Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1998-1999

Jean-Philippe Nicolas

Champs de spin 3/2 et relativité générale

Séminaire É. D. P. (1998-1999), Exposé n° VI, 14 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1998-1999____A6_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Champs de spin 3/2 et relativité générale

Jean-Philippe Nicolas

1 Introduction

Les équations d'onde de spin arbitraire apparaissent dans un article de P.A.M. Dirac en 1936 [9] ; son objectif, comme pour l'équation d'onde de l'électron en 1928 [8], était de construire un système du premier ordre en temps et en espace de sorte que l'action des transformations de Lorentz sur ce système se calcule aisément. Ses équations sont ensuite affinées par M.Fierz et W.Pauli [10] de façon à prendre en compte la présence d'un champ électromagnétique. Leur travail est alors considérablement simplifié par W.Rarita et J.Schwinger [22] dans un article où ils traitent explicitement le cas du spin 3/2.

Les équations de champs de spin 3/2 n'ont pas un intérêt physique direct dans la mesure où on ne connaît pas, et il ne semble pas devoir exister, de particule de spin 3/2. Cependant, elles sont étroitement liées aux équations d'Einstein dans le vide et peuvent s'avérer un outil important pour l'analyse de ces dernières. Nous décrivons les formes de Dirac et de Rarita-Schwinger des équations de spin 3/2, ainsi que leur remarquable lien avec la relativité générale. Nous présentons ensuite quelques résultats analytiques obtenus pour ces équations.

Notations : Nous adoptons les notations de R.Penrose et W.Rindler [21] du formalisme des 2-spineurs et des indices abstraits. Les indices abstraits sont simplement une notation qui permet d'identifier clairement la nature des objets étudiés et de les manipuler plus simplement lors des calculs, ils n'impliquent aucune référence à une base de coordonnées locales ; les calculs et équations exprimés en termes d'indices abstraits sont parfaitement intrinsèques. Nous les représenterons par des lettres latines (minuscules pour les indices tensoriels et majuscules pour les indices spinoriels). Des parenthèses entourant un groupe d'indices de même type signifient que l'on symétrise le tenseur ou le spineur en ces indices ; des crochets au lieu de parenthèses désignent l'antisymétrisation. Sur une variété M lorentzienne de dimension 4 admettant une structure spinorielle que l'on fixera, on note $\mathbb{S}^{A'}$ le fibré des spineurs autoduaux ou positifs et $\mathbb{S}^{A}$ le fibré des spineurs négatifs ou anti-autoduaux. Le fibré tangent à M est alors $T^a M = \mathbb{S}^A \otimes \mathbb{S}^{A'}$; ainsi, un indice tensoriel a est un couple d'indices spinoriels, l'un primé, l'autre non : $a = AA'$. Les spineurs antisymétriques de Levi-Civita, ε_{AB}, $\varepsilon_{A'B'}$, définissent des formes symplectiques non dégénérées sur $\mathbb{S}^A$ et $\mathbb{S}^{A'}$ respectivement et permettent d'élever ou d'abaisser les indices spinoriels. De plus, ils constituent la forme spinorielle de la métrique : $g_{ab} = \varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'}$.

2 Les équations de champs sans masse de spin 3/2 et leurs relations avec les équations d'Einstein

Sous leur forme de Dirac, les équations de champs sans masse de spin 3/2 s'écrivent (voir R.Penrose [19])

$$\nabla^{AA'}\phi_{ABC} = 0 \tag{1}$$

où le champ est décrit par un spineur de valence 3 totalement symétrique $\phi_{ABC} = \phi_{(ABC)}$ et $\nabla_a = \nabla_{AA'}$ est la dérivée covariante étendue de façon à agir sur les champs spinoriels. Localement, on peut définir un premier potentiel $\sigma_{AB}^{C'}$ tel que

$$\sigma_{AB}^{C'} = \sigma_{(AB)}^{C'}, \ \nabla^{AA'}\sigma_{AB}^{C'} = 0, \qquad (2)$$
$$\phi_{ABC} = \nabla_{CC'}\sigma_{AB}^{C'}.$$

Ce potentiel possède la liberté de jauge

$$\sigma_{AB}^{C'} \longmapsto \sigma_{AB}^{C'} + \nabla_B^{C'}\pi_A, \text{ où } \nabla^{AA'}\pi_A = 0. \qquad (3)$$

On peut encore définir un second et un troisième potentiel, mais seuls le champ et le premier potentiel nous intéressent ici. Cette construction est valable en espace-temps plat ; nous allons voir qu'elle ne peut être conservée intégralement dans une géométrie courbe.

Le système (1) possède 6 équations pour 4 inconnues. Cette surdétermination permet de dériver l'équation de telle sorte que lorsqu'on commute les dérivées, on obtienne à nouveau une dérivée de l'équation. En espace-temps courbe, la commutation des dérivées covariantes fait apparaître des termes de courbure qui doivent être nuls si on veut que l'équation admette des solutions. De cette façon, on met en évidence des conditions sur la géométrie de l'espace-temps nécessaires à l'existence de solutions, on les appelle conditions de consistance. Pour l'équation (1), on a (voir R.Penrose et W.Rindler [21], Vol. 1, p. 366-370)

$$0 = \nabla_{A'}^B\nabla^{AA'}\phi_{ABC} = \nabla^{AA'}\nabla_{A'}^B\phi_{ABC} - \Psi_{DEFC}\phi^{DEF}.$$

La symétrie du spineur ϕ entraine que $\nabla_{A'}^B\phi_{ABC} = 0$ et on obtient donc

$$\Psi_{DEFC}\phi^{DEF} = 0$$

où Ψ_{ABCD} est le spineur de Weyl décrivant la courbure conforme de l'espace-temps. Ainsi, l'équation (1) est inconsistante en espace-temps courbe non conformément plat. Nous n'avons donc plus accès en espace-temps courbe à la notion de champ de spin 3/2 ; celui-ci doit être remplacé par un objet plus étrange : le premier potentiel modulo jauge. Considérons l'équation d'onde (2) pour le premier potentiel. Elle est surdéterminée avec 8 équations pour 6 inconnues. On applique la méthode précédente pour trouver les conditions de consistance (voir par exemple R.Penrose [20])

$$0 = \nabla_{A'}^B\nabla^{AA'}\sigma_{AB}^{C'} = \nabla^{AA'}\nabla_{A'}^B\sigma_{AB}^{C'} + 2\Phi^{ABC'}{}_{D'}\ \sigma_{AB}^{D'} = 2\Phi^{ABC'}{}_{D'}\ \sigma_{AB}^{D'}$$

où $\Phi_{AA'BB'} = \Phi_{ab}$ est la partie sans trace du tenseur de Ricci

$$-2\Phi_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{4}R,$$

$R = R_a{}^a$ étant la courbure scalaire, trace du tenseur de Ricci. Les conditions de consistance pour (2) sont donc $\Phi_{ab} = 0$. De plus, on cherche dans quels cas la liberté de jauge pour l'équation (2) est donnée par (3). Si on suppose qu'un potentiel de pure jauge vérifie (2), i.e.

$$\nabla^{AA'}\nabla_B^{C'}\pi_A = 0$$

on peut commuter les dérivées et utiliser le fait que π_A vérifie l'équation de Weyl $\nabla^{AA'}\pi_A = 0$. On obtient ainsi, en supposant $\Phi_{ab} = 0$,

$$0 = \nabla^{AA'}\nabla_B^{C'}\pi_A = \nabla_B^{C'}\nabla^{AA'}\pi_A + \frac{1}{8}R\varepsilon^{A'C'}\pi_B = \frac{1}{8}R\varepsilon^{A'C'}\pi_B.$$

On a donc cette propriété fondamentale pour le potentiel modulo jauge :

l'équation (2) est consistante et sa liberté de jauge est donnée par (3) si et seulement si $\mathbf{R_{ab} = 0}$, c'est-à-dire si la métrique est solution des équations d'Einstein dans le vide.

Cette propriété a été découverte par H.A.Buchdahl [1] en 1958 puis redécouverte par plusieurs auteurs dans le cadre des théories de supergravité où la forme retenue pour les équations de spin 3/2 est celle de Rarita-Schwinger. Un aspect particulièrement intéressant du travail de W.Rarita et J.Schwinger est qu'ils ne considéraient pas le champ de spin 3/2 lui-même mais le représentaient par le potentiel modulo jauge, c'est-à-dire précisément la quantité qui perdure en espace-temps d'Einstein. Leurs équations s'écrivent

$$\nabla^{A'}_{(A}\sigma^{A}_{B)A'} = 0, \;\; \nabla^{A}_{(A'}\sigma_{B')AB} = 0, \tag{4}$$

où le spineur $\sigma^{A'}_{AB}$ représentant le potentiel n'est pas supposé symétrique ; la liberté de jauge est donnée par

$$\sigma_{A'AB} \longmapsto \sigma_{A'AB} + \nabla_{AA'}\nu_B \tag{5}$$

ν_B étant un champ de spineurs quelconque. Le système (4) a huit équations pour huit inconnues, mais le nombre d'inconnues peut être réduit à six par le biais d'une transformation de jauge. Par exemple, on peut imposer que σ_{aB} soit orthogonal à un champ de vecteurs V^a donné, i.e. $V^a\sigma_{aB} = 0$, en choisissant pour ν_B l'intégrale de $V^a\sigma_{aB}$ le long des courbes intégrales de V^a.

Remarque 2.1 *On peut également effectuer une transformation de jauge qui rende $\sigma_{A'AB}$ symétrique en A, B. En effet, si on choisit ν_A solution de l'équation de Weyl avec source*

$$\nabla_{AA'}\nu^A = -\sigma_{A'B}{}^{B},$$

le spineur $\sigma_{A'AB} + \nabla_{AA'}\nu_B$ sera symétrique en A, B. Dans ce choix de jauge, les équations (4) et la liberté de jauge résiduelle s'écrivent

$$\nabla^{AA'}\sigma^{B'}_{AB} = 0,$$
$$\sigma^{B'}_{AB} \longmapsto \sigma^{B'}_{AB} + \nabla^{B'}_{A}\nu_B\,, \;\; \nabla^{BB'}\nu_B = 0\,.$$

Nous voyons donc que la forme de Dirac des équations de spin 3/2 n'est qu'une expression particulière des équations de Rarita-Schwinger pour le choix de jauge $\sigma^{B'}_{AB} = \sigma^{B'}_{(AB)}$ appelée jauge de Dirac.

Les équations de Rarita-Schwinger sont donc surdéterminées. Nous cherchons leurs conditions de consistance et les conditions pour qu'un champ de pure jauge soit solution des équations. On écrit tout d'abord qu'un champ de pure jauge doit vérifier (4) :

$$\nabla^{A'}_{(A}\nabla_{B)A'}\nu^B = \frac{1}{2}\left[\nabla^{A'}_{A}, \nabla_{BA'}\right]\nu^B == -\frac{1}{8}R\nu_A,$$
$$\nabla^{A}_{(A'}\nabla_{B')A}\nu_B = \frac{1}{2}\left[\nabla^{A}_{A'}, \nabla_{B'A}\right]\nu_B = -\Phi_{A'B'B}{}^{C}\nu_C.$$

En conséquence, on doit avoir $R = 0$ et $\Phi_{ab} = 0$, c'est-à-dire $R_{ab} = 0$. Cette condition étant vérifiée, il suffit de montrer que pour une jauge particulière, les équations sont consistantes, ce qu'on a déjà établi dans la jauge de Dirac.

Ainsi, les conditions de consistance des équations de Rarita-Schwinger et de leur liberté de jauge sont les équations d'Einstein dans le vide.

Il existe donc un lien remarquable entre les équations de spin 3/2 et les équations d'Einstein. Mais cette relation ne s'arrête pas là : la connexion spinorielle $\{\nabla_a o_B, \nabla_a \iota_B\}$ (où $\{o^A, \iota^A\}$ est une spin-frame, c'est-à-dire un couple de spin-vecteurs tels que $o_A \iota^A = 1$) est un couple de champs de spin 3/2 de pure jauge. Sur une hypersurface de Cauchy Σ, la norme L^2 de ces champs pour la mesure induite par la métrique g est exactement l'énergie ADM de l'espace-temps. Ceci donne une forte motivation à l'étude des équations de Rarita-Schwinger. En effet, on a des inégalités a priori sur l'énergie d'une métrique d'Einstein grâce aux estimations que l'on peut obtenir sur les champs de spin 3/2. L'analyse des équations de Rarita-Schwinger a ainsi des applications directes à l'analyse des équations d'Einstein.

Une autre propriété remarquable des équations de spin 3/2 est qu'un twisteur en espace-temps plat peut être interprêté comme une charge de champ de spin 3/2. Ceci a amené R.Penrose [20] à proposer que les équations de Rarita-Schwinger puissent fournir un moyen de définir des twisteurs en espace-temps d'Einstein.

Enfin, les équations de spin 3/2 constituent une sorte de paire de Lax pour les équations d'Einstein dans le vide, ce qui laisse penser que l'on pourrait développer une transformée de scattering inverse pour les équations d'Einstein (cette transformée ne pourrait pas amener à l'intégrabilité complète des équations, celles-ci possédant l'énergie ADM pour seule constante du mouvement).

Cette structure très riche des équations de champs de spin 3/2 est l'origine des théories de super-gravité et a provoqué plus récemment l'intérêt des spécialistes de systèmes intégrables et de théorie des twisteurs. Cependant, elles n'ont pas été étudiées par des techniques d'analyse des systèmes hyperboliques en dehors du cadre de la super-gravité. Nous présentons ici les premières bases d'une telle analyse.

3 Une approche analytique des équations de spin 3/2

On se place sur une variété d'Einstein, asymptotiquement plate, globalement hyperbolique. Nous commençons par définir précisément la géométrie de l'espace-temps dans un esprit analogue à [4] ; nous décrivons des classes d'espaces-temps asymptotiquement plats, dans le cadre d'une décomposition temps/espace de la métrique, en termes d'espaces de Sobolev à poids.

3.1 Une définition générale de classes d'espaces-temps asymptotiquement plats globalement hyperboliques en termes d'espaces de Sobolev à poids

Nous considérons une variété Lorentzienne de dimension 4 $(\mathcal{M}, g)$, globalement hyperbolique (c'est-à-dire admettant une hypersurface de Cauchy) et asymptotiquement plate. D'après les travaux de R.P.Geroch [11], [12], l'hyperbolicité globale implique deux propriétés essentielles :

1. l'existence d'une structure spinorielle ; nous en choisissons une.

2. l'existence d'une fonction de temps t globale sur $\mathcal{M}$. Ses hypersurfaces de niveau Σ_t, $t \in \mathbb{R}$, constituent une foliation de $\mathcal{M}$ par des hypersurfaces de Cauchy qui sont toutes difféomorphes (avec un degré de régularité dépendant de celle de g) à une variété régulière Σ de dimension 3. Nous identifierons donc $\mathcal{M}$ au produit cartésien $\mathbb{R} \times \Sigma$ et g sera considérée comme une fonction à valeurs tensorielles sur $\mathbb{R} \times \Sigma$.

Par ailleurs, le fait que $(\mathcal{M}, g)$ soit supposée asymptotiquement plate entraîne qu'en dehors d'un compact, Σ doit être difféomorphe au complémentaire d'une boule dans $\mathbb{R}^3$.

La foliation va nous servir à effectuer une décomposition 1+3 (ou temps/espace) de la métrique. On introduit le champ de vecteurs temporel T^a pointant vers le futur et orthogonal à Σ_t, que l'on normalise par

$$T_a T^a = 2.$$

Ce choix permet d'assurer l'existence d'une base spinorielle unitaire $\{o^A, \iota^A\}$ dans laquelle l'expression spinorielle $T^{AA'}$ de T^a soit simplement la matrice identité d'ordre 2, i.e. $T^{AA'} = o^A\bar{o}^{A'} + \iota^A\bar{\iota}^{A'}$. La métrique g peut être décomposée en parties spatiale et temporelle de la façon suivante

$$g = \frac{1}{2}N^2 dt^2 - h \tag{6}$$

où la fonction N ("lapse function" en anglais) est définie par $T_a dx^a = N dt$ et h, une métrique riemannienne sur Σ_t, est la partie de g orthogonale à T^a.

Remarque 3.1 *Un aspect important de la décomposition orthogonale temps/espace est que sous la forme (6), les métriques indépendantes de t sont statiques. En effet, supposons que la métrique g sous forme décomposée soit indépendante de t, alors $\partial/\partial t$ est un champ de vecteurs de Killing sur $\mathcal{M}$, temporel et orthogonal à la famille d'hypersurfaces spatiales de la foliation, car colinéaire à T^a; g est donc statique.*

De la même manière, on décompose la dérivée covariante ∇_a sur $(\mathcal{M}, g)$ en parties temporelle et spatiale

$$\nabla_a = \mathrm{D}_a + \frac{1}{2}T_a\nabla_T, \tag{7}$$

D_a étant la partie de ∇_a orthogonale à T^a, $T^a\mathrm{D}_a = 0$, et $\nabla_T = T^a\nabla_a$. En utilisant la forme spinorielle $T^{AA'}$ du vecteur T^a pour convertir les indices primés en indices non primés et inversement, on définit une forme légèrement modifiée de la partie spatiale de la dérivée covariante

$$\mathrm{D}_{AB} = T_A{}^{A'}\mathrm{D}_{BA'}\ , \quad \mathrm{D}_{A'B'} = T_{A'}{}^{A}\mathrm{D}_{B'A}. \tag{8}$$

Remarque 3.2 D_a *est la restriction de ∇ tangentiellement à Σ_t. Elle diffère de la connexion de Levi-Civita associée à $(\Sigma_t, h(t))$ par une combinaison de la courbure extrinsèque, comme le montre la formule fondamentale $\mathrm{D}_a T_b = K_{ab}$ où $T^a K_{ab} = 0$ et $K_{ab} = K_{(ab)} = \sqrt{2}\times$ courbure extrinsèque.*

La normalisation de T^a entraîne que $T_{A'}{}^{A}T_{A}{}^{B'} = -\varepsilon_{A'}{}^{B'}$. Ainsi, convertir un indice deux fois produit un changement de signe. D'autre part l'identité $\mathrm{D}_a T_b = K_{ab}$ montre que la conversion d'indice ne commute pas avec D_a alors qu'elle commute avec la connexion de Levi-Civitta.

Pour ce type de géométrie, nous construisons un cadre fonctionnel permettant de décrire la notion d'espace-temps asymptotiquement plat. Les espaces de Sobolev à poids sont particulièrement bien adaptés à une telle description dans la mesure où ils contiennent des informations à la fois sur la régularité des fonctions et sur leur décroissance à l'infini. Les classes d'espaces-temps asymptotiquement plats que nous définirons sont telles que la métrique soit continûment dérivable en temps jusqu'à un certain ordre à valeurs dans un espace de Sobolev à poids. Il nous faut donc définir des espaces de type Sobolev sur Σ sans référence explicite à la métrique g que nous voulons décrire. Dans ce but, on munit Σ d'une métrique riemannienne régulière $\tilde{h}$, euclidienne en dehors d'un compact. On notera $\tilde{\mathrm{D}}$ et $\mathrm{dVol}_{\tilde{h}}$ la dérivée covariante et la mesure de volume sur Σ associées à $\tilde{h}$, et $<,>$ sera le produit scalaire induit par $\tilde{h}$ sur les tenseurs et spineurs en un point. Nous utiliserons les quatre familles d'espaces fonctionnels suivantes :

- $\mathcal{C}^k(\Sigma)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$; l'ensemble des fonctions k fois continûment dérivables sur Σ. $\mathcal{C}_0^k(\Sigma)$ sera le sous-espace des fonctions à support compact et $\mathcal{C}_b^k(\Sigma)$ le sous-espace des fonctions uniformément bornées sur Σ ainsi que toutes leurs dérivées.

- Espaces de Sobolev : $H^s(\Sigma)$, $s \in \mathbb{N}$; le complété de $\mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$ pour la norme
$$\|f\|_{H^s(\Sigma)} = \left\{ \sum_{p=0}^{s} \int_\Sigma \left\langle \tilde{\mathrm{D}}^p f, \tilde{\mathrm{D}}^p f \right\rangle \mathrm{dVol}_{\tilde{h}} \right\}^{1/2} . \tag{9}$$
$H^0(\Sigma)$ sera noté $L^2(\Sigma)$.

- Espaces de Sobolev à poids : $H_\delta^s(\Sigma)$, $s \in \mathbb{N}$, $\delta \in \mathbb{R}$; le complété de $\mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$ pour la norme
$$\|f\|_{H_\delta^s(\Sigma)} = \left\{ \sum_{p=0}^{s} \int_\Sigma \left(1 + r^2\right)^{\delta+p} \left\langle \tilde{\mathrm{D}}^p f, \tilde{\mathrm{D}}^p f \right\rangle \mathrm{dVol}_{\tilde{h}} \right\}^{1/2} , \tag{10}$$
où $r(x)$ est la $\tilde{h}$-distance de x à un point fixé $O \in \Sigma$ (la définition est indépendante du choix de O). $H_\delta^0(\Sigma)$ sera noté $L_\delta^2(\Sigma)$.

- $\mathcal{C}_\delta^k(\Sigma)$, $k \in \mathbb{N}$, $\delta \in \mathbb{R}$; l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}^k(\Sigma)$ pour lesquels la norme suivante est finie :
$$\|f\|_{\mathcal{C}_\delta^k(\Sigma)} = \sup_{x \in \Sigma} \sum_{l=0}^{k} \left\{ \left(1 + r^2\right)^{\delta+l} \left\langle \tilde{\mathrm{D}}^l f, \tilde{\mathrm{D}}^l f \right\rangle \right\}^{1/2} . \tag{11}$$

Nous définissons les classes d'espaces-temps asymptotiquement plats que nous considérerons

Définition 3.1 *On dit que la métrique g sur $\mathbb{R} \times \Sigma$ est de classe (k, δ), $k \in \mathbb{N}^*$, $\delta \in \mathbb{R}$ si*
$$g - \left(1 - \rho(x)\frac{m}{r}\right)(dt \otimes dt - \tilde{h}) \in \mathcal{C}^l\left(\mathbb{R}_t\ ; H_\delta^{k-l}(\Sigma)\right),\ \forall l\ ;\ 0 \le l \le k$$
(où m est une matrice 4×4 constante, ρ est une fonction de troncature sur Σ telle que $\rho \equiv 0$ au voisinage de O et $\rho \equiv 1$ en dehors d'un compact) et si de plus g vérifie la condition de non-dégérescence

(H) *Il existe des fonctions continues strictement positives sur $\mathbb{R}$: C_1, C_2 telles que $\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \Sigma$, la fonction N et les valeurs propres $\lambda_i(t, x)$, $i = 1, 2, 3$, de $h(t, x)$ considérée comme une forme symétrique relativement à $\tilde{h}$ vérifient*
$$C_1(t) \le N(t, x) \le C_2(t), \quad C_1(t) \le \lambda_i(t, x) \le C_2(t).$$

L'intersection de toutes les classes (k, δ), $k \in \mathbb{N}^*$, sera notée (∞, δ). Bien entendu, la définition des classes (k, δ) est indépendante du choix de $\tilde{h}$.

L'inclusion continue (voir Y.Choquet-Bruhat et D.Christodoulou [4])
$$H_\delta^k(\Sigma) \hookrightarrow \mathcal{C}_{\delta'}^{k-2}(\Sigma),\ \delta' < \delta + 3/2,\ k \ge 2 \tag{12}$$
donne une estimation sur la vitesse de décroissance à l'infini des fonctions appartenant à un espace de Sobolev à poids et de leurs dérivées. On voit que si g est de classe (k, δ), $k \ge 2$, $\delta > -3/2$, alors
$$g - \left(1 - \rho(x)\frac{m}{r}\right)(dt^2 - \tilde{h}) \in \mathcal{C}^l\left(\mathbb{R}_t\ ; \mathcal{C}_{\delta'}^{k-l-2}(\Sigma)\right),\ \forall l, \delta'\ ;\ 0 \le l \le k-2,\ \delta' < \delta + 3/2.$$

Plus simplement, une métrique de classe (k, δ) sera asymptotiquement plate dès que $k \geq 2$ et $\delta > -3/2$ dans le sens où g sera continue sur $\mathbb{R} \times \Sigma$ et tendra vers la métrique de Minkowski à l'infini spatial. De telles métriques seront appelées faiblement asymptotiquement plates. Afin de donner un sens plus physique à la notion de métrique asymptotiquement plate, on impose en général

$$g - \left(1 - \frac{m}{r}\right)(dt^2 - \tilde{h}) = O\left(r^{-3/2}\right),\ \tilde{\mathrm{D}}^l\left(g - \left(1 - \frac{m}{r}\right)(dt^2 - \tilde{h})\right) = O\left(r^{-3/2-l}\right),\ r \to +\infty.$$

Ceci correspond à $\delta > 0$ comme c'est les cas pour les espaces-temps de type trou noir tels que Schwarzschild ou Kerr. On parlera d'espace-temps asymptotiquement plat au sens fort. Parfois, des versions plus faibles sont considérées, comme par exemple dans D.Christodoulou et S.Klainerman [6], où on requiert simplement

$$g - \left(1 - \frac{m}{r}\right)(dt^2 - \tilde{h}) = o\left(r^{-1}\right),\ \tilde{\mathrm{D}}^l\left(g - \left(1 - \frac{m}{r}\right)(dt^2 - \tilde{h})\right) = o\left(r^{-l-1}\right),\ r \to +\infty,$$

ce qui correspond à $\delta > -1/2$. Pour toutes ces métriques asymptotiquement plates (même faiblement) et continues, la seule information qu'apporte l'hypothèse (H) est que la métrique est non dégénérée.

3.2 Champs de spin 3/2 en espace-temps d'Einstein dans le vide, asymptotiquement plat

La forme de Dirac des équations de spin 3/2 est plus simple que celle de Rarita-Schwinger et il est assez naturel de s'intéresser à elle en premier lieu. En utilisant une décomposition temps/espace, on peut écrire (2) comme d'une part un système d'évolution constitué de six équations, et d'autre part des contraintes (deux équations faisant intervenir uniquement des dérivées spatiales), qui constituent la difficulté essentielle. Le problème de Cauchy global compatible avec les contraintes est résolu pour ces équations en métrique de Schwarzschild [17] et on peut envisager d'établir un résultat analogue dans un espace-temps d'Einstein asymptotiquement plat général. Cependant, on s'apperçoit que la quantité conservée, donnée par la 3-forme de Rarita-Schwinger, n'est pas définie positive dans la jauge de Dirac. Une étude précise de ce phénomène a été effectuée par A.Sen [23] ; à l'aide d'une décomposition temps/espace de la forme de Dirac des équations de spin 3/2, il a montré que les parties temporelle et spatiale du potentiel σ contribuent avec des signes opposés à la quantité conservée. De plus ces deux parties sont couplées par les équations d'évolution. Ainsi, même dans les cas où on peut rendre la 3-forme de Rarita-Schwinger définie positive à un instant quelconque par une transformation de jauge qui annule la partie temporelle de σ, elle ne peut le rester pour tous temps. Il paraît donc difficile de développer une théorie du scattering pour la forme de dirac des équations de spin 3/2. Cependant, cette forme a l'avantage d'être relativement simple. De ce fait, elle pourra être préférable à d'autres pour l'étude de certains problèmes, comme par exemple l'analyse du comportement asymptotique des solutions par des méthodes de compactification conforme, où la régularité de la géométrie à l'infini permet de définir des traces sans qu'il soit nécessaire d'avoir une norme conservée ou estimée uniformément.

Cet aspect non défini positif de la quantité conservée est essentiellement dû au choix de jauge de Dirac. En effet, pour les équations de Rarita-Schwinger, la quantité conservée est définie positive sur le potentiel modulo jauge. Afin de remédier à cet inconvénient de la forme de Dirac, nous effectuons un autre choix de jauge, analogue à celui employé par Witten dans sa preuve du théorème d'énergie positive [24] ; ce choix fixe totalement la liberté de jauge et aboutit à une formulation des équations pour laquelle la quantité conservée est définie positive. Nous avons ainsi un cadre naturel d'espace de Hilbert dans lequel résoudre le problème de Cauchy. Cependant, un potentiel non local contenant l'inverse de l'opérateur de Witten apparaît dans nos équations et en complique légèrement l'analyse. Ce travail, que nous détaillons maintenant, a été réalisé en collaboration avec L.Mason [15].

Sur une variété (M, g) de dimension 4, lorentzienne, solution des équations d'Einstein dans le vide et asymptotiquement plate, que l'on suppose appartenir à une des classes définies dans le paragraphe précédent, on considère les équations de Rarita-Schwinger

$$\nabla^{A'}_{(A}\sigma_{B)A'}{}^{B} = 0\,, \qquad \nabla^{A}_{(A'}\sigma_{B')AB} = 0\,, \tag{13}$$

avec leur liberté de jauge $\sigma_{AA'B} \mapsto \sigma_{AA'B} + \nabla_{AA'}\nu_B$. Nous effectuons une décomposition $1+3$ de ces équations et c'est sur la forme décomposée de $\sigma_{AA'B}$ que nous définirons notre choix de jauge. La décomposition s'écrit

$$\sigma_{bA} = \frac{1}{N}\alpha_A T_b + \phi_{bA}\,,\ \text{où}\ T^b\phi_{bA} = 0\,,$$

c'est-à-dire que α est la partie temporelle de σ et ϕ sa partie spatiale. La condition de jauge que nous choisissons est la symétrie de $\phi_{A'AB}$ en A, B, i.e.

$$\phi_{AA'}{}^{A} = 0. \tag{14}$$

Avec ce choix de jauge, les équations (13) se séparent en trois parties irréductibles, deux contenant uniquement des dérivées tangentielles à Σ_t et une troisième qui définit l'équation d'évolution de ϕ_{aB}. La première équation spatiale a deux composantes et décrit les contraintes sur ϕ qui devront être conservées par l'évolution :

$$\mathrm{D}^{AB}\phi_{A'AB} = 0. \tag{15}$$

La seconde est une équation elliptique déterminant α en fonction de ϕ

$$2\mathrm{D}_{AB}\alpha^B = N\nabla^{BB'}\phi_{ABB'} = N\left(T^{C'}_{A}K_{CC'BB'}\phi^{BB'C} + N^b\phi_{bA}\right) \tag{16}$$

où $N_{AA'} = \mathrm{D}^{AA'}\mathrm{Log}N = -\frac{1}{2}\nabla_T T_{AA'}$. Sur les espaces fonctionnels avec lesquels nous travaillons, l'opérateur de Witten $\mathcal{D} : \alpha_A \longmapsto \mathrm{D}_A{}^B\alpha_B$ est inversible (ce résultat est énoncé dans la proposition 3.1 qui généralise les théorèmes d'isomorphismes obtenus par T.Parker et C.H.Taubes dans [18]). Nous pouvons donc reformuler l'équation précédente en inversant l'opérateur de Witten

$$\alpha_A = \frac{1}{2}(\mathrm{D}^{-1})^D_A\left\{N\left(T^{C'}_{D}K_{CC'BB'}\phi^{BB'C} + N^b\phi_{bD}\right)\right\}, \tag{17}$$

la notation $\nu_A = (\mathrm{D}^{-1})^B_A\mu_B$ est équivalente à $\mu_A = \mathrm{D}_{AB}\nu^B$ sur les espaces où $\mathcal{D}$ est inversible. L'équation d'évolution porte sur $\phi_{ABC} = T_A{}^{A'}\phi_{A'BC}$ et a la forme

$$\nabla_T\phi_{ABC} = \mathrm{D}^D_{(A}\phi_{BC)D} + N^D_{(A}\phi_{BC)D} - K_{(AB}{}^{EF}\phi_{C)EF} + \frac{1}{6}K\phi_{ABC} - \frac{2}{N}\mathrm{D}_{(AB}\alpha_{C)}, \tag{18}$$

où $N_{AB} = T^{A'}_{A}N_{BA'}$ En reportant (17) dans (18), nous obtenons une équation d'évolution avec un terme non local. La forme de équations de Rarita-Schwinger que nous allons étudier est constituée de cette équation non locale et des contraintes :

$$\begin{aligned}\nabla_T\phi_{ABC} \quad = \quad & \mathrm{D}^D_{(A}\phi_{BC)D} + N^D_{(A}\phi_{BC)D} - K_{(AB}{}^{EF}\phi_{C)EF} + \frac{1}{6}K\phi_{ABC} \\ & -\frac{1}{N}\mathrm{D}_{(AB}(\mathrm{D}^{-1})^D_{C)}\{NK_{DEFG}\phi^{EFG} + N^b\phi_{bD}\},\end{aligned} \tag{19}$$

$$\mathrm{D}^{AB}\phi_{A'AB} = 0. \tag{20}$$

Notre choix de jauge réduit totalement la liberté de jauge des équations de Rarita-Schwinger, c'est-à-dire qu'il n'y a plus de liberté de jauge résiduelle.

La 3-forme de Rarita-Schwinger

$$-i\sigma_A \wedge \bar{\sigma}_{A'} \wedge \mathrm{d}x^a \tag{21}$$

est fermée si σ est solution de (13). Pour notre jauge de type Witten, si on intègre (21) sur une hypersurface Σ_t, on obtient

$$\int_{\Sigma_t} i\sigma_A \wedge \bar{\sigma}_{A'} \wedge \mathrm{d}x^{AA'} = \int_{\Sigma_t} -\phi_{aB}\bar{\phi}^a_{B'}T^{BB'}\mathrm{d}\,\mathrm{Vol}_{\Sigma_t}$$

où $\mathrm{d}\,\mathrm{Vol}_{\Sigma_t}$ est la mesure de volume dépendante de t induite sur Σ_t par la métrique g. Le signe "-" dans l'intégrale est dû au fait qu'une métrique lorentzienne est définie négative sur les vecteurs spatiaux. Nous déduisons de l'égalité ci-dessus que la quantité conservée pour la forme que nous venons d'obtenir des équations de spin 3/2 est

$$< \phi, \phi >= -\int_{\Sigma_t} \phi_{aB}\bar{\phi}^a_{B'}T^{BB'}\mathrm{d}\,\mathrm{Vol}_{\Sigma_t}. \tag{22}$$

C'est un produit scalaire défini positif sur les ϕ_{aB} tels que $T^a\phi_{aB} = 0$ et $\phi_{AA'}{}^A = 0$. Si nous effectuons un choix de spin-frame $\{o^A, \iota^A\}$ telle que $\iota^A = T^{AA'}\bar{o}_{A'}$ (ce qui est garanti par $T^{AA'} = o^A\bar{o}^{A'} + \iota^A\bar{\iota}^{A'}$), le produit scalaire est diagonalisé et nous identifions à chaque instant l'espace des potentiels de spin 3/2 d'énergie finie à $L^2(\Sigma_t;\mathbb{C}^4)$. $L^2(\Sigma_t;\mathbb{C}^4)$ est isométrique à $L^2(\Sigma;\mathbb{C}^4)$, l'équivalence des normes (l'une associée à la métrique $h(t)$, l'autre à $\tilde{h}$) étant uniforme sur tout intervalle de temps borné. Les solutions d'énergie finie seront donc les éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_t; L^2(\Sigma;\mathbb{C}^4))$.

Remarque 3.3 *Il est important de noter que la mesure de volume intervenant dans la définition de la quantité conservée est* $\mathrm{dVol}_{h(t)}$*, associée à la métrique dépendante du temps* $h(t)$ *sur* Σ*. Ainsi, la conservation de cette quantité ne doit pas être comprise comme une évolution unitaire sur un espace de Hilbert fixe, à moins de multiplier à chaque instant le potentiel par la densité correspondant à la mesure* $\mathrm{dVol}_{h(t)}$*.*

Cependant, si l'espace-temps admet une foliation maximale, i.e. une foliation pour laquelle la trace de la courbure extrinsèque est nulle, la mesure de volume $\mathrm{dVol}_{h(t)}$ *sera alors constante au cours du temps et l'évolution sera effectivement unitaire sur l'espace* $L^2(\Sigma_0)$ *défini à l'aide de la mesure* $\mathrm{dVol}_{h(0)}$ *par exemple.*

Nous résolvons le problème de Cauchy pour l'équation (19) indépendamment des contraintes, puis nous établissons la conservation des contraintes au cours de l'évolution. Si nous exprimons l'équation (19) en fonction des composantes de ϕ relativement à une spin-frame unitaire ($o_A\iota^A = 1$, $\iota^A = T^{AA'}\bar{o}_{A'}$) et dans une base de coordonnées locales, nous obtenons un système de la forme

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = iA(t)\phi + Q_1(t)\phi + Q_2(t)\phi, \quad iA(t) = \sum_{i=1}^{3} A^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

les A^i étant des matrices hermitiennes relativement au produit scalaire $(\phi,\psi) = \phi_{aB}\bar{\psi}^a_{B'}T^{BB'}$ et Q_1 et Q_2 des termes d'ordre 0. Plus précisément, $iA(t)$ est la partie homogène d'ordre 1 dans $N\mathrm{D}^D_{(A}\phi_{BC)D}$, Q_1 est le potentiel local de l'équation

$$Q_1(t)\phi = N\left\{N^D_{(A}\phi_{BC)D} - K_{(AB}{}^{EF}\phi_{C)EF} + \frac{1}{6}K\phi_{ABC} + \text{ (coefficients de spin) } \phi\right\},$$

et Q_2 est le terme non local

$$Q_2(t)\phi = -\mathrm{D}_{(AB}(\mathrm{D}^{-1})_{C)}^{D}\{NK_{DEFG}\phi^{EFG} + N^b\phi_{bD}\}.$$

Nous travaillons avec des métriques asymptotiquement plates de classe (k,δ), $k \geq 4$, $\delta > -3/2$. Les coefficients des matrices A^i sont ceux de la métrique g, d'où

$$A^i \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}_t; H_\delta^{k-l}(\Sigma)) \hookrightarrow \mathcal{C}^l(\mathbb{R}_t; \mathcal{C}_b^{k-l-2}(\Sigma)), \quad 0 \leq l \leq k-2$$

et le potentiel Q_1 est constitué de dérivées spatiales et temporelles de g, ce qui implique

$$Q_1 \in \mathcal{C}^l(\mathbb{R}_t; H_\delta^{k-l-1}(\Sigma)) \hookrightarrow \mathcal{C}^l(\mathbb{R}_t; \mathcal{C}_b^{k-l-3}(\Sigma)), \quad 0 \leq l \leq k-3.$$

Les théorèmes de T.Kato [13] permettent de résoudre le problème de Cauchy pour l'équation homogène

$$\partial_t \phi = iA(t)\phi$$

lorsque la topologie est triviale et que Σ s'identifie donc à $\mathbb{R}^3$. La propagation à vitesse finie des solutions s'obtient facilement pour cette équation à l'aide d'une estimation d'énergie et les hypothèses sur la métrique g entraînent que la vitesse de propagation est uniformément bornée en espace et localement uniformément en temps. Lorsque la topologie de Σ est non triviale, nous utilisons le contrôle uniforme sur la vitesse de propagation, et la topologie nécessairement finie de Σ, pour localiser le problème dans les domaines de dépendance des éléments d'un recouvrement fini de Σ par des ouverts de topologie triviale. Le contrôle uniforme en espace et localement uniforme en temps assure également que lorsqu'on fait évoluer depuis un instant t chaque ouvert du recouvrement dans son domaine de dépendance, on conserve durant un temps $\varepsilon_t > 0$ un recouvrement de Σ par des ouverts de topologie triviale. De plus, ε_t est minoré uniformément par un nombre positif sur tout intervalle de temps borné. Tout ceci nous permet de résoudre le problème de Cauchy global pour l'équation homogène en topologie quelconque.

Le potentiel Q_1 étant un opérateur borné sur $H^l(\Sigma)$, $0 \leq l \leq k-3$, on le traite facilement par une méthode de point fixe. Nous montrons dans la proposition suivante qu'il en est de même pour Q_2. Nous avons besoin d'introduire des espaces fonctionnels un peu étranges : pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, nous définissons l'espace $\mathbb{H}^k(\Sigma)$ comme le complété de $\mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$ pour la norme

$$\|f\|^2_{\mathbb{H}^k(\Sigma)} = \|f\|^2_{L^2_{-1}(\Sigma)} + \|\tilde{\mathrm{D}}f\|^2_{H^{k-1}(\Sigma)} = \int_\Sigma \left\{ (1+r^2)^{-1}|f|^2 + \sum_{p=1}^{k} \left\langle \tilde{\mathrm{D}}^p f, \tilde{\mathrm{D}}^p f \right\rangle \right\} \mathrm{dVol}_{\tilde{h}} . \quad (23)$$

Proposition 3.1 *Si la métrique est de classe (k,δ), $k \geq 4$, $\delta > -3/2$, les deux opérateurs définissant le potentiel non local satisfont aux propriétés suivantes :*

1) Pour $1 \leq p \leq k-2$, $0 \leq l \leq p-1$, $l,p \in \mathbb{Z}$,

$$\left(\psi_C \longmapsto \mathrm{D}_{(AB}\psi_{C)}\right) \in \mathcal{C}^l\left(\mathbb{R}_t; \mathcal{L}\left(\mathbb{H}^{p-l}(\Sigma;\mathbb{C}^2); H^{p-l-1}(\Sigma;\mathbb{C}^4)\right)\right).$$

2) Pour $1 \leq p \leq k-2$, $0 \leq l \leq p-1$, $l,p \in \mathbb{Z}$,

$$\left(\psi_D \longmapsto \mathrm{D}_C^D\psi_D\right) \in \mathcal{C}^l\left(\mathbb{R}_t; \mathcal{L}\left(\mathbb{H}^{p-l}(\Sigma;\mathbb{C}^2); H^{p-l-1}(\Sigma;\mathbb{C}^2)\right)\right)$$

et cet opérateur (l'opérateur de Witten) est un isomorphisme de $\mathbb{H}^p(\Sigma;\mathbb{C}^2)$ sur $H^{p-1}(\Sigma;\mathbb{C}^2)$, $1 \leq p \leq k-2$, à chaque instant $t \in \mathbb{R}$.

En conséquence, l'opérateur non local $\psi_D \longmapsto \mathrm{D}_{(AB}(\mathrm{D}^{-1})_{C)}^D\psi_D$ intervenant dans la définition de Q_2 appartient aux espaces fonctionnels suivants pour $1 \leq p \leq k-2$, $0 \leq l \leq p-1$, $l,p \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{C}^l\left(\mathbb{R}_t; \mathcal{L}\left(H^{p-l-1}(\Sigma;\mathbb{C}^2); H^{p-l-1}(\Sigma;\mathbb{C}^4)\right)\right). \quad (24)$$

Nous avons donc le théorème concernant le problème de Cauchy pour (19).

Théorème 1 *Si la métrique g est de classe (k,δ), $k \geq 4$, $\delta > -3/2$, pour $\phi_0 \in H^m(\Sigma;\mathbb{C}^4)$, $0 \leq m \leq k-3$ et $s \in \mathbb{R}$, l'équation (19) admet une unique solution*

$$\phi_s \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}_t; H^m(\Sigma;\mathbb{C}^4)\right) ,$$

telle que

$$\phi_s(s) = \phi_0 \, , \; \phi_s \in \mathcal{C}^l\left(\mathbb{R}_t; H^{m-l}(\Sigma;\mathbb{C}^4)\right) , \; 0 \leq l \leq m.$$

Le problème de Cauchy étant résolu, nous construisons le projecteur sur le sous-espace des contraintes. On note $\mathbb{D}$ l'opérateur des contraintes sur une hypersurface Σ_t, $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{D} : \phi = \phi_{AA'B} \longmapsto \mathbb{D}\phi = \mathrm{D}^{AB}\phi_{AA'B}. \tag{25}$$

Théorème 2 *Si la métrique g est de classe $(4,\delta)$, $\delta > -3/2$, l'opérateur*

$$P(t) = 1 - \mathbb{D}^* \left(\mathbb{D}\mathbb{D}^*\right)^{-1} \mathbb{D} \tag{26}$$

est bien défini et borné sur $L^2(\Sigma\ ;\mathbb{C}^4)$. C'est le projecteur orthogonal sur le sous-espace fermé de $L^2(\Sigma\ ;\mathbb{C}^4)$:

$$\mathcal{K}_t = \left\{\phi \in L^2(\Sigma\ ;\mathbb{C}^4); \mathbb{D}\phi = 0\right\} \tag{27}$$

et conséquemment $\|P(t)\| = 1$ si $\mathcal{K}_t \neq \{0\}$.

La conservation des contraintes, exprimée par la propriété

$$\left[\partial_t - iA(t) - Q_1(t) - Q_2(t)\, , P(t)\right] = 0 \tag{28}$$

est équivalente aux équations d'Einstein dans le vide. On voit donc ici le rôle joué par le projecteur, analogue à celui de l'opérateur elliptique dans la paire de Lax pour des systèmes intégrables usuels.

4 Perspectives

Les résultats analytiques présentés ici ne sont pas optimaux et devront être améliorés de deux manières:

- *La régularité maximale des solutions en fonction de la régularité de la métrique.* Pour une métrique de classe (k,δ), nous obtenons l'existence de solutions à valeurs dans H^{k-3} au mieux. Cette perte de trois degrés de régularité s'explique premièrement par la nature des équations ; il est normal que les solutions perdent un degré de régularité par rapport à la métrique du fait que les potentiels sont des dérivées premières de g. L'autre origine de cette perte de régularité est purement technique : l'utilisation d'injections de Sobolev entraîne la perte de deux degrés de régularité. La connexion spinorielle ayant une régularité d'un cran inférieure à celle de la métrique, il est indispensable de pouvoir travailler avec des solutions dans H^{k-1} pour une métrique de classe (k,δ), si nous voulons utiliser le fait que la connexion est un champ de spin 3/2 pour obtenir des estimations a priori sur la métrique.

- *La décroissance à l'infini des champs de spin* 3/2. Nous avons spécifié nos hypothèses sur la métrique en termes d'espaces de Sobolev à poids car ils permettent de contrôler la décroissance à l'infini aussi bien que la régularité. On s'attend naturellement à relier la décroissance à l'infini de la connexion à celle de la métrique, ce qui suggère de résoudre le problème de Cauchy pour l'équation (19) dans des espaces de Sobolev à poids. Ceci deviendra crucial si nous souhaitons extraire de la connexion des informations sur la métrique. Il n'est pas envisageable de contrôler ainsi la décroissance de la métrique sans connaître celle de la connexion. Le traîtement du terme non local serait en fait plus facile dans des espaces de Sobolev à poids car l'opérateur de Witten est un isomorphisme naturel entre de tels espaces. La difficulté sera cependant de montrer de tels résultats d'isomorphisme dans des espaces de régularité suffisante pour ne perdre qu'un degré de régularité par rapport à la métrique.

Ces améliorations sont obtenues de façon générale pour des systèmes symétriques hyperboliques sur des variétés asymptotiquement plates dans un article en cours de rédaction sur l'équation de Dirac dans des espaces-temps généraux. Cependant, elles ne s'appliquent directement qu'à la partie locale de l'équation (19) et il nous reste à montrer que le terme non local est borné sur H^{k-1} pour une métrique de classe (k, δ), $\delta > -3/2$.

Les recherches peuvent être poursuivies dans au moins deux directions :

1. **Les équations de Rarita-Schwinger comme outil d'analyse des équations d'Einstein.** Une application directe à la résolution du problème de Cauchy global pour les équations d'Einstein semble encore lointaine. La conservation de l'énergie de l'espace-temps (i.e. de la norme L^2 de la connexion) nous donne un contrôle H^1 sur la métrique. Il nous faudra obtenir un contrôle précis sur les dérivées des champs de spin 3/2 afin d'estimer les dérivées supérieures de la métrique.

2. **Scattering et scattering inverse pour les champs de spin** 3/2**.** Le développement d'une théorie de la diffusion pour la forme de Witten des équations de Rarita-Schwinger est un projet plus accessible à court terme. On peut ensuite essayer de reconstruire la métrique à partir d'un noyau de scattering (généralisé) pour les champs de spin 3/2 et de son expression en termes de variables twistorielles à l'infini nul. On peut aussi élaborer une construction analogue pour l'équation de Dirac qui a l'avantage d'être plus simple. On ne pourra alors retrouver que la géométrie conforme, mais un tel travail serait une bonne préparation pour traiter ensuite le cas du spin 3/2.

   La construction d'une transformée de scattering inverse pour les équations de Rarita-Schwinger est également un projet intéressant. Elle repose sur la relation (28). L'idée en est que les données initiales pour la relativité générale peuvent être encodées dans l'asymptotique du noyau du projecteur $P(t)$ à l'infini spatial. Ainsi l'évolution de la métrique serait régie par l'évolution de cette asymptotique, qui est une équation linéaire donnée par (28).

Bibliographie

[1] H.A. Buchdahl, (1958) *On the compatibility of relativistic wave equations for particles of higher spin in the presence of a gravitational field*, Nuovo Cim. 10, pp. 96-103.

[2] F. Cagnac, Y. Choquet-Bruhat, N. Noutchegueme, (1987) *Solutions of the Einstein equations with data at past infinity*, 7th Italian conference on general relativity and gravitational physics (Rapallo, 1986), 35–54, World Sci. Publishing, Singapore.

[3] Y. Choquet-Bruhat, (1985), *Causalité des théories de supergravité*, Société Mathématique de France, Astérisque, Hors Série, p. 79-93.

[4] Y. Choquet-Bruhat, D. Christodoulou, (1981) *Elliptic problems in $H_{s,\delta}$ spaces on manifolds which are euclidian at infinity*, Acta Math., 146, pp. 129-150.

[5] Y. Choquet-Bruhat, D. Christodoulou, M. Francaviglia, (1979) *On the wave equation in curved spacetime*, Ann. Inst. henri Poincaré, 31, 4, p. 399-414.

[6] D. Christodoulou, S. Klainerman, (1993) *The global nonlinear stability of the Minkowski space*, Princeton Mathematical series 41, Princeton University Press.

[7] P.T. Chruściel, (1993) *On completeness of orbits of Killing vector fields*, Classical Quantum Gravity 10, No.10, 2091-2101.

[8] P.A.M. Dirac, (1928) *The quantum theory of the electron*, Proc. Roy. Soc., Part I : A117, p. 610-624, Part II : A118, p. 351-361.

[9] P.A.M. Dirac, (1936) *Relativistic wave equations*, Proc. Roy. Soc. A155, pp. 447-449.

[10] M. Fierz and W. Pauli, (1939) *On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc. A173, pp. 211-232.

[11] R.P. Geroch, (1968) *Spinor structure of space-times in general relativity*, Part I: J. Math. Phys. 9, Part II: J. Math. Phys. 11.

[12] R.P. Geroch, (1970) *The domain of dependence*, J. Math. Phys., 11, pp. 437-439.

[13] T. Kato, (1970) *Linear equations of "hyperbolic" type*, Part I: J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, 17, p. 241-258, Part II: J. Math. Soc. Japan, 25, p. 648-666.

[14] T. Kato, (1975) *The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems*, Arch. Rational Mech. Anal., **58**, p. 181-205.

[15] L.J. Mason, J.-P. Nicolas, *Global results for the Rarita-Schwinger equations and Einstein vacuum equations*, à paraître dans Proc. London Math. Soc.

[16] L.J. Mason and R. Penrose, (1994) *Spin* 3/2 *fields and local twistors*, Twistor Newsletter 37, p. 1-6.

[17] J.-P. Nicolas, (1997) *Global exterior Cauchy problem for spin 3/2 zero rest-mass fields in the Schwarzchild space-time*, Commun. in PDE, 22, 3&4, 465-502.

[18] T. Parker, C.H. Taubes, (1982) *On Witten's proof of the positive energy theorem*, Comm. Math. Phys., 84, 223-238.

[19] R. Penrose, (1965) *Zero rest-mass fields including gravitation : asymptotic behavior*, Proc. Roy. Soc. A284, pp. 159-203.

[20] R. Penrose, (1991) *Twistors as spin* 3/2 *charges*, Gravitation and modern cosmology, Eds. A. Zichichi, N. de Sabbata and N. Sánchez, Plenum Press, New York, pp. 129-137.

[21] R. Penrose, W. Rindler, (1984 & 1986) *Spinors and space-time*, Vol. I & II, Cambridge monographs on mathematical physics, Cambridge University Press.

[22] W. Rarita and J. Schwinger, (1941) *On a theory of particles with half-integer spin*, Phys. Rev. 60, pp. 61.

[23] A. Sen, (1982) *Quantum Theory of Spin* 3/2 *Field in Einstein Spaces*, Internat. J. Theoretical Physics, 21, 1, 1-35.

[24] E. Witten, (1981) *A new proof of the positive energy theorem*, Commun. Math. Physics 80, 381-402.

Jean-Philippe Nicolas
CMAT, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex,
e-mail : nicolas@math.polytechnique.fr
ou MAB, Université Bordeaux 1, 351 cours de la Libération, 33405 Talence Cedex,
e-mail : nicolas@math.u-bordeaux.fr