Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1998-1999

Denis Serre

Stabilité L^1 d'ondes progressives de lois de conservation scalaires

Séminaire É. D. P. (1998-1999), Exposé n° VIII, 11 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1998-1999____A8_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Stabilité L^1 d'ondes progressives de lois de conservation scalaires

Denis Serre
UMPA, UMR # 5669 CNRS-ENS Lyon
Ecole Normale Supérieure de Lyon
46, allée d'Italie
F-69364 Lyon cedex 07

Abstract

A powerfull method has been developped in [2] for the study of L^1-stability of travelling waves in conservation laws or more generally in equations which display L^1-contractivity, maximum principle and mass conservation. We recall shortly the general procedure. We also show that it partly applies to the waves of a model of radiating gas. These waves have first been studied by Kawashima and Nishibata [5, 6] in a different framework. Therefore, shock fronts for this model are stable under mild perturbations.

1 Introduction

Considérons une équation d'évolution non linéaire $u_t = \mathcal{N}[u]$, dont l'inconnue est une fonction scalaire $u : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t^+ \to \mathbb{R}$. Lorsque le système est bien posé dans L^∞, il définit un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$. Nous supposons que S satisfait les propriétés suivantes

Constantes. Les constantes sont solutions de l'équation. Autrement dit, si $a(x) \equiv c$, où $c \in \mathbb{R}$, alors $S(t)a = a$ pour tout $t > 0$.

Comparaison . Si $a(x) \leq b(x)$ presque partout, alors $S(t)a \leq S(t)b$ presque partout et pour tout $t > 0$.

Contraction. Si $b - a \in L^1(I\!R)$ et $t \geq 0$, alors $S(t)b - S(t)a \in L^1(I\!R)$ et on a

$$\|S(t)b - S(t)a\|_1 \leq \|b - a\|_1,$$

où $\|\cdot\|_1$ désigne la norme usuelle de $L^1(I\!R)$.

Conservation. Si $b - a \in L^1(I\!R)$, on a aussi

$$\int_{I\!R} (S(t)b(x) - S(t)a(x))dx = \int_{I\!R} (b(x) - a(x))dx.$$

Translation. Le semi-groupe commute avec les translations

$$\tau_h : a \mapsto a(\cdot + h).$$

Autrement dit, $\mathcal{N}$ est à coefficients constants.

Un exemple typique d'une telle équation est la loi de conservation scalaire visqueuse $u_t + f(u)_x = u_{xx}$, où $f \in \mathcal{C}^2(I\!R)$ est donné.

La conservation satisfaite par $S(t)$ résulte en général d'une factorisation $\mathcal{N} = \partial_x \circ \mathcal{M}$. Quant à la contraction, elle permet d'étendre le semi-groupe par continuité à $L^1(I\!R) + L^\infty(I\!R)$, ce qui donne un sens aux solutions de l'équation, bien que celle-ci puisse ne plus avoir de sens dans $\mathcal{D}'(I\!R \times I\!R^+)$. Appliquant la contraction à a et $\tau_h a$, on obtient en particulier

$$\|\tau_h S(t)a - S(t)a\|_1 \leq \|\tau_h a - a\|_1. \tag{1}$$

Les deux premières propriétés impliquent le principe du maximum : le supremum (essentiel) de $S(t)a$ décroî t, tandis que l'infimum croî t.

Un rôle important est joué dans ce type d'équations par les ondes progressives, qu'on appelle ici profils de choc, Ce sont des solutions particulières de la forme $u(x,t) = U(x - ct)$, dont les limites

$$u_- = \lim_{x \to -\infty} U(x), \quad u_+ = \lim_{x \to +\infty} U(x)$$

existent et sont distinctes (si $u_+ = u_-$, alors U est constant, d'après les propriétés du semi-groupe). Le profil U est solution de l'équation indépendante du temps

$$\mathcal{N}U + cU' = 0.,$$

ou encore

$$\mathcal{M}U + cU = q, \quad I\!\!R.$$

La compatibilité de la constante d'intégration q avec les limites $u_\pm$ fournit, après élimination de q, une condition de transmission liant u_+ à u_-. Par exemple, pour une loi de conservation visqueuse, pour laquelle $\mathcal{M}u = u_x - f(u)$, on a $U' + cU - f(U) = q$, d'où il vient $q = cu_- - f(u_-) = cu_+ - f(u_+)$. Finalement, il reste la *condition de Rankine-Hugoniot*

$$f(u_+) - f(u_-) = c(u_+ - u_-).$$

Le but de l'exposé était de présenter une méthode pour l'analyse de la stabilité des profils dans $L^1(I\!\!R)$. En voici les idées principales. Etant donné un profil U, de vitesse de propagation c, on se ramène à un profil stationnaire ($u(x,t) = U(x)$) par le changement d'équation $u_t = \mathcal{N}u + cu_x$, dont le semi-groupe satisfait les mêmes propriétés que ci-dessus. On peut donc supposer $c = 0$. On commence par considérer les données initiales u_0 qui sont comprises entre deux translatés $\tau_h U$ et $\tau_k U$:

$$U(x+h) \le u_0(x) \le U(x+k), \quad \text{pp } x \in I\!\!R.$$

Ces inégalités restent satisfaites par $S(t)u_0$ pour tout $t > 0$, par le principe de comparaison. Si $\tau_l U - U \in L^1(I\!\!R)$ pour tout $l \in I\!\!R$, on en déduit une majoration uniforme de $S(t)u_0 - U$ par une fonction intégrable. D'après (1), et le fait que

$$\lim_{l \to 0} \|\tau_l u_0 - u_0\|_1 = 0,$$

la famille $(S(t)u_0)_{t>0}$ est localement uniformément intégrable. On déduit de ces deux propriétés (théorème de Fréchet-Kolmogorov) que cette famille est relativement compacte dans $L^1(I\!\!R)$. Son ensemble omega-limite Ω est donc non-vide, et la convergence de $S(t)u_0$ revient à montrer qu'il ne contient qu'un seul élément. Notons $\omega := U + \Omega$. Le principe d'invariance de Lasalle assure que si J est une fonction de Liapunov de l'équation, alors J est constante sur ω. Autrement dit, si $a \in \omega$, la fonction $t \mapsto J[S(t)a]$ est constante, au lieu de décroî tre. De telles fonctions sont données par le principe de contraction et le fait que chaque $\tau_h U$ est une solution stationnaire

$$J_h[u] := \|u - \tau_h U\|_1.$$

Ainsi, $t \mapsto \|u - \tau_h U\|_1$ est constant lorsque $a \in \omega$, ce qui est une contrainte très forte. Par exemple, pour une loi de conservation visqueuse, cela revient à dire que $a' - \tau_h U'$ s'annule en tout point où $a - \tau_h U$ s'annule. Dans l'exemple qui suit, on montrera plutôt que $a - \tau_h U$ est de signe constant. Ecrivant cela pour tout $h \in I\!\!R$, on parvient en général à déduire que a est un translaté de U. Comme par ailleurs le principe de conservation impose

$$\int_{I\!\!R} (a - U)dx = \int_{I\!\!R} (u_0 - U)dx, \quad \forall a \in \omega,$$

on en déduit que ω ne contient qu'un seul élément, à savoir l'unique translaté $\tau_l U$ satisfaisant

$$\int_{I\!\!R} (\tau_l U - U)dx = \int_{I\!\!R} (u_0 - U)dx,$$

ce qui détermine l :

$$l = \frac{1}{u_+ - u_-} \int_{I\!\!R} (u_0 - U)dx.$$

Ce raisonnement permet donc de conclure que $S(t)u_0$ converge vers $\tau_l U$, dès que u_0 est encadré par deux translatés de U. En fait, $S(t)$ étant une contraction, le résultat s'étend immédiatement à l'adhérence $\mathcal{A}$ de l'ensemble ainsi décrit, pour la métrique induite par la norme de L^1 sur l'espace affine $U + L^1$:

$$\delta(a, b) := \|a - b\|_1.$$

S'il existe suffisamment de fonctions encadrées par des translatés de U (c'est le cas si U est monotone), le résultat de convergence est donc vrai pour tout $u_0 \in U + L^1$ tel que $u_0(x)$ appartient à l'intervalle I d'extrémités $u_\pm$, pour presque tout x. L'ensemble des arguments de cette première partie est détaillé dans [9, 10], dans le contexte des lois de conservation visqueuses. Des idées similaires ont été utilisées dans [7], pour la relaxation semi-linéaire d'une loi de conservation hyperbolique.

La deuxième partie de l'analyse consiste à se ramener au cas précédent. Supposons par exemple que $u_+ > u_-$. On peut toujours construire une fonction $v_0 \in u_+ + L^1$, qui a les deux propriétés suivantes :

$$\int_{I\!\!R} (v_0 - u_+)dx = 0, \quad u_0(x) \leq v_0(x).$$

En effet, $u_0 - U$ est intégrable et $U(x)$ tend vers u_- en $-\infty$, de sorte que

$$\int_{I\!\!R} (u_0 - u_+)^- dx = +\infty,$$

où on a noté $s^- = \max(0, -s)$. Si on peut montrer que $\|S(t)v_0 - u_+\|_1$ (qui décroî t quand t augmente) tend vers zéro quand $t \to +\infty$ (c'est la *stabilité des constantes* dans L^1), alors le principe de comparaison ($S(t)u_0 \leq S(t)v_0$) montre que $\|(S(t)u_0 - u_+)^+\|_1$ tend aussi vers zero ($s^+ := \max(0, s)$). De même, on trouve que $\|(S(t)u_0 - u_-)^-\|_1$ tend vers zéro. En résumé, la distance $\delta(S(t)u_0; \mathcal{A})$ tend vers zéro quand $t \to +\infty$. A partir de là, la contraction de $S(t)$ pour δ permet de conclure que la distance de $S(t)u_0$ à l'ensemble des translatés de U tend vers zéro. Cependant, $\delta(S(t)u_0, \tau_h U)$ est supérieur à

$$\left| \int_{I\!R} (u_0 - \tau_h U) dx \right|,$$

qui n'est nul que pour une seule valeur de h. Finalement, $S(t)u_0$ converge bien, vers l'unique translaté de U qui satisfait

$$\int_{I\!R} (u_0 - \tau_h U) dx = 0.$$

Cette deuxième partie a été menée a bien dans [2] (voir aussi [3] lorsqu'on considère des couches limites plutôt que des profils de choc), dans le câdre des lois de conservation visqueuses. Une démonstration plus simple se trouve dans [8]. Notons que la généralité du résultat (notamment, on n'exige ni régularité, ni propriété de décroissance de la perturbation initiale $u_0 - U$) empêche d'obtenir une estimation quantitative de la convergence. Il n'y a là rien d'étonnant, puisque c'est déjà le cas pour l'équation de la chaleur : si $w_t = w_{xx}$ et si $w \in L^1$ est d'intégrale totale nulle, alors $\|w(t)\|_1$ tend vers zéro, sans qu'on puisse préciser la vitesse de convergence. En revanche, des hypothèses complémentaires peuvent permettre de préciser celle-ci ; mais pour un problème non-linéaire, cela se fait au prix d'une limitation sur la taille et la régularité des données. Notons enfin que la stabilité des constantes, pour la relaxation semi-linéaire, reste une question ouverte, sauf lorsque la loi de conservation hyperbolique de départ est linéaire (voir [8]).

En résumé, la preuve de la convergence pour toute donnée $u_0 \in U + L^1$ se ramène à la vérification, sur le système concerné, de trois propriétés :

P1. Si $t \to \|S(t)a - \tau_h U\|_1$ est constante pour tout $h \in I\!R$ (avec une constante dépendant de h), alors a est un translaté de U.

P2. Il y a suffisamment de fonctions encadrées par des translatés de U ; de plus, $\tau_h U - U$ est intégrable pour tout $h \in I\!R$. Par exemple, U est monotone.

P3. (Stabilité des constantes) si $\bar{u} \in I\!R$ et $v_0 \in \bar{u}+L^1$ satisfait $\int_{I\!R}(v_0-\bar{u})dx = 0$, alors

$$\lim_{t\to+\infty} \|S(t)v_0 - \bar{u}\|_1 = 0.$$

Dans tous les exemples, la propriété **P3** est la plus difficile à vérifier, ceci pour deux raisons. D'une part, la convergence est certainement fausse si l'intégrale de $v_0 - \bar{u}$ n'est pas nulle, car sa valeur absolue minore à chaque instant $\|S(t)v_0 - \bar{u}\|_1$. Il faut donc établir une estimation non triviale, qui porte sur $\partial_x^{-1}u$ en général. D'autre part, on ne bénéficie pas de l'effet dissipatif dû au choc lui-même, puisque l'état de base est ici une constante. Le terme non-linéaire de l'équation est donc ici une gêne, plutôt qu'une aide, contrairement au paragraphe précédent ; au mieux, il sera traité au moyen de la formule de Duhamel. Deux techniques ont étés développées, dans [2] et [8] respectivement, chacune étant adaptée à un cas particulier. Nous introduisons ici une troisième idée.

2 Les ondes d'un gaz radiatif

Le système est un modèle très simplifié pour un gaz rayonnant de la chaleur, sans l'hypothèse d'équilibre thermodynamique. On pourra se reporter à [6] pour une présentation de l'origine de ce modèle :

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x + q_x = 0, \tag{2}$$

$$-q_{xx} + q + u_x = 0. \tag{3}$$

La seconde équation définit de manière implicite q comme fonction de u, mais on peut aussi bien écrire $q = -Ku_x$, où $Kv := E * v$, le noyau E étant la solution fondamentale de l'équation de Helmoltz :

$$E(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|).$$

Comme $Ku_{xx} = Ku - u$, l'équation d'évolution s'écrit aussi

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x + u = Ku. \tag{4}$$

L'opérateur linéaire K est continu et de norme unité de $L^p(I\!R)$ dans lui-même, pour tout $p \in [1, +\infty]$. On peut donc réécrire le problème comme une équation d'évolution $u_t = \partial_x \mathcal{M} u$, où $\mathcal{M}u := Ku - u^2/2$. Le problème de Cauchy a été étudié par Ito [4] dans la classe des données initiales à variation bornée. Cependant, les résultats s'étendent dans difficulté à $L^1 + L^\infty$, puisque le semi-groupe de cette équation satisfait le principe de comparaison et celui de contraction. Notons cependant que, contrairement aux deux exemples cités plus haut (approximations d'une loi de conservation hyperbolique par relaxation ou par viscosité), l'équation (4) permet le développement de discontinuités en temps fini à partir de données régulières (voir [6]).

Etant donnés deux états distincts u_- et u_+, avec $u_+ < u_-$ (condition nécessaire évidente), l'existence et l'unicité (à translation près) d'un profil de choc a été démontrée dans [5]. Elle implique la condition de Rankine-Hugoniot $c = (u_- + u_+)/2$. Curieusement, la régularité du profil U dépend de l'amplitude $|u_+ - u_-|$: aucun profil n'est de classe $\mathcal{C}^\infty$, les profils les plus amples étant même continus par morceaux seulement. Cependant, le profil est de classe $\mathcal{C}^m$ lorsque $|u_+ - u_-|$ est plus petit qu'une constante $\alpha_m > 0$. Pour $m = 3$ et pour une perturbation $u_0 - U$ assez petite, la stabilité du profil est obtenue dans [5], avec un taux de décroissance de l'erreur dans $H^3(I\!R)$ en $t^{-1/4}$. Nous démontrons ici un résultat plus général, puisqu'il est valable pour tous les profils et pour des perturbations de taille raisonnable. Il est cependant moins précis puisqu'il ne fournit pas de taux de décroissance.

Théorème 1 *Soit $U(x - ct)$ une onde progressive admissible de l'équation (4), reliant deux état finis distincts $u_\pm$. Soit u_0 une condition initiale telle que $u_0 - \phi$ soit intégrable. On suppose aussi que $u_+ \le u_0(x) \le u_-$ presque partout. Il existe alors un nombre réel h tel que*

$$\lim_{t \to +\infty} \|u(t) - U(\cdot - ct - h)\|_1 = 0.$$

La preuve du théorème consiste à vérifier **P1** et **P2**. La restriction sur les valeurs de u_0 vient du fait que **P3** n'est pas pour l'instant démontrée.

La démonstration de **P1** est aisée. En effet, si u et v sont deux solutions admissibles de $u_t = \partial_x(\mathcal{M}u + cu)$, alors

$$\frac{d}{dt}\|u - v\|_1 + \|u - v\|_1 \le \int_{I\!R} (Ku - Kv)\mathrm{sgn}(u - v)\, dx.$$

On est donc ramené à l'étude de l'inégalité, lorsque $a \in \mathcal{A}$ et $h \in I\!R$:

$$\|f\|_1 \le \int_{I\!R} (Kf)\mathrm{sgn} f\, dx, \quad f := a - \tau_h U.$$

En particulier, $\|f\|_1 \leq \|Kf\|_1$, ce qui implique l'égalité puisque K est de norme un. Cependant, $Kf = K(f^+) - K(f^-)$. Si f^+ et f^- sont non triviales, alors $K(f^+) > 0$ partout, et de même $K(f^-) > 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \|Kf\|_1 &= \|K(f^+) - K(f^-)\|_1 < \|K(f^+)\|_1 + \|K(f^-)\|_1 \\ &= \int_{I\!R} (K(f^+) + K(f^-))dx = \int_{I\!R} K(|f|)dx \leq \|f\|_1. \end{aligned}$$

Finalement, $\|f\|_1 < \|f\|_1$, qui est absurde. Ainsi $f^+ \equiv 0$ ou $f^- \equiv 0$: f est de signe constant. On a donc montré que, pour tout $h \in I\!R$, $a - \tau_h U$ est de signe constant. Ceci montre bien que a est un translaté de U.

Montrons maintenant **P2**. Tout d'abord, suivant l'analyse de [5], le profil U est obtenu à partir d'une solution (U, Q, Z) de l'équation différentielle

$$Q' = Z, \quad Z' = Q + U'$$

dans la surface définie par la contrainte :

$$Q + \frac{1}{2}U^2 - cU = -\frac{1}{2}u_- u_+.$$

Pour $|x|$ assez grand, cette solution est dérivable, l'équation différentielle est résoluble par rapport aux dérivées (U', Q', Z'), et (U, Q, Z) tend vers des points stationnaires hyperboliques $(u_\pm, 0, 0)$. La convergence de U vers $u_\pm$ est donc exponentielle. Ce qui montre que $\tau_h U - U \in L^1(I\!R)$ pour tout h. La monotonie découle alors du raisonnement précédent : U et $\tau_h U$ étant deux solutions stationnaires, dont la différence est intégrable, la constance de $t \mapsto \|\tau_h U - U\|_1$ entraine que $\tau_h U - U$ est de signe constant. On notera que les paires admissibles (u_-, u_+) satisfont des conditions d'entropies, équivalentes à l'inégalité $u^+ < u^-$ (voir [5, 6]). Les profils sont donc décroissants.

3 La stabilité des constantes

C'est donc une question ouverte. Nous décrivons ici quelques idées générales et donnons une estimation, insuffisante cependante pour conclure.

Nous reprenons la méthode usuelle. Comme u_- est supérieur à u_+, on commence par construire une fonction $v_0 \in u_- + L^1$ telle que

$$\int_{I\!R} (v_0 - u_0)dx = 0, \quad u_0(x) \leq v_0(x).$$

Tout d'abord, l'argument de contraction et de densité permet de se ramener au cas où il existe x_0 tel que $u_0(x) \leq u_-$ pour tout $x > x_0$ (par exemple, on se limite aux données telles que $u_0 - u_-$ soit à support compact). On peut alors choisir v_0 de sorte que $v_0(x) = \max(u(x), u_-)$ pour tout $x < x_0$, et $v_0(x) \leq u_-$ pour $x > x_0$. Alors $v_0 - u_- = d\phi_0/dx$, où $\phi_0 \geq 0$, avec $\phi_0(\pm\infty) = 0$. La fonction ϕ_0 est d'abord croissante, jusqu'en x_0, puis décroissante. En particulier, $\phi_0 \geq 0$.

Soit $v(t) = S(t)v_0$ et

$$\phi(x,t) := \int_{-\infty}^{x} (v(y,t) - u_-)dy,$$

qui est la solution du problème de Cauchy

$$\phi_t + \frac{1}{2}(v^2 - u_-^2) + \phi = K\phi, \quad \phi(x,0) = \phi_0(x).$$

Alors, pour tout $t > 0$, $\phi(\cdot,t) \geq 0$. En effet, un changement de variable $(x,t) \mapsto (x - u_-t, t)$ nous ramène à l'équation

$$\phi_t + \frac{1}{2}\phi_x^2 + \phi = K\phi, \tag{5}$$

qui satisfait le principe du maximum. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que la solution entropique ϕ s'obtient comme limite de la solution ρ^ϵ de classe $\mathcal{C}^\infty$ du problème régularisé

$$\rho_t + \frac{1}{2}\rho_x^2 + \rho = \epsilon(1 + \rho_{xx}) + K\rho, \quad \rho(x,0) = \phi_0 * \delta_\epsilon,$$

où δ_ϵ est un noyau régularisant.

Par argument de densité, nous pouvons supposer que $\phi_0 \in L^1(I\!R)$. Intégrant (5), et utilisant la positivité de ϕ, il vient

$$\int_0^{+\infty} \|\phi(t)_x\|_2^2 \leq 2\|\phi_0\|_1.$$

Du même calcul on tire $\|\phi(t)\|_1 \leq \|\phi_0\|_1$.

Rappelant alors l'inégalité classique $\|\phi\|_\infty^3 \leq 4\|\phi\|_1\|\phi_x\|_2^2$, il vient que $t \mapsto \|\phi(t)\|_\infty$ appartient à $L^3(0,+\infty)$. Cependant, cette fonction du temps est décroissante (principe du maximum pour (5)). Finalement :

Théorème 2 *La solution entropique ϕ du problème de Cauchy (5) satisfait*

$$\lim_{t\to+\infty} \|\phi(t)\|_\infty = 0.$$

On peut en fait démontrer ce résultat sans l'hypothèse de positivité de ϕ_0, au prix de complications techniques. Mais c'est inutile si on n'a en vue que la propriété **P3**. La question ouverte est de relier la variation totale de $\phi(t)$ (car c'est la norme L^1 de $v-u_-$), à sa norme L^∞, qui tend vers zéro. La majoration évidente $\|\phi\|_\infty \leq VT(\phi)$ est sans utilité. Une inégalité en sens inverse est fausse en général, mais peut être vraie si on contrôle le nombre de changement de signe de $v-u_-$ (le nombre de changement de sens de variation de ϕ). C'est la démarche adoptée dans [2]. La question reste ouverte ici.

References

[1] C. Abourjaily, P. Bénilan. Symmetrization of quasi-linear parabolic problems. Preprint (1996), Besançon.

[2] H. Freistühler, D. Serre. L^1-stability of shock waves in scalar viscous conservation laws. *Comm. Pure & Appl. Math*, **51** (1998), pp 291-301.

[3] H. Freistühler, D. Serre. The L^1-stability of boundary layers for scalar viscous conservation laws. Preprint (1998).

[4] K. Ito. BV-solutions of the hyperbolic-elliptic system for a radiating gas. A paraî tre.

[5] S. Kawashima, S. Nishibata. Shock waves for a model system of a radiatin gas. *SIAM J. Math. Anal.*, **30** (1999), pp 95-117.

[6] S. Kawashima, S. Nishibata. Weak solutions with a shock to a model system of the radiating gas. *Sci. Bull. Josai Univ.* (1998), Special issue no. 5, pp 119-130.

[7] C. Mascia, R. Natalini. L^1 nonlinear stability of travelling waves for a hyperbolic system with relaxation. *J. Diff. Equations*, **132** (1996), pp 275-292.

[8] D. Serre. L^1-decay and the stability of shock profiles. *Proceedings, Prague 1998.* A paraî tre.

[9] D. Serre. Stabilité des ondes de choc de viscosité qui peuvent être caractéristiques. Prepublication (1994).

[10] D. Serre. *Systèmes de lois de conservation, I.* Diderot arts & Sci. (1996). Paris.