Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
Ecole Polytechnique

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1998-1999

Jean-Michel Coron

Sur la stabilisation des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels

Séminaire É. D. P. (1998-1999), Exposé n° VII, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1998-1999____A7_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Sur la stabilisation des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels

Jean-Michel CORON
Département de Mathématiques
Université de Paris Sud
91405 Orsay Cedex, France
Adresse e-mail : Jean-Michel.Coron@math.u-psud.fr

1 Introduction

Des résultats de contrôlabilité sur l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles (problème soulevé par J.-L. Lions dans [19]) ont été obtenus récemment ; voir [6] à [12]. Grosso modo, cette équation sur un domaine borné est exactement contrôlable en temps arbitraire si on agit de façon adéquate sur une partie ouverte arbitrairement petite du bord du domaine qui rencontre chaque composante connexe de ce bord. On sait donc, dans ce cas, passer d'un profil de vitesses donné à un autre profil de vitesses donné en un temps fixé. Ce passage est en "boucle ouverte" : la façon de procéder dépend des deux profils de vitesses (et du temps fixé). Dans la pratique la boucle ouverte est souvent peu robuste aux perturbations (erreurs de modèle, erreur sur le profil initial,...). Pour s'en convaincre on peut se rappeler l'expérience de la règle (ou, plus facile, du balai) que l'on essaie de faire tenir en équilibre sur un doigt : on voit assez facilement qu'en bougeant le doigt d'une façon convenable on peut amener la règle à la verticale avec une vitesse nulle ; théoriquement il suffirait donc ensuite de rester dans cette position, qui est un point d'équilibre. Malheureusement, comme on le sait bien, cela ne marche pas pratiquement et, pour éviter que la règle ne tombe, on continue à bouger le doigt pour l'empêcher de tomber. Cette façon de bouger le doigt dépend d'informations que l'on a sur l'état du système (position de la règle, vitesse de la règle -essayer l'expérience en fermant les yeux-). C'est de la "boucle fermée" : le contrôle ne dépend plus de l'état initial mais de l'état du système au moment où on applique le contrôle. D'un point de vue plus mathématique le contrôle que l'on cherche est une fonction (appelée retour d'état) de l'état du système qui stabilise asymptotiquement le point d'équilibre. On a alors une certaine robustesse aux perturbations ; cela peut se voir facilement en utilisant la réciproque du second théorème de Liapounov : la stabilité asymptotique implique l'existence d'une fonction de Liapounov (stricte), qui donne cette robustesse.

Une question se pose alors naturellement : si un système de contrôle est contrôlable, peut-on stabiliser asymptotiquement ses points d'équilibre ? On sait, depuis longtemps, que la réponse est oui pour les sytèmes de contrôle linéaire de dimension finie. Elle est aussi oui pour de très nombreux systèmes linéaires de dimension infinie ; voir, par exemple, les travaux de Slemrod [23], J-L. Lions [18], Lasiecka-Triggiani [17] et Komornick [13]. Mais la réponse est négative pour les systèmes non linéaires, même de dimension finie. Les premiers contre-exemples sont dus à Sussmann [25] et Sontag-Sussmann [24] et, dans [1], Brockett a donné une élégante et puissante condition nécessaire de stabilisabilité asymptotique, que nous rappelons dans la section suivante, qui n'est pas satisfaite pour de nombreux systèmes non linéaires.

Il est alors naturel de regarder le cas de l'équation d'Euler des fluides incompressibles. On examine l'équilibre le plus simple possible, à savoir la vitesse nulle. Notons, qu'en l'absence de contrôle ce point d'équilibre est stable, mais pas asymptotiquement stable. On verra, que pour des domaines bidimensionnels bornés simplement connexes, on peut stabiliser asymptotiquement ce point d'équilibre avec des contrôles explicites.

2 Obstructions à la stabilisabilité asymptotique.

Dans cette section, on se limite à des systèmes de contrôle de dimension finie. Mais, comme on peut le voir en analysant les preuves, une partie des résultats donnés reste vraie pour certains systèmes non linéaires de dimension infinie.

On considère donc des systèmes de contrôle de la forme

$$\dot{x} = f(x, u),$$

où l'état du système est $x \in \mathbb{R}^n$ et le contrôle est $u \in \mathbb{R}^m$. Pour simplifier on suppose que f est défini sur tout $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et de classe C^1 sur tout cet ensemble. On suppose aussi que

$$f(0, 0) = 0 \ ,$$

et on cherche à stabiliser asymptotiquement l'origine de $\mathbb{R}^n$. On adopte la définition suivante

Définition 2.1 *On dit que* $0\,(\in \mathbb{R}^n)$ *est asymptotiquement stabilisable pour le système de contrôle* $\dot{x} = f(x,u)$ *s'il existe un retour d'état* u*, c'est-à-dire une application* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, continu, s'annulant en* 0 *et tel que* 0 *est asymptotiquement stable pour le système bouclé, c'est-à-dire pour le système* $\dot{x} = f(x, u(x))$*. De plus s'il existe un tel* u *tel que* 0 *est, en fait, globalement asymptotiquement stable pour* $\dot{x} = f(x, u(x))$*, on dit que* $0\,(\in \mathbb{R}^n)$ *est globalement asymptotiquement stabilisable pour le système de contrôle* $\dot{x} = f(x,u)$*.*

Comme le retour d'état u est seulement continu on n'a pas unicité des solutions du problème de Cauchy

$$\dot{x} = f(x, u(x)), x(t_0) = x_0. \tag{2.1}$$

Mais

(i) On a existence de solutions (théorème de Péano),

(ii) Même pour un champ de vecteurs seulement continu, on a équivalence entre la stabilité asymptotique et l'existence d'une fonction de Liapounov. Ce théorème est dû à Kurzweil [16] ; pour une démonstration récente plus simple, voir Clarke et al. [3]. Donc, de nouveau, la stabilité asymptotique donne une certaine robustesse.

Il est important de considérer des retours d'état qui ne soient pas localement lipschitziens (pour de tels retours d'état on aurait unicité des solutions du problème de Cauchy (2.1)). En effet le système

$$\dot{x} = x - u^3 \ , \ x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R},$$

est évidemment contrôlable (c'est-à-dire que l'on peut aller, avec un $t \to u(t)$ bien choisi, de n'importe quel point à n'importe quel autre en un temps strictement positif arbitraire), mais 0 n'est pas asymptotiquement stabilisable, pour ce système de contrôle, si on se limite à des retours d'état localement lipschitzien ; pourtant 0 est asymptotiquement stabilisable pour ce système de contrôle avec notre définition : prendre, par exemple,

$$u(x) = 2|x|^{1/3} \text{ signe } (x).$$

Avec cette définition on a l'obstruction suivante, due à Brockett [1], à la stabilisation asymptotique

Théorème 2.2 *Si* $0(\in \mathbb{R}^n)$ *est asymptotiquement stabilisable pour le système de contrôle* $\dot{x} = f(x,u)$*, alors l'image par* f *de tout voisinage de l'origine (dans* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$*) est un voisinage de l'origine (dans* $\mathbb{R}^n$*).*

Ce théorème est un corollaire du théorème suivant dû à Krasnosel'skiĭ [14] (voir aussi [15 ; Theorem 52.1]) - mais la démonstration de [1] est indépendante de [14].

Théorème 2.3 *Soit $X \in C^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ s'annulant en 0. Si 0 est asymptotiquement stable pour $\dot{x} = X(x)$, alors, pour $\varepsilon > 0$ assez petit,*

$$\text{degré}(X, B_\varepsilon, 0) = (-1)^n \tag{2.2}$$

où

$$B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| < \varepsilon\} .$$

Pour déduire le théorème 2.2 du théorème 2.3, il suffit de considérer $X(x) = f(x, u(x))$ et de rappeler que (2.2) implique que l'image par X de tout voisinage de 0 est un voisinage de 0.

Donnons la démonstration du théorème 2.3. On traite d'abord le cas où X est de classe C^1. On peut alors considérer le flot $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ associé à X :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = X(\varphi, t),\ \ \varphi(x, 0) = x\ .$$

Le domaine de définition de φ est un voisinage de $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Soit, pour $\varepsilon > 0$, $H : \overline{B_\varepsilon} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} H(x,t) &= \tfrac{\varphi(x, \frac{t}{1-t}) - x}{t} \text{ si } t \neq 0 \text{ et } t \neq 1, \\ H(x,0) &= X(x), \\ H(x,1) &= -x\ . \end{aligned}$$

En utilisant le fait que 0 est asymptotiquement stable pour $\dot{x} = X(x)$, on vérifie assez facilement que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, H est bien définie, continue et ne s'annule pas sur $(\partial B_\varepsilon) \times [0, 1]$. On a donc

$$\text{degré } (H(\cdot, 0), B_\varepsilon, 0) = \text{ degré } (H(\cdot, 1), B_\varepsilon, 0)$$

ou encore

$$\text{degré } (X, B_\varepsilon, 0) = \text{ degré } (x \to -x, B_\varepsilon, 0) = (-1)^n.$$

Si X est seulement continu, on ne peut plus parler du flot associé à X. Mais d'après le théorème de Kurzweil [16] il existe une fonction $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ de classe C^∞ et $\varepsilon > 0$ tel que

$$\nabla V(x).X(x) < 0\ , \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ avec } 0 < |x| \leq \varepsilon\ , \tag{2.3}$$

(2.4) $$V(0) < V(x) \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ avec } |x| \leq \varepsilon \ .$$

On considère alors $H_1 : \overline{B_\varepsilon} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ défini par

(2.5) $$H_1(x,t) = (1-t)X(x) - t\nabla V(x) \ .$$

De (2.3) et (2.5) il vient

$$H_1(x,t) \cdot \nabla V(x) < 0 \ , \ \forall x \in \partial B_\varepsilon \ , \ \forall t \in [0,1] \ ,$$

et donc H_1 ne s'annule pas sur $\partial B_\varepsilon \times [0,1]$. L'invariance par homotopie du degré implique alors que

(2.6) $$\text{degré } (X, B_\varepsilon, 0) = \text{degré } (-\nabla V, B_\varepsilon, 0).$$

Mais 0 est asymptotiquement stable pour $\dot{x} = -\nabla V(x)$ (V est une fonction de Liapounov pour cette équation différentielle) et, comme $\nabla V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, il résulte alors du théorème 2.3 dans le cas régulier que pour $\eta \in]0, \varepsilon[$ assez petit

(2.7) $$\text{degré } (-\nabla V, B_\eta, 0) = (-1)^n$$

Comme, d'après (2.3), ∇V et X ne s'annulent pas sur $B_\varepsilon \setminus \{0\}$, on obtient de (2.6) et (2.7)

$$\text{degré } (X, B_\nu, 0) = (-1)^n \ , \ \forall \nu \in]0, \varepsilon[$$

■

Pour les systèmes de contrôle linéaires, c'est-à-dire les systèmes de contrôle $\dot{x} = Ax + Bu$ avec $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ et $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, la contrôlabilité implique bien que, pour tout $\varepsilon > 0$,

(2.8)
$$\{Ax + Bu; x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, |x| + |u| < \varepsilon\} \text{ est un voisinage de } 0 (\in \mathbb{R}^n).$$

En effet, d'après le critère de Kalman, la contrôlabilité de $\dot{x} = Ax + Bu$ est équivalente à

(2.9) $$ev\{A^i Bu \ ; \ u \in \mathbb{R}^m, i \in [0, n-1]\} = \mathbb{R}^n,$$

où evM désigne l'espace vectoriel engendré par M, et (2.9) implique (2.8).

Par contre il existe des systèmes non linéaires contrôlables $\dot{x} = f(x,u)$ tel que $f(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ n'est pas un voisinage de l'origine. Par exemple, le système

(2.10) $$\dot{x}_1 = u_1 \ , \ \dot{x}_2 = u_2 \ , \ \dot{x}_3 = x_1 u_2$$

est contrôlable (cela résulte du théorème de Rashevski [21] - Chow [2]). Pour ce système $f(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2) \cap (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) = (0,0,0)$ et donc $f(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2)$ n'est pas un voisinage de $(0,0,0)$. Le théorème 2.2 nous dit alors que, pour le système contrôlable (2.10), $0\,(\in \mathbb{R}^3)$ n'est pas asymptotiquement stabilisable.

Remarque 2.4 *La situation s'améliore si on autorise le retour d'état à* dépendre aussi du temps *: Samson a montré dans [22] que, pour le système (2.10),* 0 *est globalement asymptotiquement stabilisable à l'aide de retours d'état* dépendant du temps. *De plus ce phénomène est assez général : pour de nombreux systèmes contrôlables les points d'équilibre sont asymptotiquement stabilisables à l'aide de retours d'état* dépendant du temps *; voir [24] [4] et [5].*

3 Le cas des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels.

Soit Ω un ouvert borné connexe non vide de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$ et soit Γ_0 un ouvert non vide de $\Gamma := \partial\Omega$. Le système de contrôle de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles que nous considérons est

$$\frac{\partial y}{\partial t} + (y.\nabla)y + \nabla p = 0 \ , \tag{3.1}$$

$$\text{div } y = 0 \ , \tag{3.2}$$

$$y.n = 0 \text{ sur } \Gamma \setminus \Gamma_0 \ , \tag{3.3}$$

où n désigne la normale extérieure à Ω sur Γ. Notons que, pour l'instant nous ne précisons pas ce qu'est le contrôle (ni d'ailleurs l'état) : on utilise une formulation implicite où un système de contrôle est vu comme un système sous-déterminé. Par exemple une formulation implicite du système (2.4) est

$$\dot{x}_3 = x_1 \dot{x}_2 \ . \tag{3.4}$$

Pour le problème de la contrôlabilité la formulation implicite est suffisante et on a le théorème suivant [8] (voir les travaux de Glass [10] [11] [12] pour la dimension 3) de contrôlabilité

Théorème 3.1 *On suppose que Γ_0 rencontre chaque composante connexe de Γ. Soit $T > 0$, soient y_0 et y_1 dans $C^\infty(\overline{\Omega};\mathbb{R}^2)$ satisfaisant (3.2) sur $\overline{\Omega}$ et (3.3). Il existe alors $y \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T]\,;\mathbb{R}^2)$ et $p \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T];\mathbb{R})$ tels que (3.1) et (3.2) soient satisfaits sur $\overline{\Omega} \times [0,T]$ et tels que*

$$y(x,t).n(x) = 0 \ , \ \forall (x,t) \in (\Gamma \setminus \Gamma_0) \times [0,T] \ .$$

On s'intéresse maintenant au point d'équilibre $y = 0$ et on regarde le problème de la stabilisabilité asymptotique. Il est maintenant important de préciser ce qu'est le contrôle et ce qu'est l'état. On suppose que Ω est simplement connexe. Il est alors naturel de prendre pour l'état du système le tourbillon

$$\omega := \text{rot } y \ .$$

Pour le contrôle plusieurs choix naturels sont alors possibles, comme par exemple les deux choix suivants

(a) $y.n$ sur Γ_0 et $\partial\omega/\partial t$ aux points de Γ_0 où $y.n < 0$, c'est-à-dire aux points de Γ_0 où le fluide entre dans le domaine Ω,

(b) $y.n$ sur Γ_0 et ω aux points de Γ_0 où $y.n < 0$.

Ici on se limite au cas (a) ; voir [9] pour le cas (b).

Construisons maintenant un retour d'état globalement asymptotiquement stabilisant pour l'origine, i.e. pour l'état $\omega = 0$. Soit $g \in C^\infty(\partial\Omega; \mathbb{R})$ tel que

$$\text{support } g \subset \Gamma_0 \ ,$$

$$\gamma_+ := \{g > 0\} \text{ et } \gamma_- = \{g < 0\} \text{ sont connexes et non vides,}$$

$$\overline{\gamma_+} \cap \overline{\gamma_-} = \emptyset \ ,$$

$$\int_{\partial\Omega} g = 0 \ . \tag{3.5}$$

Pour $\omega \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$, on pose

$$|\omega|_0 = \max\{|\omega(x)|; x \in \overline{\Omega}\} \ .$$

Notre retour d'état est

$$y.n = M|\omega|_0 g \text{ sur } \gamma \ ,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -M|\omega|_0\omega \text{ sur } \gamma_- \text{ si } |\omega|_0 \neq 0 \ ,$$

où $M > 0$ est assez grand. Avec ce retour d'état une fonction $\omega : \Omega \times I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ est une solution du système bouclé, que nous noterons Σ, si

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \text{div}(\omega y) = 0 \text{ dans } \Omega \times \overset{\circ}{I} \ , \tag{3.6}$$

$$\text{div } y = 0 \text{ dans } \Omega \times \overset{\circ}{I} \tag{3.7}$$

(3.8) $$\mathrm{rot}\ y = 0 \text{ dans } \Omega \times \overset{\circ}{I}\ ,$$

(3.9) $$y(t).n = M|\omega(t)|_0 g \text{ sur } \partial\Omega, \forall t \in I\ ,$$

(3.10) $$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -M|\omega(t)|_0\omega \text{ sur } \{t; \omega(t) \neq 0\} \times \gamma_-\ ,$$

où, pour $t \in I, \omega(t) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ et $y(t) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ sont définis par

$$\begin{array}{ll} \omega(t)(x) & = \omega(x,t), \forall x \in \overline{\Omega}, \\ y(t)(x) & = y(x,t), \forall x \in \overline{\Omega}\ . \end{array}$$

Plus précisément, la définition d'une solution de Σ est

Définition 3.2 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $\omega : I \to C^0(\overline{\Omega})$ est une solution du système Σ si*

(i) $\omega \in C^0(I; C^0(\overline{\Omega}))(\simeq C^0(\overline{\Omega} \times I))$,

(ii) Pour $y \in C^0(\overline{\Omega} \times I; \mathbb{R}^2)$ défini en demandant (3.7) et (3.8) au sens des distributions et (3.9), on a (3.6) au sens des distributions,

(iii) Au sens des distributions,

$$\partial\omega/\partial t = -M|\omega(t)|_0\omega$$

sur la variété ouverte de dimension 2 $\{t \in \overset{\circ}{I}; \omega(t) \neq 0\} \times \gamma_-$.

Notre premier théorème assure que, pour M assez grand, le problème de Cauchy pour le système Σ a au moins une solution définie sur $[0, +\infty[$ pour toute donnée initiale dans $C^0(\overline{\Omega})$. Plus précisément on a le

Théorème 3.3 *Il existe $M_0 > 0$ tel que, pour tout $M \geq M_0$, on a les deux propriétés suivantes*

(i) Pour tout ω_0 dans $C^0(\overline{\Omega})$, il existe une solution de Σ définie sur $[0, +\infty[$ telle que $\omega(0) = \omega_0$,

(ii) Toute solution maximale de Σ définie au temps 0 est définie sur $[0, +\infty[$ au moins.

Remarque 3.4 a. *Dans ce théorème, (ii) implique en fait (i) –utiliser le lemme de Zorn pour démontrer, comme d'habitude, l'existence d'une solution maximale valant ω_0 au temps 0–.* **b.** *On ne sait pas si la solution du problème de Cauchy est unique pour les temps croissants. (Pour les temps décroissants on n'a pas unicité en général : il y a des solutions de Σ définies sur $[0, +\infty[$*

telles que $\omega(0) \neq 0$ et $\omega(T) = 0$ pour $T > 0$ assez grand.) Notons toutefois que, déjà pour les systèmes de dimension finie, on considère des retours d'état seulement continus ; pour de tels retours d'état le problème de Cauchy pour le système bouclé peut avoir plusieurs solutions, même en temps croissants. Ceci dit il semble raisonnable de conjecturer que, dans la situation présente, le problème de Cauchy pour les temps croissants a une solution unique.

On peut maintenant énoncer le résultat principal de cette section, qui montre que pour M assez grand, le retour d'état proposé rend $0 (\in C^0(\overline{\Omega}))$ globalement asymptotiquement stable pour le système bouclé.

Théorème 3.5 *Il existe une constante $M_1 \geq M_0$ telle que, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, pour tout $M \geq M_1/\varepsilon$ et pour toute solution maximale du système Σ définie au temps 0,*

$$|\omega(t)|_0 \leq \min\{|\omega(0)|_0, \frac{\varepsilon}{t}\} , \quad \forall t > 0 . \tag{3.11}$$

Remarque 3.6 *À cause du terme $|\omega(t)|_0$ apparaissant dans (3.9) et dans (3.10) notre retour d'état ne dépend pas que de ω sur Γ_0 (ou même sur $\partial\Omega$). En fait il n'existe pas de retour d'état ne dépendant que de ω sur $\partial\Omega$ tel que $0 \in C^0(\overline{\Omega})$ soit asymptotiquement stable pour le système bouclé. Ceci est dû aux tourbillons "fantômes" : soit Ω_0 un ouvert non vide tel que $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$, il existe des solutions $\bar{y} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ de l'équation d'Euler stationnaire de support $\subset \Omega_0$ et telles que $\bar{\omega} := \mathrm{rot}\ \bar{y} \neq 0$; voir, par exemple, [20]. Alors $\omega(t) = \bar{\omega}$ est une solution du système bouclé si le retour d'état, qui doit s'annuler en 0, ne dépend que des valeurs de ω sur $\partial\Omega$ (ou même ne dépend pas des valeurs de ω sur Ω_0). c. La décroissance donnée dans (3.11) est lente pour $t \to +\infty$; mais il est important de noter que (3.11) assure, que, par exemple,* $|\omega(1)| \leq \varepsilon$ quelque soit la condition initiale $\omega(0)$, *propriété que l'on n'a pas pour les systèmes linéaires si on utilise des retours d'état linéaires même exponentiellement stabilisants.*

Pour les démonstrations des théorèmes 3.3 et 3.5 nous renvoyons à [9]. Mentionnons juste que l'on a une fonction de Liapounov explicite qui permet en particulier d'obtenir (3.11). Cette fonction est la suivante. Soit $h \in C^\infty(\overline{\Omega})$ définie par

$$\Delta h = 0 , \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial h}{\partial n} = g , \tag{3.13}$$

L'existence de h est assurée par (3.5). (De plus h est unique à une constante additive près.) Soit, alors, $V : C^0(\overline{\Omega}) \to [0, +\infty[$ définie par

$$V(\omega) = |\omega \exp(-h)|_0 \ .$$

On a la proposition suivante, qui implique le théorème 3.5,

Proposition 3.7 *Il existe $M_2 \geq M_0$ et $\mu > 0$ tel que pour tout $M \geq M_4$ et pour toute solution $\omega : [0, +\infty[\to C^0(\overline{\Omega})$ du système Σ on a, pour tout temps $t \in [0, +\infty[$,*

$$[-\infty, 0] \ni \dot{V}(t) : \frac{d}{dt^+} V(\omega(t)) \leq -\mu M V^2(\omega(t))$$

où

$$\frac{d}{dt^+} V(\omega(t)) := \lim_{\eta \to 0^+} \frac{V(\omega(t+\eta)) - V(\omega(t))}{\eta} \ .$$

Terminons par quelques commentaires dans le cas où l'ouvert n'est pas simplement connexe. Pour avoir la contrôlabilité on suppose que Γ_0 rencontre chaque composante connexe du bord. On peut continuer à considérer les choix (a) ou (b) pour le contrôle. Pour l'état on ajoute à ω les réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_g$ définis par

$$\lambda_i = \int y \cdot \nabla^\perp \tau_i$$

où, si on désigne par $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_g$ les composantes connexes du bord de Ω, les fonctions $\tau_i \in C^\infty(\overline{\Omega}), i \in \{1, \cdots, g\}$ sont définies par

$$\begin{aligned} \Delta \tau_i &= 0 \ , \\ \tau_i &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \mathcal{C}_i, \\ \tau_i &= 1 \text{ sur } \mathcal{C}_i, \end{aligned}$$

et où $\nabla^\perp \tau_i$ désigne $\nabla \tau_i$ tourné de $\pi/2$. On est alors conduit au problème ouvert suivant

Problème ouvert 3.8 *Dans le cas $g \geq 1$, existe-t-il toujours un retour d'état qui rend $0 \in C^0(\overline{\Omega}) \times \mathbb{R}^g$ globalement asymptotiquement stable pour le système bouclé ?*

L'obstruction à la stabilisabilité asymptotique donnée dans le théorème 2.2 n'est pas trivialement applicable aux équations d'Euler, qui sont en dimension infinie. Toutefois elle conduit à poser le problème ouvert suivant

Problème ouvert 3.9 *Soit $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Existe-t-il $y \in C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ et $p \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tels que*

$$(y.\nabla)y + \nabla p = f \ \text{dans } \overline{\Omega} \ , \tag{3.14}$$

$$\text{div } y = 0 \textit{ dans } \overline{\Omega} \ , \tag{3.15}$$

$$y.n = 0 \textit{ sur } \Gamma \setminus \Gamma_0 ? \tag{3.16}$$

Notons que, contrairement au cas général, on peut ne pas supposer f « petit ». En effet, par changement d'échelle, si on a une solution (y, p) pour f « petit », on a une solution pour tout f (voir ci-dessous).

De plus si Ω est simplement connexe on a effectivement toujours une solution (y, p). En effet, on a le théorème

Théorème 3.10 *Si Ω est simplement connexe, alors, pour tout $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, il existe $y \in C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ et $p \in C^\infty(\overline{\Omega})$ solution de (3.14), (3.15) et (3.16).*

Ce théorème ne semble pas se déduire directement du résultat de stabilisabilité donné dans [9]. Mais la démonstration que nous allons en donner utilise effectivement des ingrédients déjà donnés dans [9] corroborant ainsi le lien entre la stabilisabilité asymptotique et le problème ouvert 3.9. En fait, comme le théorème 3.10 a été énoncé dans le cadre C^∞ (et non dans le cas continu), il est préférable d'utiliser les ingrédients de [6] (qui sont reliés à ceux de [9]). On utilise donc les notations de [6] et en particulier la définition de Ω_1 Σ, Γ_1, Γ_{-1} et θ. Soit $P : C^1(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega}_1)$ une application linéaire telle que

$$P(g)(x) = g(x), \forall x \in \overline{\Omega}, \forall g \in C^1(\overline{\Omega}), \tag{3.17}$$

$$\exists C > 0 \text{ tel que } |P(y)|_{C^1(\overline{\Omega}_1)} \leq C|g|_{C^1(\overline{\Omega})}, \forall g \in C^1(\overline{\Omega}),$$

$$(P(g) \in C^m(\overline{\Omega}_1), \forall g \in C^m(\overline{\Omega})), \forall m \in \mathbb{N}^* \ .$$

On suppose en outre qu'il existe un voisinage W de $\Gamma_1 \cup \Gamma_{-1}$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\text{Support } P(g) \subset \overline{\Omega}_1 \setminus W \ , \ \forall g \in C^1(\overline{\Omega}) \ .$$

Pour $\omega \in C^1(\overline{\Omega})$, on définit $\psi_\omega \in C^2(\overline{\Omega_1})$ par

$$\Delta \psi_\omega = \omega \text{ dans } \overline{\Omega}_1 \ ,$$

$$\frac{\partial \psi_\omega}{\partial n_1} = 0 \text{ sur } (\Gamma_1 \cup \Gamma_{-1}) \setminus (\partial \Gamma_1 \cup \partial \Gamma_{-1}),$$

$$\psi_\omega = 0 \text{ sur } \Sigma \ .$$

où n_1 est la normale extérieure à Ω_1. On pose

$$y_\omega = \nabla^\perp \psi_\omega + \nabla \theta \ .$$

Par construction,

$$\text{div } y_\omega = 0 \text{ dans } \Omega_1, \tag{3.18}$$

$$\text{rot } y_\omega = \omega \text{ dans } \Omega_1, \tag{3.19}$$

$$y_\omega.n_1 = 0 \text{ sur } \Sigma \setminus \partial\Sigma. \tag{3.20}$$

De plus $y_\omega \to \nabla\theta$ dans $C^1(\overline{\Omega}_1; \mathbb{R}^2)$ quand $\omega \to 0$ dans $C^1(\overline{\Omega})$. Comme, voir [6], $\nabla\theta$ ne s'annule pas sur $\overline{\Omega}_1$ et que, pour un $\eta > 0$,

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta_1} \geq \eta \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } \frac{\partial\theta}{\partial\eta_1} \leq -\eta \text{ sur } \Gamma_{-1},$$

on voit facilement que, pour ω proche de 0 dans $C^1(\overline{\Omega})$ et pour g dans $C^1(\overline{\Omega})$, il existe une fonction et une seule $K = K(\omega, g) \in C^1(\overline{\Omega}_1)$ telle que

$$(y_\omega.\nabla)K = P(g), \tag{3.21}$$

$$K = 0 \text{ sur } \Gamma_{-1} \ . \tag{3.22}$$

Finalement, on définit $F : C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$ par

$$F(\omega, g) = \omega - K(\omega, g)|_{\overline{\Omega}} \ . \tag{3.23}$$

La fonction F est bien définie et de classe C^1 sur un voisinage ouvert de $(0, 0)$ dans $C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ et on a

$$\frac{\partial F}{\partial\omega}(0, 0)\tilde{\omega} = \tilde{\omega}.$$

Le théorème des fonctions implicites nous donne alors l'existence de $\varepsilon > 0$ et d'une application G de $\mathcal{B}_\varepsilon := \{g \in C^1(\overline{\Omega}); |g|_{C^1(\overline{\Omega})} < \varepsilon\}$ dans $C^1(\overline{\Omega})$ de classe C^1 telle que

$$F(G(g), g) = 0 \ , \forall g \in \mathcal{B}_\varepsilon. \tag{3.24}$$

Soit $f \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ tel que $|\text{rot } f|_{C^1(\overline{\Omega})} < \varepsilon$. Posons

$$g = \text{rot} f \ , \tag{3.25}$$

$$\omega = G(g) \ , \tag{3.26}$$

(3.27) $$y = y_{\omega|\overline{\Omega}}.$$

De (3.18) et (3.27), il vient

(3.28) $$\text{div } y = 0 \text{ dans } \overline{\Omega} .$$

De (3.17), (3.21), (3.23), (3.24), (3.25), (3.26) et (3.27) il vient

(3.29) $$(y.\nabla)\omega = \text{rot } f \text{ dans } \overline{\Omega} .$$

De (3.19) et (3.27), il vient

(3.30) $$\text{rot } y = \omega \text{ dans } \overline{\Omega} .$$

De (3.20) et (3.27), il vient

$$y.n = 0 \text{ sur } \Gamma \setminus \Gamma_0 .$$

De (3.28), (3.29) et (3.30), il vient

$$\text{rot } ((y.\nabla)y) = \text{rot } f \text{ dans } \overline{\Omega}$$

et donc il existe $p\,(\in C^1(\overline{\Omega}))$ tel que

$$(y.\nabla)y + \nabla p = f .$$

Par ailleurs, on vérifie facilement que si, pour un entier $m \geq 1$, f est de classe C^{m+1} sur $\overline{\Omega}$ alors y et p sont de classe C^m sur $\overline{\Omega}$. On a donc bien une solution à notre problème si $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ vérifie $|\text{rot} f|_{C^1(\overline{\Omega})} < \varepsilon$. Si $f \in C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ est tel que

$$|\text{rot} f|_{C^1(\overline{\Omega})} := a \geq \varepsilon ,$$

il suffit de considérer

$$\tilde{f} = \varepsilon \frac{f}{2a} .$$

En effet on a alors $|\text{rot}\tilde{f}|_{C^1(\overline{\Omega})} < \varepsilon$ et donc il existe

$$\tilde{y} \in C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2) \text{ et } \tilde{p} \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

tels que

$$(\tilde{y}.\nabla)\tilde{y} + \nabla\tilde{p} = \varepsilon\frac{f}{2a} \text{ dans } \overline{\Omega} ,$$
$$\text{div } \tilde{y} = 0 \text{ dans } \overline{\Omega} ,$$
$$\tilde{y}.n = 0 \text{ sur } \Gamma \setminus \Gamma_0 .$$

Il est alors clair que

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\tfrac{2a}{\varepsilon}}\tilde{y} , \\ p &= 2a\tilde{p} , \end{aligned}$$

vérifient bien (3.14), (3.15) et (3.16). ■

Remarque 3.11 *Le problème ouvert 3.9 est ouvert aussi en dimension 3, même si Ω est contractile.*

Références

[1] R.W. Brockett, Asymptotic stability and feedback stabilization, dans : *Differential Geometric Control Theory*, R.W. Brockett, R.S. Millman et H.J. Sussmann éds, Progress in Math., 27 (1983) p. 181-191, Birkhäuser, Basel-Boston.

[2] W.L. Chow, Uber systeme von linearen partiellen differentialgleichung ester ordnung, Math. Ann. 117 (1940-41) p. 227-232.

[3] F.H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R.J. Stern, Asymptotic stability and smooth Lyapunov functions, *J. Diffferential Equations*, 149 (1998) p. 69-114.

[4] J.-M. Coron, Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift, Math. Control Signals Systems, 5 (1992) p. 295-312.

[5] J.-M. Coron, Stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback laws, SIAM J. Control and Optimization, 33 (1995) p. 804-833.

[6] J-M. Coron, Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels,*C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 317, Série I, (1993) p. 271-276.

[7] J-M. Coron, Return method : Application to controllability, *Séminaire Équations aux Dérivées Partielles*, 1992-1993, École polytechnique, Centre de Mathématiques, exposé 14.

[8] J-M. Coron, On the controllability of the 2-D incompressible perfect fluids, *J. Math. Pures et Appliquées*, 75 (1996) p. 155-188.

[9] J-M. Coron, On the null asymptotic stabilization of the 2-D incompressible Euler equation in a simply connected domain, prépublication, Université Paris-Sud, 59 (1998), accepté pour publication dans *SIAM J. Control and Optimization*.

[10] O. Glass, Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles en dimension 3, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 325, Série I, (1997) p. 987-992.

[11] O. Glass, Contrôlabilité de l'équation d'Euler tridimensionnelle pour les fluides parfaits incompressibles, *Séminaire Équations aux Dérivées Partielles*, 1997-1998, École polytechnique, Centre de Mathématiques, exposé 15.

[12] O. Glass, Exact boundary controllability of 3-D Euler equation, prépublication, Décembre 1998.

[13] V. Komornik, Rapid boundary stabilization of linear distributed systems, *SIAM J. Control Optim.*, 35 (1997) p. 1591-1613.

[14] M.A. Krasnosel'skiĭ, The operator translation along the trajectories of differential equations, Trans. Math. Monographs, 19 (1968).

[15] M.A. Krasnosel'skiĭ et P.P. Zabreiko, *Geometric methods in nonlinear analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[16] J. Kurzweil, On the inversion of Lyapunov's second theorem on stability of motion, *Ann. Math. Soc. Trans.* Ser.2, 24 (1956) p. 19-77.

[17] I. Lasiecka and R. Triggiani, *Differential and Algebraic Ricatti Equations with Applications to Boundary/Point Control Problems : Continuous and Approximation Theory*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 164, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1991.

[18] J.-L. Lions, Exact controllability, stabilizability, and perturbations for distributed systems, *SIAM Rev.*, 30 (1988) p. 1-68.

[19] J.-L. Lions, Are there connections between turbulence and controllability ?, 9th INRIA International Conference, Antibes, June 12-15, 1990.

[20] A. Majda, Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow, *Comm. Pure Appl. Math.*, 39, special issue, (1986) p. 187-220.

[21] P.K. Rashevski, About connecting two points of complete nonholonomic space by admissible curve, Uch Zapiski ped. inst. Libknexta, 2 (1938) p. 83-94.

[22] C. Samson, Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart, dans : Advanced Robot Control, Proceedings de ¡¡ International workshop on nonlinear and adaptative control : Issues in robotics ¿¿, Grenoble, France, novembre 21-23, 1990, éd. : C. Canudas de Wit, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 162, p. 125-151, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991.

[23] M. Slemrod, A note on complete controllability and stabilizability for linear control systems in Hilbert space, *SIAM J. Control*, 12 (1974) p. 500-508.

[24] E.D. Sontag et H. Sussmann, Remarks on continuous feedbacks, IEEE CDC, Albuquerque, 2 (1980) p. 916-921.

[25] H.J. Sussmann, Subanalytic sets and feedback control, *J. Differential Equations*, 31 (1979) p. 31-52.