mode moyen est le mode oscillant vérifient donc le système

$$\begin{cases} \partial_T \mathcal{U}_{01} + \frac{i}{2}\tau''(\underline{\eta})(\partial_y,\partial_y)\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01} = 0 \\ \partial_T \mathcal{U}_{00,\alpha} + iR_{0,\alpha}(\partial_y,\partial_y)\mathcal{U}_{00,\alpha} = E_\alpha(D_y)f(\mathcal{U}_{00,\alpha},\mathcal{U}_{00,\alpha}) \end{cases}$$

qui est découplé et ne permet donc pas l'apparition de redressement optique.

<u>CAS II</u> Il existe une composante $\mathcal{U}_{00,1}$ transportée à la vitesse de groupe.

L'application du projecteur moyenne associé à la vitesse de groupe sur la première équation d'évolution lente donne alors

$$\partial_T \mathcal{U}_{01} + \frac{i}{2}\tau''(\underline{\eta})(\partial_y,\partial_y)\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01} = 2\Re\big[\pi(\underline{\beta})f(\pi(0)\mathcal{U}_{00,1},\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01})\big]$$

On applique le même projecteur à la deuxième équation pour trouver

$$\begin{cases} \partial_T \mathcal{U}_{01} + \dfrac{i}{2}\tau''(\underline{\eta})(\partial_y,\partial_y)\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01} = 2\Re\big[\pi(\underline{\beta})f(\pi(0)\mathcal{U}_{00,1},\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01})\big] \\ \partial_T \mathcal{U}_{00,1} + iR_{0,1}(\partial_y,\partial_y)\mathcal{U}_{00,1} = E_1(D_y)f(\mathcal{U}_{00,1},\mathcal{U}_{00,1}) + \underline{2E_1(D_y)f(\mathcal{U}_{01},\overline{\mathcal{U}_{01}})}. \end{cases}$$

Ce système est couplé, et l'apparition de redressement optique est donc a priori possible.

On peut donc formuler une condition nécessaire d'apparition de redressement optique

<u>Cond. de redressement.</u> *Le cône tangent $\mathcal{C}_0$ à $\mathcal{C}_L$ en* (0,0) *contient le plan $\mathcal{P}$ à $\mathcal{C}_L$ en $\underline{\beta}$.*

Sur les exemples physiques, elle n'est en pratique vérifiée qu'en dimension 1. Même lorsqu'elle est vérifiée, le terme souligné dans le système ci-dessus doit être non nul pour que le redressement ait effectivement lieu. Or, la plupart des systèmes physiques vérifient la *condition de transparence* ([JMR2]):

$$\forall a,b \in \mathbb{C}^N, \quad \pi(0) f(\pi(\underline{\beta})a, \overline{\pi(\underline{\beta})b}) = 0.$$

et donc, en pratique, on n'observe pas de redressement optique, et l'approximation de l'optique diffractive non linéaire est la même que celle de l'optique linéaire!

3 Grandes solutions

La taille des solutions était choisie de manière à avoir les effets non-linéaires en même temps que les effets diffractifs, mais à cause de la transparence, ils arrivent plus tard. L'idée est donc de chercher des solutions plus grandes, afin d'accélérer la venue des effets non linéaires. On cherche ainsi

$$u^\varepsilon(x) = (\mathcal{U}_0 + \varepsilon \mathcal{U}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{U}_2)|_{(\varepsilon t, x, \frac{\underline{\beta}\cdot x}{\varepsilon})}.$$

La partie précédente justifie le choix de chercher la présence du mode moyen uniquement à partir du premier correcteur, c'est-à-dire $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_{01} e^{i\theta} + c.c.$ et $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{11} e^{i\theta} + c.c. + \mathcal{U}_{10}$.

Grâce à la transparence, l'étude est possible. On montre que $\mathcal{U}_{01} = \pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01}$ est transporté à la vitesse de groupe, et on se ramène au cas où $\mathcal{U}_{10} = \pi(0)\mathcal{U}_{10}$ l'est aussi. La dépendance de ces profils en (t,y) est donc une dépendance en $\xi := y + \tau'(\underline{\eta})t$. On trouve alors $\mathcal{U}_{01}$ et $\mathcal{U}_{10}$ par la résolution d'un système de type Davey-Stewartson ([C]),

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_T \mathcal{U}_{01} + \frac{i}{2}\tau''(\underline{\eta})(\partial_y,\partial_y)\mathcal{U}_{01} = 2\pi(\underline{\beta}) f(\mathcal{U}_{01},\mathcal{U}_{01}) \\ \qquad +2\pi(\underline{\beta}) f(\overline{\mathcal{U}_{01}}, L(2\underline{\beta})^{-1} f(\mathcal{U}_{01},\mathcal{U}_{01}) + 2\pi(\underline{\beta}) f(\mathcal{U}_{01}, L(0)^{-1} f(\mathcal{U}_{01},\overline{\mathcal{U}_{01}})) \\ \pi(0) L_1(\tau'(\underline{\eta})\cdot\partial_\xi,\partial_\xi)\pi(0)\mathcal{U}_{10} = 2\pi(0) L_1(\tau'(\underline{\eta})\cdot\partial_\xi,\partial_\xi) L(0)^{-1} f(\mathcal{U}_{01},\overline{\mathcal{U}_{01}}) \\ \qquad + \frac{2i}{|\tau'(\underline{\eta})|^2}\tau'(\underline{\eta})\cdot\partial_\xi f(\tau'(\underline{\eta})\cdot\nabla_\eta \pi\mathcal{U}_{01},\overline{\mathcal{U}_{01}}). \end{array} \right.$$

On obtient ainsi un couplage entre le mode moyen et les modes oscillants, mais ce n'est pas du redressement optique, puisque l'équation sur le mode moyen n'est pas une équation d'évolution lente. En fait, on peut même montrer que la validité de l'approximation Davey-Stewartson est incompatible avec la présence de redressement.

Pour résoudre le système de Davey-Stewartson, il faut en effet "inverser" l'opérateur $\pi(0)L_1(\tau'(\underline{\eta})\cdot\partial_\xi,\partial_\xi)\pi(0)$, ce qui n'est pas possible dans deux cas ([C]):

-1- Si $\mathcal{C}_0$ contient le plan $\mathcal{P}$ tangent à $\mathcal{C}_L$ en $\underline{\beta}$, i.e., si la *condition de redressement* est satisfaite. Ainsi, quand il y a redressement, il y a trop d'effets non-linéaires pour espérer des grandes solutions de taille $O(1)$.

-2- Si $\mathcal{C}_0$ est tangent à $\mathcal{P}$. Nous appellerons cette condition *condition de résonance ondes longues/ondes courtes*(CROLOC). Une question naturelle est donc: la CROLOC rend-elle le modèle de DS singulier à cause d'effets de redressement optique?

4 Résonance ondes longues/ondes courtes

On a vu que la condition de redressement n'est en pratique vérifiée qu'en dim 1, et comme elle est alors confondue avec la CROLOC, on ne regardera donc que cette dernière.

On a vu à la Section 2 que les solutions de taille $O(\varepsilon)$ sont trop petites au sens où les effets de redressement arrivent trop tard pour être vus dans une étude diffractive. Inversement, on a vu à la Section 3 que des solutions de taille $O(1)$ sont trop grosses au sens où elles sont incompatibles avec les effets de redressement. On regarde donc ici des solutions de taille intermédiaire, en $O(\sqrt{\varepsilon})$.

4.1 Dimension 1

Dans ce cas, la CROLOC est confondue avec la condition de redressement, et l'étude ressemble à celle faite à la Section 2. On cherche $u^\varepsilon(x) = \sqrt{\varepsilon}\mathcal{U}^\varepsilon(\varepsilon t, x, \frac{\beta \cdot x}{\varepsilon})$, avec $x = (t, y_1)$ et

$$\mathcal{U}^\varepsilon = \mathcal{U}_0 + \varepsilon^{1/2}\mathcal{U}_1 + \varepsilon\mathcal{U}_2 + \varepsilon^{3/2}\mathcal{U}_3 + \varepsilon^2\mathcal{U}_4,$$

et comme précédemment on ne fait intervenir le mode moyen que dans le premier correcteur. On trouve un système couplé entre le premier mode oscillant $\mathcal{U}_{01}$ et le premier mode moyen $\mathcal{U}_{10}$ ([CL]),

$$\begin{cases} \partial_T \mathcal{U}_{01} + \frac{i}{2}\tau''(\underline{\eta})(\partial_\xi, \partial_\xi)\mathcal{U}_{01} = 2\pi(\underline{\beta}) f(\mathcal{U}_{01}, \mathcal{U}_{10}) \\ \partial_T \mathcal{U}_{10} = 2i\partial_\xi \pi(0) f(\partial_1 \pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01}, \overline{\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01}}) \\ \qquad +2i\pi(0)A_1 L(0)^{-1}\overline{\partial}_\xi f(\mathcal{U}_{01}, \overline{\mathcal{U}_{01}}). \end{cases}$$

et on peut donc observer des effets de *redressement optique mono-dimensionnels.*

4.2 Dimension $d \geq 2$

Dans ce cas, la CROLOC n'est plus confondue avec la condition de redressement, et même avec des solutions de taille $O(\sqrt{\varepsilon})$ au lieu de $O(\varepsilon)$, on constate comme à la Section 2 qu'il n'y a pas de redressement optique. Il faut donc trouver un nouveau type de profils pour les solutions approchées.

Jusqu'à présent la dépendance des profils considérés en les variables de l'optique géométrique était en $(t, y_1, \cdots, y_d)$. En considérant une dépendance en (t, y_1) uniquement, où y_1 désigne la direction de tangence entre $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{P}$, on se ramène au cas de la dimension 1 et on observe ainsi des effets de redressement. Cependant, aucun effet de redressement *transverse* ne peut être mis en évidence.

La mise en évidence de ces effets transverses nécessite donc l'introduction d'une *quatrième échelle* de variables, en $O(\sqrt{\varepsilon})$. On cherche ainsi des solutions approchées sous la forme $u^\varepsilon(x) = \sqrt{\varepsilon}\mathcal{U}^\varepsilon(\varepsilon t, \sqrt{\varepsilon} y_{II}, t, y_1, \frac{\beta \cdot x}{\varepsilon})$, avec

$$\mathcal{U}^\varepsilon = \mathcal{U}_0 + \varepsilon^{1/2}\mathcal{U}_1 + \varepsilon\mathcal{U}_2 + \varepsilon^{3/2}\mathcal{U}_3 + \varepsilon^2\mathcal{U}_4.$$

et on trouve alors le système suivant, qui couple le premier mode oscillant $\mathcal{U}_{01}$ avec le premier mode moyen $\mathcal{U}_{10}$,

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_T \mathcal{U}_{01} + \frac{i}{2}\tau''(\underline{\eta})(\partial_\xi,\partial_\xi)\mathcal{U}_{01} = 2\pi(\underline{\beta})f(\mathcal{U}_{01},\mathcal{U}_{10}) \\ \partial_T \mathcal{U}_{10} + S(\partial^2_{y_{II}},\partial_\xi^{-1})\mathcal{U}_{10} = 2i\partial_\xi \pi(0)f(\partial_1\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01},\overline{\pi(\underline{\beta})\mathcal{U}_{01}}) \\ \qquad +2i\pi(0)A_1 L(0)^{-1}\partial_\xi f(\mathcal{U}_{01},\overline{\mathcal{U}_{01}}). \end{array}\right.$$

Grâce à la présence de l'opérateur $S(\partial^2_{y_{II}},\partial_\xi^{-1})$ de type Kadomtsev-Petviashvili, on peut alors observer des effets de redressement *transverses*.
Un système analogue a été obtenu par C. et P.-L. Sulem ([SS]) dans le cadre des ondes hydrodynamiques de surface.
Certaines propriétés de ce système sont décrites dans ([CL]). Enfin, on pourra trouver des théorèmes de stabilité pour les approximations présentées dans ces 4 sections dans [DJMR], [JMR1], [L], [C] et [CL].

Bibliographie

[C] T. Colin, *Rigorous derivation of the nonlinear Schrödinger equation and Davey-Stewartson systems from quadratic hyperbolic systems.*, Preprint Université Bordeaux I, 1999.

[CL] T. Colin, D. Lannes, *Long-wave short-wave resonance for nonlinear geometric optics*, Preprint Université Bordeaux I.

[DJMR] P. Donnat, J.-L. Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Diffractive nonlinear optics*, Séminaire EDP, 1995-96, Exp. No XVII, Ecole Polytechnique Palaiseau 1996.

[JMR1] J.-L. Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Diffractive Nonlinear Geometric Optics With Rectification*, Indiana Univ. Math. Journ. 47, No. 4 (1998).

[JMR2] J.-L. Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Transparent nonlinear geometric optics*, Preprint Université Bordeaux I, 1999.

[L] D. Lannes, *Dispersive effects for nonlinear geometrical optics with rectification*, Asymptotic Analysis **18**, pp. 111-146 (1998).

[SS] C. Sulem, P.-L. Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation*, Applied Mathematical Sciences 139, Springer, 1999.