



Centre de
Mathématiques
Laurent Schwartz



ÉCOLE
POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1998-1999

Francis Nier

Remarques sur les algorithmes de décomposition de domaines

Séminaire É. D. P. (1998-1999), Exposé n° IX, 24 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1998-1999____A9_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*
<http://www.cedram.org/>

Remarques sur les algorithmes de décomposition de domaines

F.Nier*,
CPT Case 907,
Campus de Luminy,
13288 Marseille Cedex 09

1 Introduction

Ce texte présente une approche des algorithmes de décomposition de domaines qui s'est développée autour de Frédéric Nataf et a déjà fait l'objet de nombreux travaux. Rappelons qu'il s'agit de mettre au point des algorithmes performants pour résoudre numériquement des équations elliptiques linéaires. L'objectif que nous nous proposons ici est de faire le point sur des choses plus ou moins connues et d'illustrer celles-ci par l'analyse de quelques situations modèles. Nous terminerons sur le cas des problèmes à coins pour lesquels, malgré quelques pistes, nous n'avons pas à ce jour d'approche systématique.

On veut résoudre l'équation

$$Pu = f \quad \text{dans } M$$

où P est un opérateur différentiel elliptique et M est une variété éventuellement à bord. Le principe de la décomposition de domaines est de résoudre l'équation ci-dessus de façon itérative en s'appuyant sur le recouvrement $M = \cup_{i=1}^N \overline{M}_i$ où les M_i sont des ouverts "suffisamment réguliers" de M . Ainsi la méthode de Schwarz additive, à laquelle nous nous restreindrons, s'écrit

$$\begin{cases} Pu_i^{n+1} = f & \text{dans } M_i \\ B_{ij}\gamma_{ij}u_i^{n+1} = B_{ij}\gamma_{ij}u_j^n & \text{sur } \partial M_i \cap \overline{M}_j, \end{cases} \quad (1.1)$$

avec des conditions d'interface données par des opérateurs différentiels ou pseudo-différentiels B_{ij} appliqués aux vecteurs traces γ_{ij} , $i, j = 1 \dots N$. Le cas le plus classique est $P = -\Delta_D$, le Laplacien avec conditions de Dirichlet sur un ouvert régulier M de \mathbb{R}^d , avec des conditions d'interface de type Dirichlet ou de Neumann et au niveau du schéma itératif la méthode de Schwarz alternée qui diffère peu de celle présentée ci-dessus. Avec les notations précédentes les conditions d'interface de type Dirichlet ou Neumann correspondent au choix

$$B_{ij} = (\text{Id}, 0) \text{ ou } B_{ij} = (0, \text{Id}) \quad \text{et} \quad \gamma_{ij}u = \begin{pmatrix} \gamma_{ij}^0 u = u \Big|_{\partial M_i \cap \overline{M}_j} \\ \gamma_{ij}^1 u = \frac{\partial u}{\partial n_{ij}} \Big|_{\partial M_i \cap \overline{M}_j} \end{pmatrix}.$$

*Professeur à l'Université de Toulon et du Var et à l'IUFM de la Seyne sur Mer

Sur ce cas très classique, on pourra consulter [3] pour un exposé rapide. Une analyse plus générale, pour plusieurs types d'équations et par diverses méthodes (méthode de projection, principe du maximum, calcul stochastique) est donnée dans la série d'articles de P.L. Lions [14, 15, 16] où l'on trouvera également un historique complet du problème. Dans le troisième article est évoqué l'intérêt possible de conditions d'interface plus générales éventuellement pseudo-différentielles. Cette remarque a pris corps avec les travaux de T. Hagstrom, A. Jazcilevich et R. Tewarson [10] et de B. Desprès [6] qui ont proposé des conditions d'interface conduisant à des algorithmes très efficaces.

Avant d'aller plus loin et puisque les motivations de ce travail sont d'ordre numérique, précisons que les qualités attendues d'un algorithme sont outre la rapidité, la robustesse et la simplicité de mise en œuvre. Le dernier critère conduit à exclure des méthodes "non linéaires" où les opérateurs B_{ij} dépendent de l'itérée u^n et auxquelles on peut penser pour des recouvrements de squelette multidimensionnel. Il implique aussi que l'analyse ait pour finalité le traitement de conditions d'interface locales, i.e. pour lesquelles les B_{ij} sont différentiels. Nous verrons que la situation théorique optimale correspond à des opérateurs B_{ij} pseudo-différentiels qu'il faut ensuite "approcher" par des opérateurs différentiels. La robustesse évite en pratique d'avoir à ajuster différents paramètres et donne de la souplesse pour envisager des raffinements numériques échappant à une analyse complète au niveau théorique. Dans le cas présent, la robustesse fait référence à au moins trois aspects : a) l'hypothèse d'ellipticité, b) la convergence avec ou sans chevauchement des sous-domaines, c) l'indépendance de cette convergence par rapport au schéma de l'algorithme (alterné, additif, simple ou double balayage . . .). Le dernier aspect c) peut être mis en correspondance avec la classe des algorithmes matriciels itératifs. Nous ne développons pas ce point ici nous limitant à la méthode additive et renvoyons pour plus de détails à [19][22]. Pour l'ellipticité, nous nous placerons dans un contexte d'ellipticité forte où l'opérateur P est exactement inversible. Cela couvre le cas d'équation d'advection-diffusion intervenant par exemple dans la résolution d'équations de type Navier-Stokes par des schémas implicites mais ne prend pas en compte l'application pourtant efficace de ces méthodes à des équations de type Helmholtz. Pour le point b), il est connu que le taux de convergence est amélioré par le chevauchement (overlapping en anglais) des sous-domaines d'un facteur $e^{-\frac{C\delta}{h}}$ pour un opérateur elliptique à petit paramètre $P(x, hD_x)$ et une épaisseur caractéristique de chevauchement de taille δ . L'idée d'avoir un algorithme robuste conduit donc à considérer le cas extrême où les sous-domaines sont simplement adjacents, $\delta = 0$. Dans ce cas on note $\partial M_i \cap \overline{M_j} = \partial M_j \cap \overline{M_i} =: M_{\{i,j\}}$ et nous verrons qu'il est plus commode de choisir une fois pour toute une orientation du fibré normal indépendamment de l'ordre ij ou ji pour la définition du vecteur trace. Ainsi le vecteur trace sera indexé par la paire $\{i, j\}$ tandis que l'on gardera l'indexation par le couple (i, j) , ou ij , pour les opérateurs B_{ij} voire pour les interfaces M_{ij} si l'on veut prendre en compte l'orientation. Nous écrirons donc la méthode additive de Schwarz (1.1) sous la forme

$$\begin{cases} Pu_i^{n+1} = f & \text{dans } M_i \\ B_{ij}\gamma_{\{i,j\}}u_i^{n+1} = B_{ij}\gamma_{\{i,j\}}u_j^n & \text{sur } M_{\{i,j\}}. \end{cases} \quad (1.2)$$

L'approche présentée ici part de deux constatations : 1) Pour des recouvrements en bandes et des conditions d'interface données par les projecteurs de Calderon-Seeley (ou exprimées de façon plus concrètes avec les opérateurs Dirichlet-Neumann pour des opérateurs P d'ordre 2),

l'algorithme (1.2) donne la solution exacte après N (le nombre de sous-domaines) itérations (cf [10][22]); 2) les conditions aux limites absorbantes introduites dans [6][21] qui donnent en pratique de très bons taux de convergence peuvent être vues comme des développements basses fréquences ou conormaux de ces conditions d'interfaces optimales. Après avoir fait une analyse complète dans le cas du découpage en bandes pour des opérateurs d'ordre 2 dans [19][20], nous avons cherché à étendre cette approche reposant sur la propriété 1) de nilpotence à des recouvrements plus généraux faisant éventuellement intervenir des problèmes à coins. Une difficulté de cette approche s'apparente à celle d'un problème inverse : il s'agit de trouver des conditions d'interface conduisant à la propriété de nilpotence 1). Nous verrons qu'il y a des obstacles topologiques liés au π_1 du squelette du recouvrement mais que ces obstructions ne sont pas trop gênantes en fin de compte.

Cette présentation comporte trois parties. Dans un premier temps nous allons étudier la question des conditions d'interface optimales et mettre en évidence dans un cadre abstrait les aspects topologiques. Ensuite nous rappellerons les résultats d'approximation locale et les compléterons par le traitement explicite d'un exemple avec $\pi_1 = \mathbb{Z}$. Enfin nous évoquerons la question des problèmes à coins.

2 A propos de la nilpotence

Avant de commencer signalons quelques références pour les problèmes elliptiques sur lesquelles nous nous appuyons : l'article de L. Boutet de Monvel [5] où est exposée la notion de condition de transmission et surtout pour notre objet rappelée la technique de réduction au bord, le livre de G. Grubb [9] pour la présentation des problèmes elliptiques à petit paramètre et l'article de M.A. Shubin [26] pour l'ellipticité uniforme sur des variétés non compactes à géométrie bornée.

2.1 Hypothèses géométriques et construction du revêtement \widehat{M}

Pour fixer les idées, nous nous placerons sur une variété riemannienne (M, g) sans bord. Plus précisément, nous considérons deux fibrés $\pi_E : E \rightarrow M$ et $\pi_F : F \rightarrow M$ sur M à géométrie bornée. Cela signifie en suivant [26] que

- a) La variété riemannienne (M, g) est complète.
- b) Il existe un rayon $r > 0$ tel que, en tout point $x \in M$, l'application $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ définit un difféomorphisme de la boule de rayon r , $B_{T_x M}(0, r)$ sur un voisinage $U_{x,r}$ de x et les fibrés E et F admettent des trivialisations sur $U_{x,r}$. Les cartes dites canoniques sont données par un repère orthonormé de $T_x M$ après composition avec $\exp^{-1} : U_{x,r} \rightarrow B_{T_x M}(0, r)$.
- c) Les changements de cartes pour $y : U = U_{x,r} \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $y' : U' = U_{x',r} \rightarrow \mathbb{R}^d$ avec $U \cap U' \neq \emptyset$ et, pour les fibrés E et F , les fonctions de transition $g_{UU'}$ vérifient uniformément par rapport à $x, x' \in M$

$$\left| \partial_{\underline{y}}^\alpha (y' \circ y^{-1})(\underline{y}) \right| \leq C_{\alpha,r}$$

et

$$\left| \partial_{\underline{y}}^\alpha g_{UU'}(\underline{y}) \right| \leq C_{\alpha,r}, \quad \forall \underline{y} \in y(U \cap U').$$

Ces conditions permettent de bien définir les espaces fonctionnels de façon globale sur M (de type Sobolev par exemple $H^s(M)$, $H^s(M; E)$, $W^{s,p}(M)$, $W^{s,p}(M; E)$, etc ...). Elles assurent par exemple que les opérateurs différentiels uniformes,

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\underline{y}) \partial_{\underline{y}}^\alpha \quad \text{avec} \quad \left| \partial_{\underline{y}}^\beta a_\alpha(\underline{y}) \right| \leq C_{\alpha,\beta}, \quad (2.1)$$

sont continus de $H^s(M; E)$ dans $H^{s-m}(M; F)$. Elles permettent aussi de définir proprement une notion d'ellipticité uniforme. Un autre intérêt de cette notion de géométrie bornée est qu'elle s'exprime avec des quantités locales et passe aux revêtements. Ainsi, si $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$ est un revêtement C^∞ de M , les fibrés π^*E et π^*F sont à géométrie bornée et l'opérateur π^*P , bien défini car P est local, est encore un opérateur différentiel uniforme. Nous renvoyons pour plus de détails à [26] et aux références citées dans cet article.

Nous précisons maintenant la nature du recouvrement $M = \bigcup_{i=1}^N \overline{M}_i$ que nous considérons dans ce paragraphe et construisons à partir de là un revêtement \widehat{M} de M utile pour la suite. Nous nous limitons ici au recouvrements unidimensionnels.

Hypothèse 2.1. *Le squelette du recouvrement est supposé être un graphe :*

$$(\#\{i, j, k\} = 3) \Rightarrow (\overline{M}_i \cap \overline{M}_j \cap \overline{M}_k = \emptyset).$$

Les domaines ne se chevauchent pas :

$$(i \neq j) \Rightarrow (M_i \cap M_j = \emptyset).$$

Les ouverts M_i sont supposés connexes et réguliers : Les frontières $M_{\{i,j\}} = \overline{M}_i \cap \overline{M}_j$ non vides sont des sous-variétés C^∞ de codimension 1, propres, à fibré normal $T_{M_{\{i,j\}}} M$ trivial.

De plus ces interfaces $M_{\{i,j\}}$ satisfont la propriété d'uniformité suivante : Pour tout $x \in M_{\{i,j\}}$ il existe des coordonnées canoniques $\underline{y} = (\underline{y}', \underline{y}_n)$ dans $U_{x,r}$ pour lesquelles $M_{\{i,j\}}$ est donnée par

$$\underline{y}_n = f_x(\underline{y}'), \quad |\underline{y}'| \leq C^{-1}r, \quad \left| \partial_{\underline{y}'}^\alpha f_x \right| \leq C_\alpha,$$

avec des constantes C et C_α indépendantes de $x \in M_{\{i,j\}}$.

La dernière assertion nous assure que les interfaces $M_{\{i,j\}} \neq \emptyset$ munies de la métrique induite par g sont à géométrie bornée et que l'opérateur trace d'ordre m

$$\gamma_{\{i,j\}}^m u := \left(u \Big|_{M_{\{i,j\}}}, \partial_{n_{\{i,j\}}} u \Big|_{M_{\{i,j\}}}, \dots, \partial_{n_{\{i,j\}}}^{m-1} u \Big|_{M_{\{i,j\}}} \right)^t, \quad (2.2)$$

est bien défini, continu et surjectif de $H^s(M)$ dans $\bigoplus_{k=0}^{m-1} H^{s-\frac{1}{2}-k}(M_{\{i,j\}}) =: \gamma_{\{i,j\}}^m H^s(M_{\{i,j\}})$ pour $s > m - \frac{1}{2}$. Le vecteur unitaire normal noté ici $n_{\{i,j\}}$ est orienté une fois pour toutes indépendamment de l'ordre entre i et j . Nous supposons également dans le cas non compact que l'épaisseur des domaines M_i ne dégénère pas. On note selon l'usage $H^m(\overline{M}_i)$, l'espace des restrictions à M_i des éléments de $H^m(M)$.

Hypothèse 2.2. *On se place dans le cadre de l'identité $H^m(M_i) = H^m(\overline{M}_i)$ et on suppose que l'opérateur de restriction $: u \rightarrow u \Big|_{M_i}$ admet un inverse à droite continu.*

Cette hypothèse qui pose l'existence d'un opérateur de prolongement global de M_i vers M est vérifiée avec la construction locale si les frontières de M_i ne se rapprochent pas trop à l'infini. Elle entraîne immédiatement la propriété suivante

Lemme 2.3. *Pour $M_{\{i,j\}} \neq \emptyset$, l'opérateur trace $\gamma_{\{i,j\}}^m$ est bien défini, continu et surjectif de $H^m(M_i)$ sur $\gamma_{\{i,j\}}^m H^m(M_{\{i,j\}})$.*

Nous allons maintenant construire le revêtement \widehat{M} de M qui nous est utile pour exprimer les conditions d'interfaces quasi-optimales. On notera Σ le squelette du recouvrement, $\Sigma_0 = \{1, \dots, N\}$, l'ensemble de ses sommets et $\Sigma_1 = \{\{i, j\}, M_{\{i,j\}} \neq \emptyset\}$ l'ensemble de ses arêtes. On désigne par $\widehat{\Sigma}$ le revêtement universel de Σ , $\widehat{\Sigma}_0$ l'ensemble de ses sommets et $\widehat{\Sigma}_1$ l'ensemble de ses arêtes.

Sans risque de confusion avec l'ordre de dérivation partielle on utilise les symboles α, β, \dots pour désigner des éléments génériques de $\Sigma_1, \widehat{\Sigma}_1$, en précisant bien sûr l'ensemble en question si besoin est.

La projection naturelle de $\widehat{\Sigma}$ sur Σ est notée σ et on définit au niveau ensembliste \widehat{M} comme l'union disjointe

$$\widehat{M} := \bigsqcup_{i \in \widehat{\Sigma}_0} \widehat{M}_i \sqcup \bigsqcup_{\alpha \in \widehat{\Sigma}_1} \widehat{M}_\alpha,$$

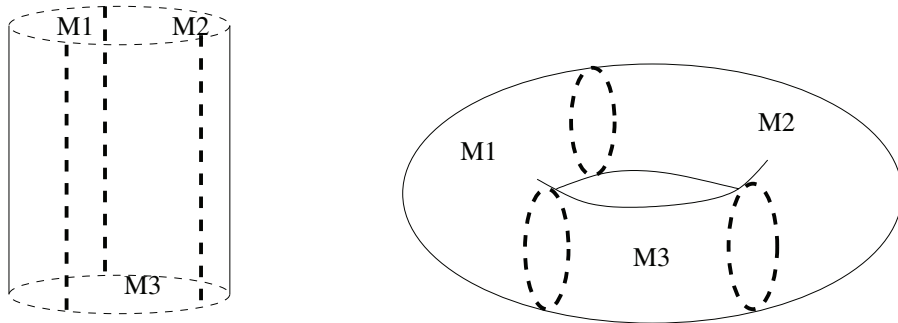
où \widehat{M}_i et \widehat{M}_α sont respectivement difféomorphes à $M_{\sigma(i)}$ et $M_{\sigma(\alpha)}$. La relation d'adjacence de ces morceaux de \widehat{M} est donnée par $\widehat{\Sigma}$ et donc localement par Σ . Les structures différentielle et riemannienne sont localement celles de M , d'où les propriétés de géométrie bornée.

Le graphe $\widehat{\Sigma}$ est simplement connexe et donc chacune de ses arêtes le sépare en deux composantes (simplement) connexes. Cela se traduit sur \widehat{M} par le

Lemme 2.4. *Pour chaque hypersurface \widehat{M}_α , $\alpha \in \widehat{\Sigma}_1$, $\widehat{M} \setminus \widehat{M}_\alpha$ a exactement deux composantes connexes.*

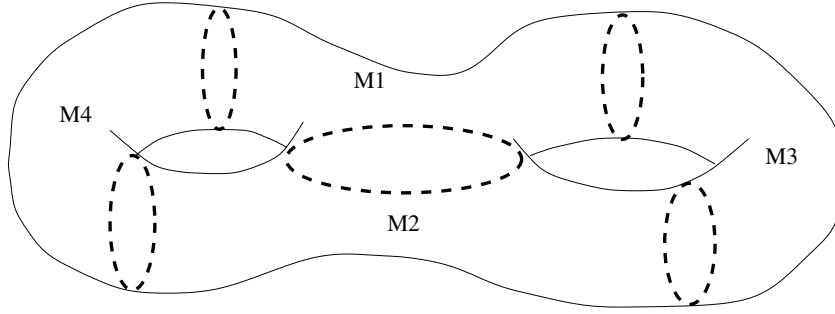
Exemple 2.1. a) *Le cas de \mathbb{R}^d découpé en bandes qui a été traité dans [19, 20] correspond au cas où Σ est un segment.*

b) *Les deux exemples ci-dessous où respectivement $M = S^1 \times \mathbb{R}$ et $M = \mathbb{T}^2$ correspondent au cas le plus simple avec un π_1 non trivial.*

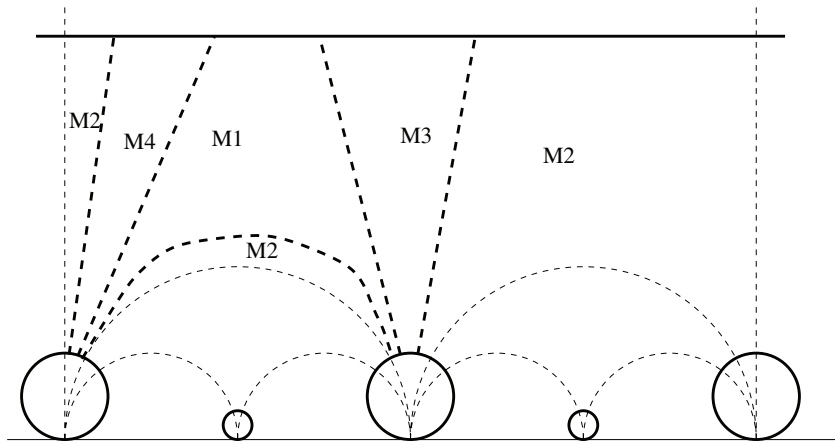


Le revêtement \widehat{M} est alors respectivement \mathbb{R}^2 et $S^1 \times \mathbb{R}$.

c) *Dans le cas ci-dessous, le squelette Σ présente un π_1 à deux générateurs.*



Le revêtement \widehat{M} peut alors se décrire en “vue de dessus” à partir du revêtement universel de la sphère moins trois points dans le demi-plan de Poincaré (cf [25] Chap 1).



2.2 Hypothèses sur l’opérateur P et rappels sur le projecteur de Calderon-Seeley

Nous considérons un opérateur différentiel P de degré m uniformément elliptique sur M . Pour simplifier l’exposé nous supposons P scalaire, mais les raisonnements s’appliquent aux systèmes. Comme opérateur local, P se relève naturellement au revêtement \widehat{M} et est uniformément elliptique sur \widehat{M} . On rappelle le résultat de régularité uniforme donné dans [26] pour $s, t \in \mathbb{R}$:

$$\|u\|_{H^s} \leq C (\|Pu\|_{H^{s-m}} + \|u\|_{H^t}), \quad \forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(M) \text{ ou } \mathcal{C}_0^\infty(\widehat{M}).$$

Nous supposons de plus :

Hypothèse 2.5. Pour $s \in \mathbb{R}$ (un s_0 suffit), l’opérateur différentiel P définit une bijection de $H^s(\widehat{M})$ sur $H^{s-m}(\widehat{M})$.

Remarque 2.6. Une telle hypothèse ne conduit pas nécessairement à l’inversibilité de $H^s(M)$ sur $H^{s+m}(M)$. Cela vaut en particulier quand le volume des boules dans \widehat{M} croît exponentiellement par rapport à la distance, les estimations de décroissance exponentielle de la fonction de Green de P pouvant ne pas suffir. Pour une discussion similaire et plus détaillée pour des questions de théorie spectrale, nous renvoyons encore à [26]. Un cas de croissance exponentielle

du volume peut être obtenu avec l'exemple c). Cependant la condition de convergence de l'algorithme (1.2) avec conditions d'interface quasi-optimales est comme nous allons le voir une condition suffisante d'inversibilité sur M assez précise.

Exemple 2.2. Un exemple trivial qui satisfait l'hypothèse 2.5 dans tous les cas est l'opérateur $1 - \Delta$, où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M ou \widehat{M} . On peut aussi considérer la version à petit paramètre $1 - h^2 \Delta$. Nous discuterons un autre exemple intéressant pour les applications dans la section suivante.

Nous considérons une hypersurface X de \widehat{M} ayant toutes les propriétés des \widehat{M}_α . Nous rappelons la définition des projecteurs de Calderon-Seeley associés à (X, P) . Avec nos hypothèses de géométrie et le caractère local de P , ce projecteur peut être défini ici de façon exacte. Ce n'est plus le cas si P est un opérateur pseudo-différentiel non local satisfaisant la condition de transmission. Il faut alors se contenter de développements asymptotiques (cf [5]).

On notera Ω_- et Ω_+ les deux composantes connexes de $\widehat{M} \setminus X$ (cf lemme 2.4). Il s'agit de deux ouverts réguliers tels que le vecteur trace d'ordre m $\gamma_X^m : H^s(\Omega^\pm) \rightarrow \gamma^m H^m(X)$ est continu et surjectif (là encore l'orientation du fibré normal est fixée et importe peu). On note $r_\pm : H^s(\widehat{M}) \rightarrow H^s(\Omega_\pm)$ l'opérateur de restriction et $e_\pm : H^s(\Omega_\pm) \rightarrow L^2(\widehat{M})$ l'opérateur de prolongement par 0 bien défini pour $s \geq 0$.

On construit alors l'opérateur de Poisson $K_\pm : \gamma^m H^m(X) \rightarrow H^m(\Omega_\pm)$ en posant

$$K_\pm(\gamma_X^m f) := f - r_\pm P^{-1} e_\pm P f, \quad \forall f \in H^m(\Omega_\pm). \quad (2.3)$$

L'identité ci-dessus définit bien $K_\pm \gamma$ indépendamment du choix de f avec $\gamma = \gamma_X f$. En effet si f est de trace nulle alors $e_\pm P f = P e_\pm f$, car P est différentiel et d'ordre m , et le second membre ci-dessus est nul.

Le projecteur de Calderon-Seeley est alors donné comme un endomorphisme de $\gamma^m H^m(X)$ par

$$\Pi_\pm(\gamma_X^m f) = (\gamma_X^m \circ K_\pm)(\gamma_X^m f) = \gamma_X^m f - \gamma_X^m r_\pm P^{-1} e_\pm P f. \quad (2.4)$$

On vérifie aisément les propriétés classiques :

Proposition 2.7. L'opérateur π_\pm est un projecteur continu sur $\gamma^m H^m(X)$.

Preuve : On écrit tout simplement

$$(\Pi_+ \circ \Pi_+)(\gamma_X^m f) = \Pi_+(\gamma_X^m f) - \gamma_X^m r_+ P^{-1} e_+ P f + \gamma_X^m r_+ P^{-1} e_+ P r_+ P^{-1} e_+ P f.$$

Dans le dernier terme $P r_+ P^{-1} e_+ = Id$ parce que P est différentiel. □

Un problème aux limites suppose en plus de P la donnée d'un opérateur T de $\gamma^m H^m(X)$ sur un espace fonctionnel E de sections d'un fibré sur X . On cherche alors à inverser

$$\begin{pmatrix} P \\ T \circ \gamma_X^m \end{pmatrix} : H^m(\Omega_+) \rightarrow \begin{pmatrix} L^2(\Omega_+) \\ E \end{pmatrix}.$$

On rappelle les résultats suivants qui ici ont une forme exacte.

Proposition 2.8. a) Si T est surjectif de $\text{Im } \Pi_+$ sur E alors le problème aux limites

$$\begin{cases} Pu = f \in L^2(\Omega_+) \\ T \circ \gamma_X^m u = g \in E \end{cases} \quad (2.5)$$

admet une solution $u \in H^m(\Omega_+)$.

- b) Si T est injectif de $\text{Im } \Pi_+$ dans E , alors (2.5) admet au plus une solution u dans $H^m(\Omega_+)$.
c) Pour $T = \Pi_+ : \gamma^m H^m(X) \rightarrow \text{Im } \Pi_+$, alors on a

$$\left(\begin{array}{c} P \\ \Pi_+ \circ \gamma_X^m \end{array} \right)^{-1} = (r_+ P^{-1} e_+, K_+). \quad (2.6)$$

Preuve : a) On utilise encore le fait que P est local pour écrire

$$\left(\begin{array}{c} P \\ T \circ \gamma_X^m \end{array} \right) (r_+ P^{-1} e_+, K_+) = \left(\begin{array}{cc} Id & 0 \\ T \circ \gamma_X^m r_+ P^{-1} e_+ & T \circ \Pi_+ \end{array} \right)$$

et la conclusion est immédiate.

b) et c) Si T est injectif de $\text{Im } \Pi_+$ dans E alors l'opérateur $K_+ T^{-1}$ est bien défini sur $\text{Im } T$. On obtient alors

$$\begin{aligned} (r_+ P^{-1} e_+, K_+ T^{-1}) \left(\begin{array}{c} P \\ T \circ \gamma_X^m \end{array} \right) &= r_+ P^{-1} e_+ P + K_+ \gamma_X^m \\ &= r_+ P^{-1} e_+ P + Id - r_+ P^{-1} e_+ P = Id, \end{aligned} \quad (2.7)$$

d'où le résultat. \square

Corollaire 2.9. *L'opérateur de Poisson K_+ définit un isomorphisme de $\Pi_+(\gamma^m H^m(X))$ sur $\{u \in H^m(\Omega_+), Pu = 0\}$ et $\|K_+ \gamma\|_{H^m(\Omega_+)}$ est une norme sur $\text{Im } \Pi_+$.*

Bien sûr les deux résultats ci-dessus se transposent en changeant de signe. On a de plus la

Proposition 2.10. *Dans $\gamma^m H^m(X)$, les deux projecteurs Π_+ et Π_- sont supplémentaires :*

$$\Pi_+ \oplus \Pi_- = Id.$$

Preuve : Cela vient de la relation $e_+ r_+ \oplus e_- r_- = Id$ dans $L^2(\widehat{M})$.

$\text{Im } \Pi_+ \cap \text{Im } \Pi_- = \{0\}$: En effet si $\gamma \in \gamma^m H^m(X)$ est dans l'intersection alors $u_+ = K_+ \gamma$ et $u_- = K_- \gamma$ vérifient $Pu_{\pm} = 0$ respectivement dans Ω_{\pm} avec $\gamma_X^m u_{\pm} = \gamma$. Comme les traces coïncident sur X et comme P est local, $u = e_+ u_+ + e_- u_-$ résout $Pu = 0$ dans \widehat{M} . Donc $u = 0$ et $\gamma = 0$.

$\text{Ker } \Pi_+ \subset \text{Im } \Pi_-$: Supposons que $\gamma \in \gamma^m H^m(X)$ vérifie $\Pi_+ \gamma = 0$. On prend $u \in H^m(\widehat{M})$ tel que $\gamma_X^m u = \gamma$ et on pose $Pu =: f$ dans $L^2(\widehat{M})$ et $u_+ \in H^m(\Omega_+)$. Comme P est local u_+ résout

$$\begin{cases} Pu_+ = f & \text{dans } \Omega_+ \\ \Pi_+(\gamma_X^m u_+) = \Pi_+ \gamma = 0 \end{cases}$$

et vaut donc d'après la Proposition 2.8 c) $u_+ = r_+ P^{-1} e_+ r_+ f$. On écrit l'équation pour $u_- = r_- u$:

$$\begin{cases} Pu_- = f & \text{dans } \Omega_- \\ \Pi_-(\gamma_X^m u_-) =: \gamma_1, \end{cases}$$

d'où l'on tire $u_- = r_- P^{-1} e_- r_- f + K_- \gamma_1$. Or on a

$$P^{-1}(e_- r_- f) = P^{-1}(\text{Id} - e_+ r_+) f = P^{-1} f - P^{-1} e_+ r_+ f$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_X^m u_- &= \gamma_X^m (r_- P^{-1} e_- r_- f) + \gamma_X^m K_- \gamma_1 \\ &= \gamma_X^m (P^{-1} f) - \gamma_X^m (P^{-1} e_+ r_+ f) + \gamma_1 \\ &= \gamma_X^m u - \gamma_X^m r_+ u + \gamma_1 = \gamma_1 = \Pi_- \gamma. \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.11. *La quantité $\|K_+ \Pi_+ \gamma\|_{H^m(\Omega_+)} + \|K_- \Pi_- \gamma\|_{H^m(\Omega_-)}$ définit une norme sur $\gamma^m H^m(X)$ que l'on notera simplement $\|\gamma\|_{\gamma^m H^m}$.*

On termine ces rappels par la

Proposition 2.12. *Pour $X' \subset \Omega_+$ une hypersurface vérifiant les mêmes propriétés que X , on note Ω'_+ la composante connexe de $\widehat{M} \setminus X'$ incluse dans Ω_+ (Ω'_- l'autre), $\gamma_{X'}^m$ l'opérateur trace et Π'_\pm les projecteurs de Calderon-Seeley correspondants. Alors avec les normes définies plus haut l'opérateur $\gamma_{X'}^m \circ K_+$ est une contraction de $\text{Im } \Pi_+$ dans $\text{Im } \Pi'_+$ que l'on notera $T_{X' \leftarrow X}$. De plus si $\gamma^m : H^m(\Omega'_- \cap \Omega_+) \rightarrow \gamma^m H^m(X)$ est continu alors $T_{X' \leftarrow X}$ est une contraction stricte :*

$$\|T_{X' \leftarrow X} \gamma\|_{\gamma^m H^m(X')} \leq \kappa \|\gamma\|_{\gamma^m H^m(X)}, \quad \forall \gamma \in \text{Im } \Pi_+, \quad \text{avec } \kappa < 1.$$

Preuve : Si $\gamma \in \text{Im } \Pi_+$ alors $u := K_+ \gamma$ vérifie $Pu = 0$ dans Ω_+ avec $\gamma^m u = \gamma$. En particulier, la restriction $u' := u|_{\Omega'_+}$ vérifie $Pu' = 0$ dans Ω'_+ et $\gamma_{X'}^m u' = \gamma_{X'}^m$, ce dont on tire $u' = K'_+ \gamma_{X'}^m K_+ \gamma$.

On obtient pour $\gamma \in \text{Im } \Pi_+$

$$\begin{aligned} \|\gamma_{X'}^m K_+ \gamma\|_{\gamma^m H^m(X')} &= \left\| K_+ \gamma \Big|_{\Omega'_+} \right\|_{H^m(\Omega'_+)} \\ &= \|K_+ \gamma\|_{H^m(\Omega_+)} - \left\| K_+ \gamma \Big|_{\Omega_+ \cap \Omega'_-} \right\|_{H^m(\Omega_+ \cap \Omega'_-)} \\ &= \|\gamma\|_{\gamma^m H^m(X)} - \left\| K_+ \gamma \Big|_{\Omega_+ \cap \Omega'_-} \right\|_{H^m(\Omega_+ \cap \Omega'_-)}. \end{aligned}$$

D'où la propriété de contraction. Si on a de plus

$$\left\| u \Big|_{\Omega_+ \cap \Omega'_-} \right\|_{H^m(\Omega_+ \cap \Omega'_-)} \geq C^{-1} \|\gamma^m u\|_{\gamma^m H^m(X)},$$

on obtient la dernière estimation avec $\kappa = 1 - C^{-1}$.

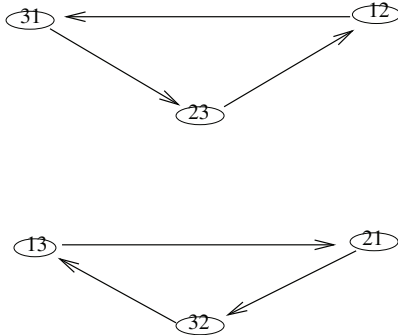
□

2.3 Sous-structuration

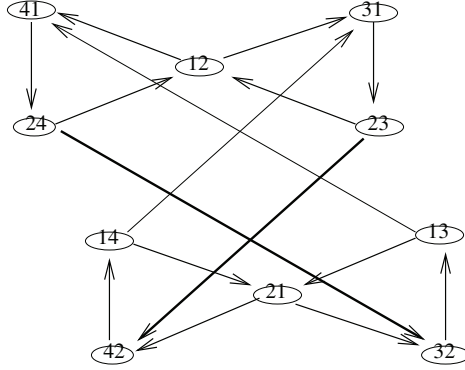
Ce qui est appelée sous-structuration dans le cadre de la décomposition de domaine est en fait une réduction aux bords, simultanée dans tous les sous-domaines. L'inversion de P se ramène alors à l'inversion d'une matrice à coefficients opérateurs agissant sur les traces et l'algorithme (1.2) s'interprète comme une méthode itérative de résolution de système (Jacobi dans ce cas). Comme notre objet est dans ce chapitre la nilpotence, nous allons nous limiter au cas que nous avons déjà appelé quasi-optimal où les opérateurs B_{ij} ne sont rien d'autre que des projecteurs de Calderon-Seeley construits sur le revêtement \widehat{M} . De la même façon que précédemment, nous avons des projecteurs Π_+ et Π_- sur l'hypersurface X , nous prenons en compte l'orientation de M_{ij} . Plus précisément, au passage de M_j à M_i est associée une orientation du revêtement universel $\widehat{\Sigma}$ de Σ et donc si X désigne une antiimage de $M_{\{i,j\}}$ pour la projection de \widehat{M} sur M les signes pour les deux composantes connexes de $\widehat{M} \setminus X$ sont déterminés. L'ouvert Ω_+ sera la composante contenant l'antiimage de M_i adjacente à X et on note Π_{ij} le projecteur défini comme Π_+ plus haut, Π_{ji} étant alors associé à Π_- . La contravariance au niveau de la notation Π_{ij} est commode pour écrire les équations. En accord avec les notations précédentes, on introduit l'ensemble $\vec{\Sigma}_1 := \{(j, i), M_{\{i,j\}} \neq \emptyset\}$. Sur $\vec{\Sigma}_1$ on construit alors le graphe dirigé (ou groupoïde) Γ en mettant une flèche de source $ij \in \vec{\Sigma}_1$ et de but $kl \in \vec{\Sigma}_1$ si $l = i$ et $k \neq j$. Ce graphe dirigé correspond localement à un sens de parcours du recouvrement ou de son squelette Σ . L'orientation des hypersurfaces M_{ij} ne peut pas être défini en général de façon globale. On peut arbitrairement mettre un signe et écrire au niveau ensembliste $\vec{\Sigma}_1 = \Sigma_1 \times \{-, +\}$ mais alors il faut garder à l'esprit que le déplacement suivant les flèches de Γ peut permuter les signes.

De la même façon que l'on a défini Π_{ij} , on sait ce qu'est l'opérateur de Poisson K_{ij} . On notera encore $\alpha, \beta \dots$ les éléments génériques de $\vec{\Sigma}_1$ et pour une flèche de Γ de source α et de but β , on peut définir de façon analogue au $T_{X' \leftarrow X}$ introduit plus haut, la contraction $T_{\beta \leftarrow \alpha}$ et poser $T_{\beta \leftarrow \alpha} = 0$ si $\alpha \rightarrow \beta$ n'est pas une flèche de Γ . On notera Γ_1 l'ensemble des flèches de Γ , l'ensemble des points étant déjà désigné par $\vec{\Sigma}_1$. Nous donnons ci-dessous les graphes Γ correspondant aux Exemples 2.1 b) et c).

Exemple 2.3. a) *Le graphe Γ associé au tore découpé en trois (ou $N \geq 3$) sous-domaines présente deux composantes connexes et l'orientation des interfaces peut-être faite de façon globale.*



b) *Le cas avec deux générateurs de l'exemple 2.1 c) conduit à un graphe Γ un peu plus compliqué avec une seule composante connexe.*



En prenant les projecteurs de Calderon-Seeley définis dans \widehat{M} comme conditions d'interface, $B_{ij} = \Pi_{ij}$, la Proposition 2.10 rend pertinent l'algorithme (1.2). En effet elle donne immédiatement, pour $f \in L^2(M)$, l'équivalence entre l'équation $Pu = f$ et le système

$$\begin{cases} Pu_i = f \text{ dans } M_i \\ \Pi_{ij}\gamma_{\{i,j\}}^m u_i = \Pi_{ij}\gamma_{\{i,j\}}^m u_j \text{ sur } M_{\{i,j\}} \end{cases}, \quad i \in \Sigma_0, \{i, j\} \in \Sigma_1. \quad (2.8)$$

Le fait que l'algorithme est bien posé repose sur le résultat suivant où on identifie $M_i \subset M$ et une de ses antiimage \widehat{M}_i .

Proposition 2.13. *Pour $i \in \Sigma_0$, $f \in L^2(M_i)$ et une famille donnée $(g_j)_{\{i,j\} \in \Sigma_1}$, $g_j \in \text{Im } \Pi_{ij}$, le problème aux limites*

$$\begin{cases} Pv = f \text{ dans } M_i \\ \Pi_{ij}\gamma_{\{i,j\}}^m v = g_j \text{ sur } M_{\{i,j\}}, \{i, j\} \in \Sigma_1 \end{cases}$$

admet comme solution unique dans $H^m(M_i)$

$$v = \left(\sum_{\{i,j\} \in \Sigma_1} K_{ij} g_j + P^{-1} \dot{f} \right) \Big|_{M_i} \quad (2.9)$$

en posant $\dot{f} := 1_{M_i} f \in L^2(\widehat{M})$.

Preuve : Le fait que \dot{f} est nulle en dehors de M_i entraîne que les traces de $w = P^{-1} \dot{f}$ vérifient

$$\gamma_{\{i,j\}} w \in \text{Im } \Pi_{ji} = \text{Ker } \Pi_{ij}.$$

On se ramène donc par linéarité, en soustrayant $P^{-1} \dot{f}$, au cas où $f = 0$.

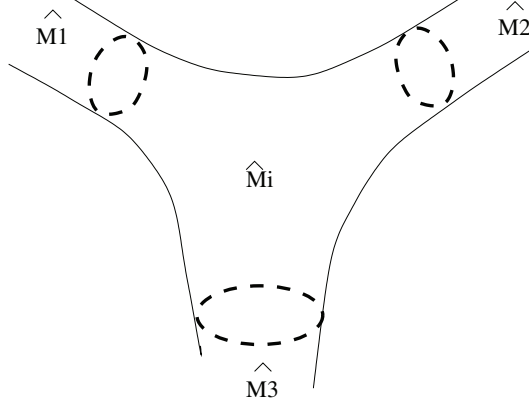
On note que l'expression (2.9) donne une solution. En effet chaque terme de la somme vérifie $Pv = 0$ avec $v \in H^m(M_i)$, par définition de l'opérateur de Poisson K_{ij} . De plus pour $\{i, j\}, \{i, j'\} \in \Sigma_1$ on a

$$\gamma_{\{i,j'\}} K_{ij} g_j = \begin{cases} \Pi_{ij} g_j = g_j \text{ si } j' = j \\ \in \text{Im } \Pi_{j'i} = \text{Ker } \Pi_{ij'} \text{ si } j' \neq j. \end{cases}$$

Pour obtenir l'unicité, on remarque que la nullité de tous les g_j , $\{i, j\} \in \Sigma_1$, signifie que les traces de $\gamma_{\{i,j\}} v$ appartiennent aux images $\text{Im } \Pi_{ji}$ et que v peut donc se prolonger en utilisant

les opérateurs de Poisson K_{ji} en une fonction $\hat{v} \in H^m(\widehat{M})$ telle que $P\hat{v} = 0$. Cela entraîne nécessairement $\hat{v} = 0$ et donc $v = 0$. \square

Nous choisissons le cas de la figure ci-dessous pour illustrer la construction de la solution v pour $f = 0$ dans \widehat{M}_i .



Elle s'obtient en superposant les solutions données par les opérateurs de Poisson pour les trois domaines $\widehat{M} \setminus \widehat{M}_j$, $j = 1, 2, 3$.

On en arrive à la sous-structuration proprement dite. En fait c'est l'étape qui prend en compte le principe même des méthodes de décomposition de domaines : on suppose que l'on sait résoudre l'équation $Pu = f$ dans les sous-domaines M_i (pour des conditions aux bords arbitraires). Soient donc des $w_i \in H^m(M_i)$ tels que $Pw_i = f$ dans M_i , $i \in \Sigma_0$. En posant $v_i = u_i - w_i$, le système (2.8) devient équivalent

$$\begin{cases} Pv_i = 0 & \text{dans } M_i \\ \Pi_{ij}\gamma_{\{i,j\}}v_i = \Pi_{ij}\gamma_{\{i,j\}}v_j + \Pi_{ij}\gamma_{\{i,j\}}(w_j - w_i) & \text{sur } M_{\{i,j\}}. \end{cases}$$

On pose $h_{ij} := \Pi_{ij}\gamma_{\{i,j\}}v_i$ et $w_{ij} = \Pi_{ij}\gamma_{\{i,j\}}(w_j - w_i)$ et on introduit la notation vectorielle $H := (h_\alpha)_{\alpha \in \vec{\Sigma}_1}$, $W := (w_\alpha)_{\alpha \in \vec{\Sigma}_1}$. Et le système précédent s'écrit tout simplement $H = \mathcal{T}H + W$ avec $\mathcal{T} := (T_{\beta \leftarrow \alpha})_{\alpha, \beta \in \vec{\Sigma}_1}$. La question de l'inversibilité de $Id - \mathcal{T}$ se déduit de l'estimation de $\|\mathcal{T}\|$ pour une norme d'algèbre $\|\cdot\|$. En prenant par exemple $\|\mathcal{T}\| := \sup_\alpha \sum_\beta \|T_{\alpha \leftarrow \beta}\|$ ou $\|\mathcal{T}\| := \sup_\alpha \sum_\beta \|T_{\beta \leftarrow \alpha}\|$ et en notant

$$K_\Gamma := \sup_{\alpha \in \vec{\Sigma}_1} \{ \#\{\beta \leftarrow \alpha \in \Gamma_1\}, \#\{\alpha \leftarrow \beta \in \Gamma_1\} \} \quad (2.10)$$

$$\text{et } \rho := \sup_{\alpha, \beta \in \vec{\Sigma}_1} \|T_{\beta \leftarrow \alpha}\| \quad (\leq 1), \quad (2.11)$$

on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.14. *Si $K_\Gamma \rho < 1$, alors l'équation $Pu = f$, pour $f \in L^2(M)$, admet une unique*

solution $u \in H^m(M)$. Les w_i , $i \in \Sigma_0$, étant choisis comme ci-dessus, elle est donnée par

$$u \Big|_{M_i} = w_i + \sum_{\{i,j\} \in \Sigma_1} K_{ij} h_{ij}$$

avec $H = (Id - \mathcal{T})^{-1}W$.

Remarque 2.15. On peut se demander, comment la condition suffisante $K_\Gamma \rho < 1$ dépend de l'opérateur P . En fait c'est dans le choix de la norme sur $\gamma^m H^m(M_\alpha)$, $\alpha \in \Sigma_1$. Il n'y a donc pas de miracle et on retombe à peu de chose près sur les conditions évoquées dans [26]. La majoration $K_\Gamma \rho < 1$ peut néanmoins s'obtenir assez facilement dans des cas particuliers intéressants.

2.4 Convergence et nilpotence de l'algorithme

La nature matricielle de l'algorithme (1.2) se comprend dans le cadre du théorème précédent en posant par exemple $w_i = u_i^0$ la donnée initiale pour l'algorithme et $v_i^n = u_i^n - u_i^0$ pour $n \geq 1$. En construisant à partir de là les vecteurs W et H^n , $n \geq 0$, l'algorithme (1.2) devient équivalent à

$$H^{n+1} = \mathcal{T}H^n + W, \quad n \geq 0.$$

On a alors facilement

Théorème 2.16. La méthode de décomposition de domaines (1.2) converge dans $\oplus_{i \in \Sigma_0} H^m(M_i)$ dès que les quantités K_Γ et ρ définies en (2.10) et (2.11) vérifient $K_\Gamma \rho < 1$. Plus précisément, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{i \in \Sigma_0} \|u_i - u_i^n\|_{H^m(M_i)} \leq C(K_\Gamma \rho)^n.$$

Le résultat suivant donne une condition suffisante, facile à vérifier sur le graphe dirigé Γ et probablement optimale pour que \mathcal{T} soit une matrice nilpotente et que l'algorithme (1.2) donne la solution en nombre fini d'itérations. Un chemin de Γ est une suite éventuellement finie de flèches qui s'enchaînent et sa longueur sera par définition le nombre de points.

Théorème 2.17. Si le graphe Γ ne présente pas de cycle et si L_Γ désigne dans ce cas la longueur maximale des chemins de Γ , alors $\mathcal{T}^{L_\Gamma} = 0$ ou encore

$$u_i^{L_\Gamma} = u \Big|_{M_i} \quad \forall i \in \Sigma_0. \quad (2.12)$$

Remarque 2.18. La convergence (2.12) est valable si on peut utiliser la matrice \mathcal{T} dès l'itération $n = 1$, c'est à dire si les u_i^0 , $i \in \Sigma_0$, vérifient déjà $Pu_i^0 = f$ dans M_i . Il est donc plus correct de considérer (2.12) comme un résultat de convergence en $L_\Gamma + 1$ itérations.

Preuve : La démonstration est triviale. Si Γ n'a pas de cycle, tous ses chemins sont finis et en nombre fini. Le nombre L_Γ est donc un entier bien défini et on peut de plus parler des racines et des feuilles de Γ . Chaque itération de \mathcal{T} annule les composantes indexées par les racines et

fait monter les 0 d'un cran vers les feuilles. □

Il est clair que si Γ n'a pas de cycle, alors le squelette Σ est simplement connexe (par l'absurde, il est facile de construire un cycle de Γ à partir d'un lacet non contractile de Σ). On a également la réciproque.

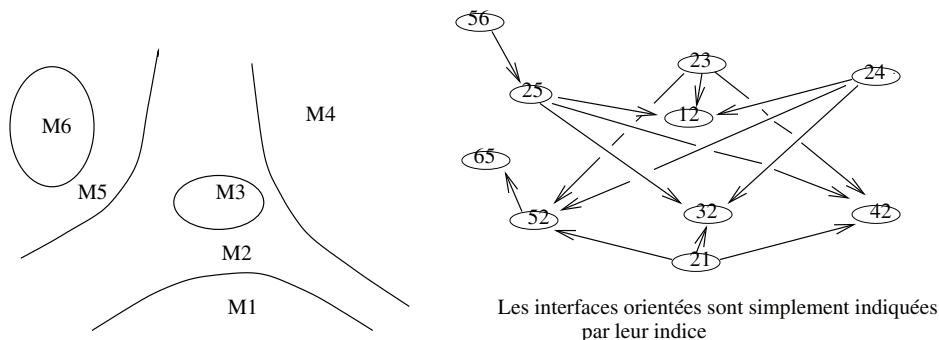
Corollaire 2.19. *Si le squelette Σ est simplement connexe $\pi_1(\Sigma) = \{e\}$ alors la matrice \mathcal{T} est nilpotente et l'algorithme (1.2) donne la solution exacte en un nombre fini d'itérations.*

Preuve : Un cycle de Γ s'il existe définit aussi un lacet non contractile de Σ . □

Exemple 2.4. a) *Dans [19] et [20], nous avons traité le cas de \mathbb{R}^n découpé en bandes et de P opérateur elliptique d'ordre 2. A noter que dans ce cas, voire même pour un opérateur d'ordre quelconque et des interfaces proches d'hyperplans orthogonaux à la direction x_n (pour simplifier), on peut remplacer l'hypothèse d'ellipticité forte de P par celle de $e^{\varepsilon x_n} P e^{-\varepsilon x_n}$ avec $\varepsilon \neq 0$. En prenant en compte, l'étape 0 d'initialisation de l'algorithme qui demande effectivement une résolution dans chaque sous-domaine, on retrouve le résultat de convergence en N itérations.*

b) *Plus généralement si la variété M est simplement connexe, le squelette Σ l'est aussi et tout algorithme de décomposition de domaine avec les projecteurs de Calderon-Seeley comme conditions d'interface a la propriété de nilpotence.*

c) *L'exemple suivant bien que simple, montre que la structure de Γ peut être assez compliquée et ne présenter aucun cycle.*



d) *Un exemple classique, où l'on a plus vraiment d'ellipticité forte mais où l'on peut faire une construction similaire avec d'autres espaces fonctionnels (espaces de Hardy modulo les constantes) est le cas de l'opérateur $\bar{\partial}$ sur la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ découpée en 2 calottes et un nombre fini de couronnes centrées sur $\{0, \infty\}$. Les analogues des projecteurs de Calderon-Seeley sont alors les projecteurs T_+ et T_- qui annulent les coefficients de Fourier négatifs ou positifs.*

e) *Dans [22] est décrit le cas où M est une variété à bord découpée en bandes.*

D'après ce qui précède, la nilpotence semble donc fortement liée au fait que le groupe fondamental de Σ est trivial. Notons au passage que cela signifie aussi $\widehat{M} = M$. Nous allons voir dans un cas particulier où $\pi_1(\Sigma) = \mathbb{Z}$ que la situation n'est pas désespérée, au moins sur le plan théorique, si l'on accepte de modifier un peu l'algorithme. La modification consiste à utiliser un préconditionneur D (injectif) pour l'inversion itérative de $(Id - \mathcal{T})$, la matrice dont on doit

vérifier la nilpotence étant alors $Id - D(Id - \mathcal{T})$. En revanche si on veut rester dans l'esprit des méthodes de décomposition de domaine, l'algorithme doit conserver sa nature locale sur Σ , ce qui conduit à supposer D diagonale.

2.5 Algorithme préconditionné dans le cas $\pi_1(\Sigma) = \mathbb{Z}$

Nous considérons le cas où $\Sigma = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Alors Γ a deux composantes connexes orientées en sens opposés et dont l'ensemble des points est encore $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. La matrice \mathcal{T} est une somme directe $\mathcal{T}_+ \oplus \mathcal{T}_-$ est on se limite à l'étude de \mathcal{T}_+ en oubliant le signe dans la notation. Il s'agit donc pour une matrice

$$\mathcal{T} := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & T_{1 \leftarrow N} \\ T_{2 \leftarrow 1} & 0 & \cdot & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & T_{N \leftarrow N-1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de trouver D diagonale telle que

$$[Id - D(Id - \mathcal{T})]^N = 0. \quad (2.13)$$

On note

$$T_{\beta \leftarrow \alpha} := \prod_{\gamma=\alpha+1}^{\beta} T_{\gamma \leftarrow \gamma-1}$$

où l'addition des indices ci-dessus est faite dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ mais où l'on prendra soin de distinguer $T_{N \leftarrow N}$ de l'identité.

On identifie les espaces $\text{Im } \Pi_\alpha$ sur lesquels agissent les opérateurs $T_{\alpha \leftarrow \alpha-1}$ et on définit la matrice diagonale

$$S := \text{diag}(T_{N \leftarrow 1}, \dots, T_{N \leftarrow N-1}, Id).$$

Pour le résultat suivant, nous ferons les hypothèses : a) Les contractions strictes $T_{\alpha \leftarrow \alpha-1}$ (et donc S) sont injectives et d'image dense; b) (pour simplifier) l'opérateur $T_{N \leftarrow N}$ est compact et diagonalisable. Notons que dans le cadre de la définition des opérateurs $T_{\alpha \leftarrow \alpha-1}$, l'injectivité supposée en a) peut être obtenue dans le cadre analytique par le théorème de Holmgren où plus généralement par des méthodes de type Carleman. La compacité évoquée en b) est une conséquence de la régularité elliptique si les interfaces M_α sont compactes. Plus concrètement, un exemple où les hypothèses sont facilement vérifiées est donné par un opérateur P à coefficients constants sur un tore $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ avec un recouvrement selon une direction x_1 .

Un calcul simple donne $S\mathcal{T} = \Theta S$ avec

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & T_{N \leftarrow N} \\ Id & 0 & \cdot & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & Id & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus on remarque que comme S est diagonale, l'identité $SD = \Delta S$ a un sens pour deux matrices diagonales D et Δ pourvu que les produits d'opérateurs soient bien définis. L'équation (2.13) devient sous les hypothèses a) et b) équivalente à

$$[Id - \Delta(Id - \Theta)]^N = 0. \quad (2.14)$$

Il est alors naturel de chercher une matrice Δ qui se diagonalise sur une même base que $T_{N \leftarrow N}$.

Proposition 2.20. *Une matrice diagonale Δ dont les coefficients opérateurs se diagonalisent sur la même base que $T_{N \leftarrow N}$, est solution de (2.14) si et seulement si elle est de la forme*

$$\Delta := \text{diag}(\omega^\alpha Q, \alpha = 1 \dots N)$$

où Q est une racine $N^{\text{ième}}$ de $T_{N \leftarrow N}(Id - T_{N \leftarrow N})^{-1}$ et $\omega \in \mathbb{C}$ est un choix d'une racine $N^{\text{ième}}$ de l'unité.

Preuve : En fait l'hypothèse de diagonalisation permet de se ramener au cas de matrices $N \times N$ à coefficients complexes. L'écriture du polynôme caractéristique donne alors N équations algébriques sur les coefficients de Δ qui se résolvent explicitement. L'hypothèse de compacité de $T_{N \leftarrow N}$ permet de définir sans ambiguïté l'opérateur Q . \square

En vérifiant dans les cas particuliers que l'expression a un sens, le résultat précédent donne le préconditionneur

$$D = \text{diag}(\omega^\alpha Q_\alpha, \alpha = 1 \dots N), \quad (2.15)$$

où la suite des Q_α correspond à un choix cohérent de racines $N^{\text{ième}}$ des $T_{\alpha \leftarrow \alpha}(1 - T_{\alpha \leftarrow \alpha})^{-1}$.

Pour terminer ce paragraphe, indiquons que l'algorithme préconditionné peut s'écrire directement en décomposition de domaines. Cela donne

$$\begin{cases} Pu_i^{n+1} = f \\ \Pi_{ij}\gamma_{\{i,j\}}u_i^{n+1} = \Pi_{ij}\gamma_{\{i,j\}}u_j^n - D_{ij} \left(\Pi_{ij}\gamma_{\{i,j\}}u_i^n - \Pi_{ij}\gamma_{\{i,j\}}u_j^n \right), \end{cases}$$

où les opérateurs D_{ij} sont en fait les coefficients des matrices D_+ et D_- .

2.6 Commentaires

L'expression algébrique (2.15) du préconditionneur repose en fait sur la résolution par radicaux dans le cas scalaire du système de $\#\Gamma$ équations algébriques sur $D := \text{diag}(d_1, \dots, d_{\#\Gamma})$ données par

$$\det((x - 1)Id + D(Id - \mathcal{T})) = x^{\#\Gamma}.$$

La théorie de Galois s'y oppose en toute généralité, à moins que le graphe Γ ait des propriétés bien particulières. On peut également penser à utiliser plutôt une méthode perturbative pour exprimer le préconditionneur D à l'aide d'une série utilisant les coefficients de \mathcal{T} qui sont des contractions strictes. Dans le cas encore élémentaire où les coefficients de \mathcal{T} sont des matrices finies, ce n'est pas complètement évident. On pourra consulter [27] sur la question du nombre d'équations minimal de l'ensemble des matrices nilpotentes de classe de conjugaison donnée.

En fait, ce préconditionnement ne semble pas nécessaire dans la plupart des cas et le résultat de convergence donné en toute généralité par le théorème 2.16 est déjà bien satisfaisant. Cela justifie le nom de quasi-optimal pour les conditions d'interface données par les projecteurs de Calderon-Seeley. Par exemple si $P = P(x, hD_x)$ est un opérateur h -uniformément elliptique et si la distance entre deux interfaces est de l'ordre L , le taux de convergence $K_\Gamma \rho$ est de l'ordre $e^{-C\frac{L}{h}}$. Ceci est vrai sans chevauchement des sous-domaines. Il faut comparer ce taux à ce que donne les estimations pour des conditions d'interfaces de type Dirichlet ou Neuman avec chevauchement. Si ce chevauchement est de taille δ , alors le taux de convergence est de l'ordre de $e^{-C\frac{\delta}{h}}$. Cela veut dire que le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre une précision donnée varie d'un facteur $\frac{L}{\delta}$ qui en pratique vaut 10, 100 voire plus.

Le néophyte peut s'interroger sur la pertinence de la décomposition de domaines dans la mesure où les conditions d'interfaces quasi-optimales : 1) demandent de façon théorique une résolution du problème elliptique sur tout M ou \widetilde{M} (c'est vrai aussi pour le préconditionneur) 2) sont dans la plupart des cas des opérateurs non locaux impropres à la discrétisation numérique 3) ne sont pas explicites. Comme nous l'avons indiqué précédemment, on n'utilise pas ces conditions d'interface en pratique. Elles servent plutôt de référence. Elles permettent de justifier la bonne convergence pour certains choix de B_{ij} et même de donner une procédure de calcul de B_{ij} locaux très efficaces. Ces B_{ij} obtenus à partir de développement microlocaux ne font que déformer légèrement, dans le cas d'un $\pi_1(\Sigma)$ trivial, la propriété de nilpotence.

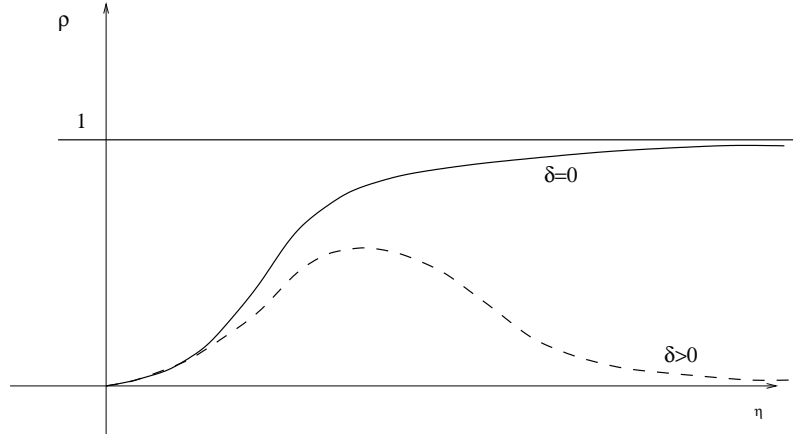
3 Approximation locale

Dans cette section, nous allons rappeler quelques résultats obtenus dans le cadre de l'approche décrite dans l'introduction et évoquer certaines variantes mises en œuvre en pratique. Sans prétendre à l'exhaustivité, nous nous contenterons de citer et d'expliquer quelques travaux réalisés autour de F. Nataf. Ensuite nous calculerons précisément un taux de convergence pour un problème modèle avec $\pi_1(\Sigma) = \mathbb{Z}$ de façon à illustrer les commentaires précédents et à introduire le phénomène de perte d'ellipticité qui devient crucial en présence de coins.

3.1 Rappels de résultats

Dans [19], nous avons traité le cas d'équations d'advection-diffusion scalaires à coefficients constants, $P(hD)u = f$, dans \mathbb{R}^{n+1} découpé en N bandes droites. On peut alors déterminer explicitement :

- a) les projecteurs de Calderon-Seeley par une méthode de factorisation.
- b) les conditions d'interface locales données par les conditions aux limites absorbantes. Elles sont obtenues dans ce cas précis par des développement basse fréquence et donne jusqu'à l'ordre 2 un algorithme bien posé.
- c) Le taux de convergence pour les conditions locales. Quand il n'y a pas de chevauchement, le comportement de ce taux $\rho(\eta)$ par rapport à la fréquence tangentielle vérifie : $\rho(0) = 0$ et $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \rho(\eta) = 1^-$. Avec un chevauchement de taille δ , il est uniformément majoré par $e^{-C\frac{\delta}{h}}$ et décroît exponentiellement avec la fréquence tangentielle.



Dans [17], F. Nataf a appliqué la même technique pour le système d’Osen. Comme il s’agit d’un système, la factorisation s’appuie sur la décomposition classique (cf [7][11]) des matrices $d \times d$ à coefficients dans un anneau \mathcal{A} principal euclidien

$$P = F \operatorname{diag} \left(\frac{\operatorname{PGCD} P_{j+1}}{\operatorname{PGCD} P_j} \right) G, \quad \text{avec } F, G \in SL(d, \mathcal{A}),$$

où l’on désigne par P_j la famille des déterminants mineurs d’ordre j de la matrice P . L’anneau \mathcal{A} est en fait l’anneau des polynômes en D_{x_1} où x_1 est une direction transverse aux bandes.

Dans [20]¹, nous avons traité un cas un peu plus général que dans [19] avec des coefficients variables et une asymptotique de type semiclassique $P = P(x, hD_x)$. Au niveau de l’analyse la technique de type Fourier dans le cas à coefficients constants se transpose avec les outils microlocaux. Au niveau de l’algèbre, on perd la commutativité avec des coefficients variables ce qui conduit à des termes correctifs dans le calcul des conditions d’interface locales. Dans le cadre semiclassique, on sait calculer les développements asymptotiques qui ne font intervenir que des quantités locales. Grâce à ce dernier point et à l’ellipticité forte, ces calculs restent valides en pratique pour des interfaces régulières quelconques (et h assez petit).

Le taux de convergence peut être calculé très précisément dans le cas à coefficients constants comme fonction de la fréquence tangentielle. Les coefficients des conditions d’interface d’ordre fixé étant pris comme paramètres, une variante consiste à optimiser ce taux de convergence en intégrant le fait que numériquement les fréquences sont bornées. On améliore ainsi encore le taux de convergence par rapport aux conditions obtenues simplement avec un développement basse fréquence. En revanche cela demande un ajustement sous forme de calculs préliminaires en fonction du domaine de fréquences utiles. Nous renvoyons aux travaux de Y. Achdou et F. Nataf [1], de C. Japhet [12] et de P. Chevalier et F. Nataf [2].

3.2 Un exemple avec $\pi_1 = \mathbb{Z}$

Nous considérons le cas d’un opérateur advection-diffusion à petit paramètre ε ,

$$P^\varepsilon = 1 + i \frac{a}{\varepsilon} D_x + \frac{1}{\varepsilon^2} D_x^2 + D_y^2$$

¹Il y a une petite erreur de frappe dans l’énoncé de la proposition 4.5 de cet article. La bonne estimation est celle donnée en fin de démonstration.

Les coefficients $r_1(\eta)$ viennent ici du cycle du graphe Γ tandis que les coefficients $r_2(\eta)$ sont liés à l'approximation locale. On a plus précisément

$$\begin{aligned} m^\pm(\eta) = r_1^\pm(\eta) &= \frac{e^{\pm i \frac{\lambda_\infty^\pm(\eta)}{N}} (1 - \rho_j^2(\eta))}{\left(1 - \left(\rho_j(\eta) e^{\pm i \frac{\lambda_\infty^\pm(\eta)}{N}}\right)^2\right)} \\ r_2^\pm(\eta) &= \frac{\rho_j(\eta) \left(1 + e^{\pm i \frac{\lambda_\infty^\pm(\eta)}{N}}\right)}{\left(1 - \left(\rho_j(\eta) e^{\pm i \frac{\lambda_\infty^\pm(\eta)}{N}}\right)^2\right)}, \end{aligned}$$

avec

$$\rho_j := \frac{\lambda_j^-(\eta) - \lambda_\infty^-(\eta)}{\lambda_\infty^-(\eta) - i\varepsilon^2 a + \lambda_j^-(\eta)}$$

La nilpotence $\mathcal{M}(\eta)^N = 0$ conduit comme dans [19] à l'estimation

$$\|\mathcal{T}(\eta)^n\| \leq C_N \rho(\eta)^{\frac{n}{N}}$$

où C_N est une constante fixée par N et le taux de convergence vaut

$$\rho(\eta) = \|R(\eta)\| \left(\sum_{k=0}^{N-1} \|M(\eta)\|^k \right).$$

En prenant la même norme d'algèbre que dans (2.11), on obtient

$$\begin{aligned} \|R(\eta)\| &\leq \frac{1}{\left(1 - \left(\rho_j(\eta) e^{-i \frac{\lambda_\infty^-(\eta)}{N}}\right)^2\right)} \left(e^{-i \frac{\lambda_\infty^-(\eta)}{N}} + \rho_j(\eta) + \rho_j(\eta) e^{-i \frac{\lambda_\infty^-(\eta)}{N}} \right) \\ \|M(\eta)\| &\leq \frac{e^{-i \frac{\lambda_\infty^-(\eta)}{N}}}{\left(1 - \left(\rho_j(\eta) e^{-i \frac{\lambda_\infty^-(\eta)}{N}}\right)^2\right)}. \end{aligned}$$

Il est commode de poser $\beta := \sqrt{(\varepsilon a)^2 + 1}$, $x := \frac{2\eta}{\beta}$ et $v := \sqrt{1 + x^2} + 1 \in [2, +\infty)$. On a alors $\rho_1 = 1 - \frac{2}{v}$, $\rho_2 = \left(1 - \frac{2}{v}\right)^2 = \rho_1^2$, $\lambda_\infty^- = -\frac{i\varepsilon}{2} [\beta(v-2) + \beta - \varepsilon a]$ et on vérifie aisément

$$\rho_1 e^{-i \frac{\lambda_\infty^-}{2N}} \leq \left(1 - \frac{2}{v}\right) e^{-\frac{\varepsilon\beta}{N}(v-2)} \leq \frac{1}{2e}.$$

En utilisant $0 \leq \rho_j \leq 1$, $0 \leq e^{-i \frac{\lambda_\infty^-}{N}} \leq e^{-i \frac{\lambda_\infty^-}{2N}} \leq 1$, on aboutit à

$$\begin{aligned} \rho(\eta) &\leq \rho_j(\eta) + C_N e^{-i \frac{\lambda_\infty^-}{2N}} \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{2v}\right) + C_N e^{-\frac{\varepsilon}{4N}(\beta - \varepsilon a)} e^{-\frac{\varepsilon\beta}{4N}(v-2)}. \end{aligned}$$

Ainsi on a convergence, $\rho(\eta) < 1, \forall \eta \in \mathbb{R}$, si ε n'est pas trop petit et a n'est pas trop grand. En revanche pour ε petit ou pour ε fixé et a grand puisque l'on a

$$\beta - \varepsilon a = \sqrt{(\varepsilon a)^2 + 4} - \varepsilon a \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$$

on peut avoir des problèmes de convergence aux basses fréquences $\eta \sim 0$ ou $v \sim 2$. Ce point est observé numériquement et déjà compris comme étant dû à une perte ou dégénérescence de l'ellipticité forte. Il intervient notamment dans les découpages en secteurs en présence d'un champ de convection tournant. Les calculs précédents mesurent précisément ce phénomène dans la situation modèle du tore.

4 Problèmes à coins

Jusqu'à maintenant, nous avons considéré le cas de variété sans bord avec un recouvrement unidimensionnel (le squelette est un graphe). Les choses se compliquent si l'on envisage les deux extensions suivantes :

- 1) les problèmes à bord : L'incidence des interfaces sur le bord fait apparaître des coins. On peut toujours développer les arguments abstraits de la Section 2 si les conditions aux limites sont locales. Mais c'est l'approximation locale de la Section 3 qui pose problème.
- 2) les recouvrements multidimensionnels : Dans le cas d'intersection triple (avec chevauchement), on ne sait même pas écrire les algorithmes ou les conditions d'interface qui donneraient des propriétés de nilpotence analogue à celle de la Section 2. Cela est en partie liée à la nature non-locale des projecteurs de Calderon-Seeley. Le cas extrême où il n'y a pas de chevauchement mais où trois sous-domaines peuvent se toucher conduit à nouveau aux problèmes à coins.

Jusqu'à maintenant aucune étude systématique comparable à celle décrite dans les paragraphes précédents ne s'est dégagée. A défaut de traiter ce problème, nous terminons par quelques remarques sur le sujet qui s'appuient sur la littérature existante [8][4][13] [23, 24] et quelques observations numériques de F. Nataf et C. Japhet. Pour fixer les idées nous considérons une équation du type

$$(1 + ia(x)D_x + D_x^2 + D_y^2)u = f \tag{4.1}$$

dans \mathbb{R}^2 découpé en N secteurs rectilignes de sommet 0.

Les difficultés qui se posent en présence de coins sont de diverse nature :

- 1) Perte d'"ellipticité" : Le phénomène décrit plus haut dans le cas du tore se manifeste aussi au niveau des coins. On le comprend en rappelant que c'est la partie homogène de degré le plus élevé (en η ou la moins élevée en x) qui compte au coin. On l'étudie ensuite après transformation de Mellin ou de manière équivalente en Fourier après changement de variable $r = e^t$, où (r, θ) sont les coordonnées polaires. Pour l'équation (4.1), il faut considérer

$$(\partial_\theta^2 - z^2)Mu(\theta, z) = Mf(\theta, z), \quad \theta \in S^1, z \in i\gamma + \mathbb{R},$$

où $\gamma - \frac{d}{2}$ indique en dimension d l'espace de Sobolev à poids où l'on cherche u (modulo les types asymptotiques). En aucun cas, on ne peut espérer une factorisation régulière $(\partial_\theta - \lambda^+(z))(\partial_\theta - \lambda^-(z))$ avec des conditions de signe sur λ^+ et λ^- .

- 2) Types asymptotiques : Quand on considère l'équation (4.1) avec un second membre dans $H^{0+\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$ on sait que la solution u doit être cherchée dans $H^{2+\varepsilon}(\mathbb{R})$, c'est à dire dans un espace à poids donné par $\gamma = 2 + \varepsilon$ augmenté du type asymptotique (C_0, C_1x, C_2y) correspondant aux pôles de la résolvante de $\partial_\theta^2 - z^2$ pour $\text{Im } z \geq \frac{d}{2} - \gamma$. Dans un secteur d'angle α , le type asymptotique complet est donné par une suite de pôles de la forme $z_0 + i\frac{2\pi}{\alpha}\mathbb{Z}_-$ distincte de $i\mathbb{Z}_-$. La décomposition de domaine en secteurs peut donc générer des types asymptotiques parasites qui peuvent freiner la convergence au niveau du sommet.
- 3) Conditions de compatibilité : Suivant les conditions aux limites adoptées et la régularité souhaitée, on aboutit à un problème mal posé sans conditions de compatibilité sur le second membre (noyau de l'opérateur aux limites non nul). Il faut éviter d'avoir des conditions de compatibilité qui ne seraient pas propagées par l'algorithme.

En dépit de ces difficultés, F. Nataf a obtenu dans [18] par un autre biais, i.e. des estimations d'énergie, un résultat de convergence pour un opérateur différentiel d'ordre 2 et des conditions d'interface d'ordre 2 dans un carré décomposé en quadrillage. Il n'y a alors pas de condition de compatibilité pour une résolution dans H^2 mais il faut rajouter une condition au coin sur le saut des dérivées tangentes (noyau non nul sinon). On pourra consulter [12] pour une expression de cette condition dans la situation plus générale d'ouverts polygonaux.

L'idée générale n'est plus alors de développer un algorithme nilpotent global puis de l'approcher par des conditions locales. Mais plutôt d'utiliser les conditions d'interface qui marchent bien sans coin et de les adapter au niveau du coin de façon à avoir une bonne convergence. En dépit du résultat théorique satisfaisant de [18] et de résultats numériques de C. Japhet [12] qui valident l'analyse théorique, du travail reste à faire. Notamment, des expériences numériques, avec des conditions d'interface d'ordre 2, ont montré que la différence entre l'itérée et la solution "exacte" présente des pics très marqués au niveau des coins. L'essentiel de l'erreur H^2 se concentre donc sur les coins.

Une façon d'améliorer la convergence serait probablement d'annuler au coin au premier ordre le terme avec dérivée tangentielle d'ordre 2. Sans cela en effet les dérivées normales (homogènes en x de degré -1) deviennent négligeables au coin par rapport aux dérivées tangentielles d'ordre 2. Après simplification la partie principale homogène du problème aux limites dans un secteur se comporte comme un problème de Dirichlet pour lequel l'information ne passe pas d'un domaine à l'autre sans chevauchement. En mettant un coefficient qui s'annule devant la dérivée tangentielle d'ordre 2, la dérivée normale reste dans le terme principal. Ceci est à l'étude au niveau numérique et nécessite une analyse plus approfondie.

L'idéal serait bien entendu d'avoir une aussi bonne compréhension du cas avec coin ou du cas avec un recouvrement multidimensionnel que ce que nous avons présenté dans les Sections 2 et 3 afin de développer une approche systématique.

Références

- [1] Y. Achdou et F. Nataf. Preconditionners for mortar methods based on local approximations of the Steklov-Poincaré operator. *M3AS*, 5(7) :967–997, 1995.

- [2] P. Chevalier et F. Nataf. Symmetrized method with optimized second-order conditions for the Helmholtz equation. In *Domain Decomposition 10*, volume 218 of *Contemporary Mathematics*, pages 400–407, 1998.
- [3] R. Courant et D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics II*. New York-London, Interscience Publishers, 1962.
- [4] M. Dauge. *Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains*, volume 1341 of *Lect. Notes Math.* Springer, 1988.
- [5] L. Boutet de Monvel. Boundary value problems for pseudo-differential operators. *Acta Math*, 126 :11–51, 1971.
- [6] B. Desprès. Décomposition de domaine et problème de Helmholtz. *C.R. Acad. Sci.*, 311 :313–316, 1990.
- [7] F.R. Gantmacher. *The Theory of Matrices*. Chelsea Publishing Co., 959. 2 vol.
- [8] P. Grisvard. *Singularities in Boundary Value Problems*. Masson, Springer, 1992.
- [9] G. Grubb. *Functional Calculus of Pseudodifferential Boundary Problems*, volume 65 of *Progress in Mathematics*. Basel : Birkhaeuser, 1996.
- [10] T. Hagstrom, A. Jazcilevich et R.P. Tewarson. Numerical experiments on a domain decomposition algorithm for nonlinear elliptic boundary value problems. *Appl. Math. Lett.*, 1(3) :299–302, 1988.
- [11] N. Jacobson. *Basic Algebra*. Freeman, 1985. 2 vol.
- [12] C. Japhet. Méthode de décomposition de domaine et conditions aux limites artificielles en mécanique des fluides : méthode optimisée d'ordre 2. Thèse de l'Université Paris 13, 1998.
- [13] V.A Kondratiev. Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Trudy Moskov Mat. Ob.v s.v c.*, 16 :209–292, 1967.
- [14] P.L. Lions. On the Schwarz alternating method I. In *First International Symposium on Domain Decomposition Methods*. SIAM, 1988.
- [15] P.L. Lions. On the Schwarz alternating method II : Stochastic Interpretation and Order Properties. In *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 47–70. SIAM, 1989.
- [16] P.L. Lions. On the Schwarz alternating method III : A variant for nonoverlapping subdomains. In *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 202–223. SIAM, 1989.
- [17] F. Nataf. Conditions d'interface pour les méthodes de décomposition de domaine pour le système d'Oseen en dimension 2 et 3. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 324(10) :1155–1160, 1997.
- [18] F. Nataf. A Schwarz additive method with high order interface conditions and nonoverlapping subdomains. *RAIRO M2AN*, 32(32) :107–116, 1998.
- [19] F. Nataf et F. Nier. Convergence rate of some domain decomposition methods for overlapping and nonoverlapping subdomains. *Numerische Mathematik*, 75(3) :357–377, 1997.
- [20] F. Nataf et F. Nier. Convergence of domain decomposition methods via semi-classical calculus. *Comm. Partial Differential Equations*, 23(5–6) :1007–1059, 1998.

- [21] F. Nataf et F. Rogier. Factorization of the convection-diffusion operator and the Schwarz algorithm. *M³AS*, 5(1) :67–93, 1995.
- [22] F. Nataf, F. Rogier, et E. de Sturler. Domain decomposition methods for fluid dynamics. In *Navier Stokes equations and related non linear analysis*, pages 307–377. Plenum Press Corporation, 1995.
- [23] E. Schrohe et B.W. Schulze. Boundary value problems in Boutet de Monvel’s algebra for manifolds with conical singularities I. In *Pseudo-differential calculus and mathematical physics*, Math. Top. 5, pages 97–209. Akademie Verlag, 1994.
- [24] E. Schrohe et B.W. Schulze. Boundary value problems in Boutet de Monvel’s algebra for manifolds with conical singularities II. In *Boundary value problems, Schrödinger operators, deformation*, Math. Top. 8, pages 70–205. Akademie Verlag, 1995.
- [25] G. Shimura. *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*. Number 11 in Publications of Mathematical Society of Japan. Iwanami Shoten, 1971.
- [26] M.A. Shubin. Spectra of elliptic operators on non compact manifolds. In *Méthodes semi-classiques, Ecole d’Été Nantes, juin 1991*, volume 207 of *Astérisque*, pages 35–108. SMF, 1992.
- [27] J. Weyman. The equations of conjugacy classes of nilpotent matrices. *Inventiones Mathematicae*, 98 :229–245, 1989.