



Centre de
Mathématiques
Laurent Schwartz



ÉCOLE
POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1998-1999

Alexander Fedotov and Frédéric Klopp

Transitions d'Anderson pour des opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques en dimension 1

Séminaire É. D. P. (1998-1999), Exposé n° IV, 14 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1998-1999____A4_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

TRANSITIONS D'ANDERSON POUR DES OPÉRATEURS DE SCHRÖDINGER QUASI-PÉRIODIQUES EN DIMENSION 1

ALEXANDER FEDOTOV AND FRÉDÉRIC KLOPP

1. INTRODUCTION

En dimension 1 d'espace, nous étudions les propriétés spectrales des familles d'opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques suivantes

$$(1) \quad H_{\phi, \varepsilon} \psi = -\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + (V(x - \phi) + W(\varepsilon x)) \psi(x) = E \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nous supposons que

(H.1)

– V appartient L^2_{loc} , elle prend des valeurs réelles, n'est pas constante et elle vérifie

$$(2) \quad V(x + 1) = V(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

– W est analytique dans une bande $\{|\text{Im } x| < \eta\}$ ($\eta > 0$), elle prend des valeurs réelles sur la droite réelle, n'est pas constante et elle vérifie

$$(3) \quad W(x + 2\pi) = W(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

– ε est une constante positive telle que $2\pi/\varepsilon \notin \mathbb{Q}$,

– ϕ est un paramètre réel servant à indexer la famille.

Le rapport des périodes $2\pi/\varepsilon$ étant irrationnel, le potentiel $V(\cdot - \phi) + W(\varepsilon \cdot)$ est quasi-périodique.

Durant les vingt dernières années, les opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques (et presque-périodiques) ont été l'objet de nombreuses études rigoureuses et numériques (voir, par exemple, [19, 9] pour plus de références). Motivées par la physique des milieux désordonnés, les recherches se sont concentrées sur l'étude du spectre de ces opérateurs.

La première question concerne le lieu du spectre. En tant qu'ensemble, le spectre des opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques a souvent des propriétés remarquables (structure de Cantor, papillon de Hofstadter, etc) qui n'ont été démontrées que pour assez peu de modèles (par exemple pour l'équation de Harper et des perturbations de cette équation [16, 17, 22]).

L'autre question, celle qui nous intéresse plus particulièrement ici, est celle de la nature du spectre (i.e. la nature des fonctions propres généralisées associées aux énergies dans le spectre). Dans ce cas aussi les études tant numériques que rigoureuses sont nombreuses ([19, 9]). L'un des phénomènes les plus remarquables est la transition d'Anderson ou transition "métal-isolant". Il a été observé numériquement ([18, 19]) que, pour certains opérateurs quasi-périodiques, il existe des zones d'énergie ne contenant que du spectre absolument continu et d'autres zones ne contenant que du spectre purement ponctuel. Physiquement, les énergies du spectre absolument continu sont interprétées comme les énergies associées à une phase où le matériau est conducteur et celles du spectre purement ponctuel comme celles d'une phase isolante. On s'attend à ce que la transition de l'une de ces phases à l'autre soit nette et se passe à une énergie critique appelée *seuil de mobilité*. Cette transition n'existe pas pour tous les modèles; pour des modèles très symétriques

comme l'équation de Harper, on sait qu'il n'a pas toujours de transitions mais que la nature du spectre est régie par le paramètre de couplage naturel de cette équation. Lorsque ce paramètre est grand, tout le spectre est purement ponctuel et quand il est petit, tout le spectre absolument continu ([20]).

Notre but est de prouver l'existence des transitions d'Anderson pour la famille d'équations (1). Notre étude sera asymptotique : nous laisserons ε tendre vers 0. Dans ce régime asymptotique, nous pourrions définir des *seuils de mobilité asymptotiques*. Nous démontrerons l'existence de tels seuils et décrirons le diagramme des phases associé à $H_{\phi,\varepsilon}$. Les résultats que nous allons décrire sont tirés de [10] (voir aussi [14]).

2. QUELQUES REMARQUES GÉNÉRALES SUR LA FAMILLE (1)

Avant d'énoncer nos hypothèses et nos résultats de façon précise, revenons à quelques considérations générales sur les opérateurs de la famille (1). Pour cela, nous allons fixer $\varepsilon > 0$ tel que $2\pi/\varepsilon$ soit irrationnel. L'opérateur $H_{\phi,\varepsilon}$ est alors un opérateur ergodique (voir [6, 5, 26]). La théorie générale de ces opérateurs nous garantit qu'il existe un ensemble fermé $\Sigma \subset \mathbb{R}$ tel que, pour presque tout ϕ , le spectre de $H_{\phi,\varepsilon}$ soit égal à Σ . De même, on peut trouver deux ensembles fermés $\Sigma_{ac} \subset \mathbb{R}$ et $\Sigma_{sing} \subset \mathbb{R}$ tels que, pour presque tout ϕ , le spectre absolument continu (resp. le spectre singulier) soit égal à Σ_{ac} (resp. Σ_{sing}). Rappelons ici que le spectre singulier est la réunion du spectre singulier continu et de l'adhérence de valeurs propres de $H_{\phi,\varepsilon}$; c'est donc le complémentaire dans le spectre du spectre absolument continu.

En fait, comme $H_{\phi,\varepsilon}$ est un opérateur quasi-périodique, on sait que les égalités décrites ci-dessus sont vraies pour tout ϕ (voir [2, 23]).

3. LES HYPOTHÈSES

Considérons l'équation de Schrödinger périodique

$$(4) \quad (H\psi)(x) = -\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x) = E\psi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

L'opérateur H ainsi défini est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R})$ et son spectre est absolument continu ([7]). Il est constitué de bandes $[E_1, E_2], [E_3, E_4], \dots, [E_{2n+1}, E_{2n+2}], \dots$ telles que

$$E_1 < E_2 \leq E_3 < E_4 \dots E_{2n} \leq E_{2n+1} < E_{2n+2} \leq \dots \\ E_n \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Pour tout $E \in \mathbb{C}$, l'équation (4) a deux solutions linéairement indépendantes de la forme

$$\psi_{\pm}(x, E) = e^{\pm ik(E)x} p_{\pm}(x, E)$$

où p est une fonction 1-périodique. Ces solutions sont appelées *solutions de Bloch* et la fonction $k(E)$ appelée *quasi-moment de Bloch* (voir par exemple [7, 24, 25]). La fonction k est multivaluée et analytique. Ses points de branchement sont les extrémités des bandes spectrales $(E_n)_{n \geq 1}$; en chacun de ces points, la ramification de k est du type "racine carrée". On fixe une détermination de cette fonction sur le plan \mathbb{C} privé de l'intervalle $[E_1, +\infty[$ par la condition

$$(5) \quad \text{Im } k_0(E) > 0, \quad E < E_1.$$

Dans la suite de notre étude nous supposons que

$$(H.2) \quad E_2 < E_3$$

i.e. que la première lacune du spectre de H est ouverte.

Commençons par décrire la région d'énergie dans laquelle nous étudions le spectre. On notera W_+ et W_- respectivement le maximum et le minimum de W sur la droite réelle. Le spectre de $H_{\phi,\varepsilon}$ est alors contenu dans le demi-axe $[E_1 + W_-, +\infty[$. Fixons $\delta > 0$. Nous étudierons $H_{\phi,\varepsilon}$ dans l'intervalle d'énergie J_δ défini par

$$(6) \quad J_\delta = [E_1 + W_-, \inf(E_1 + W_+, E_2 + W_-) - \delta].$$

Revenons à la famille d'équations (1). Nous allons maintenant définir l'un des objets les plus importants pour notre étude: le *moment complexe*. Fixons E dans \mathbb{R} . Nous définissons

$$\kappa(\varphi) = k(E - W(\varphi)).$$

Comme W est analytique, les points de branchement de κ sont définis par l'équation

$$(7) \quad E - W(\varphi) = E_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ces points de branchements forment un réseau 2π -périodique dans la bande où W est analytique. La géométrie de ces points de branchement dépend évidemment des propriétés de W . Pour la décrire, nous allons faire quelques hypothèses sur W . Nous supposons que

(H.3)

1. W a exactement un maximum et un minimum dans l'intervalle $[0, 2\pi)$.
2. Les extrema de W sont non dégénérés.

Pour fixer les idées, supposons que W atteint son maximum en 0 et son minimum en φ_0 . Comme W est analytique réelle, au voisinage du réel, $W^{-1}(\mathbb{R})$ est constitué de \mathbb{R} et deux branches complexes partant de 0 et φ_0 (voir figure 1) qui se projettent de façon régulière sur l'axe imaginaire. Evidemment, ceci n'a pas de raison de rester vrai si l'on s'éloigne du réel.

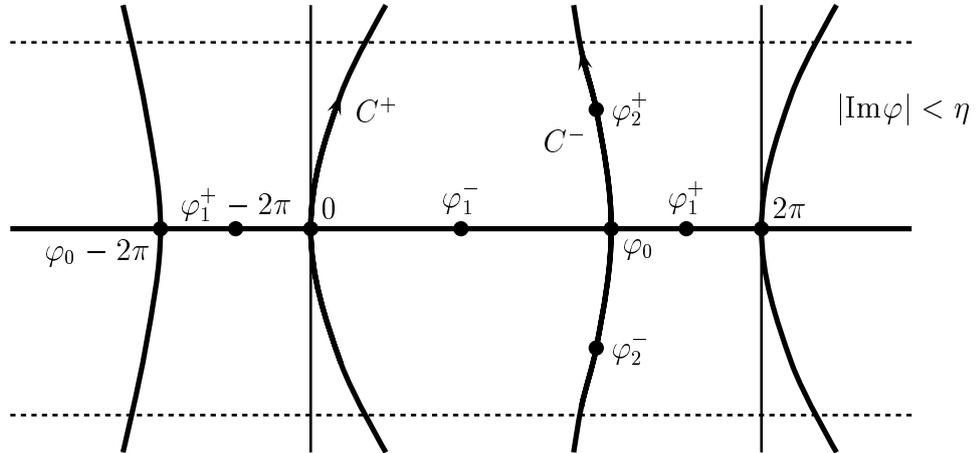


FIG. 1. $W^{-1}(\mathbb{R})$ au voisinage du réel

Nous dirons que $W^{-1}(\mathbb{R})$ a la structure la plus simple possible dans \mathcal{V} un voisinage de l'axe réel si, dans ce voisinage, $W^{-1}(\mathbb{R})$ a la structure décrite dans la figure 1.

Dans la figure 2, on a représenté les points de branchements de κ ainsi que leur mouvement quand E croît. Nous avons distingué trois cas:

1. quand $E < E_1 + W_-$.
2. quand $E_1 + W_- < E < \inf(E_2 + W_-, E_1 + W_+)$.
3. quand $\sup(E_1 + W_+, E_2 + W_-) < E < \inf(E_3 + W_-, E_2 + W_+)$.

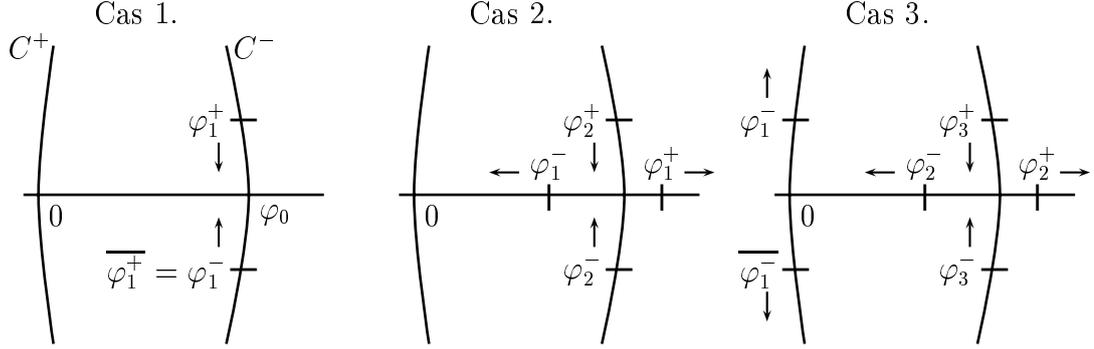


FIG. 2. *Les points de branchement*

Les flèches indiquent la direction du déplacement des points de branchement de κ quand E croît. On trouvera une description plus complète des points de branchement de κ dans [10, 14].

Dans la suite, nous supposons

(H.4) il existe \mathcal{V} un voisinage de l'axe réel tel que

- W est analytique dans \mathcal{V} ,
- $W^{-1}(\mathbb{R})$ a la structure la plus simple possible dans \mathcal{V} ,
- pour $E \in J_\delta$, les points de branchement de κ définis par $E - W(\varphi) = E_2$ sont dans \mathcal{V} .

Notre étude est faite dans la limite adiabatique $\varepsilon \rightarrow 0$. Il est notoire que la nature du spectre de $H_{\phi,\varepsilon}$ dépend de la nature arithmétique de ε . Nous prendrons donc la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ en conservant ε dans un certaine classe diophantienne que nous définissons par

$$(8) \quad \mathcal{D}_\aleph := \left\{ \varepsilon \in \mathbb{R}; \forall q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \inf_{p \in \mathbb{N}} \left| \frac{2\pi}{\varepsilon} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{\aleph}{|q|^3} \right\} \text{ où } \aleph > 0.$$

$\cup_{\aleph > 0} \mathcal{D}_\aleph$ est un ensemble de mesure totale dans \mathbb{R} ([27]). De plus 0 est un point d'accumulation de \mathcal{D}_\aleph (si $0 < \aleph < \frac{4}{9}$).

4. LES INTÉGRALES DE PHASE ET D'ACTIONS

Nous allons maintenant définir les objets principaux qui nous serviront à étudier et à décrire le spectre de (1).

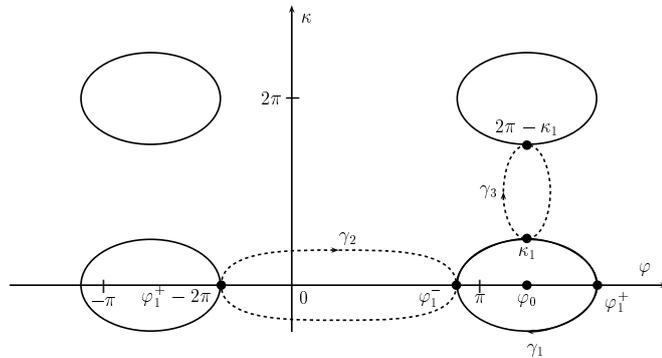


FIG. 3. *La courbe iso-énergétique*

Considérons la courbe iso-énergétique

$$(9) \quad \mathbf{E}(\kappa) + W(\varphi) = E,$$

et notons Γ sa composante réelle. Ici \mathbf{E} est la *relation de dispersion* associée à l'équation (4) (i.e. l'inverse du quasi-moment de Bloch k). L'importance du rôle de Γ dans les problèmes adiabatiques a déjà été mise en évidence (on trouvera des références à la littérature dans [14, 12]).

Pour $E \in J_\delta$, Γ est décrite dans la figure 3 par les contours pleins, les contours pointillés désignant des contours dans les composantes complexes de la courbe iso-énergétique. Nous définissons les *intégrales d'action* S et S_1 ainsi que la *phase* Φ par

$$(10) \quad S(E) = -i \int_{\varphi_1^+ - 2\pi}^{\varphi_1^-} \kappa d\varphi, \quad S_1(E) = -i \int_{\kappa_1}^{2\pi - \kappa_1} (\varphi - \varphi_0) d\kappa, \quad \Phi(E) = \int_{\varphi_1^-}^{\varphi_1^+} \kappa d\varphi.$$

Ici, les intégrales sont prises

- pour S , le long d'un contour "complexe" γ_2 joignant $\varphi_1^+ - 2\pi$ à φ_1^- ,
- pour S_1 , le long d'un contour "complexe" γ_3 joignant κ_1 à $2\pi - \kappa_1$,
- pour Φ , le long d'un contour "réel" γ_1 joignant φ_1^- à φ_1^+ .

et les trois contours sont inclus dans la courbe iso-énergétique (9) (voir la figure 3).

Pour $E \in J_\delta$, on a

$$S(E) > 0, \quad S_1(E) > 0, \quad \Phi(E) \geq 0 \quad \text{and} \quad \Phi'(E) > 0$$

où Φ' est la dérivée de Φ par rapport à E . On remarque que $\Phi(E_1 + W_-) = 0$.

Les trois fonctions S , S_1 et Φ peuvent aussi être définies en terme d'intégrales du moment complexe κ le long de lacets entourant certains des points de branchement de κ .

5. LES RÉSULTATS

Nous pouvons maintenant énoncer nos résultats.

5.1. Le lieu du spectre. Dans J_δ , considérons les énergies $E^{(l)}$, $l \in \mathbb{N}$, définies par

$$(11) \quad \frac{1}{\varepsilon} \Phi(E^{(l)}) = \pi/2 + \pi l, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Ces points sont en nombre fini que nous appelleront $L + 1$. Pour ε petit, la distance séparant deux points consécutifs satisfait à l'inégalité

$$c_1 \varepsilon \leq E^{(l)} - E^{(l-1)} \leq c_2 \varepsilon, \quad l = 0, \dots, L,$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes positives indépendantes de ε . Nous démontrons le

Théorème 1. *Fixons δ une constante positive. Supposons que V et W satisfont aux hypothèses décrites dans les sections 1 et 3. Alors, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe une collection d'intervalles $I_l \subset J_\delta$, $l = 0, 1 \dots L$, tels que le spectre de l'équation (1) dans J_δ est contenue dans la réunion $\cup_{l=0}^L I_l$ et tels que*

- l'intervalle I_l se trouve dans un voisinage de $E^{(l)}$ de taille $o(\varepsilon)$,
- la mesure de Lebesgue de I_l notée $|I_l|$ vérifie

$$(12) \quad |I_l| = \frac{2\varepsilon}{\Phi'(E^{(l)})F(1/2 + l)} \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}S(E^{(l)})} + e^{-\frac{1}{\varepsilon}S_1(E^{(l)})} \right)_{(1+o(1))},$$

$$(13) \quad \text{où } F(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\zeta + 1/2) e^{-\zeta \ln \zeta + \zeta}, \quad \zeta > 0.$$

De plus, si $dN_\varepsilon(E)$ est la densité d'états de l'opérateur $H_{\phi,\varepsilon}$ alors

$$(14) \quad \int_{I_l} dN_\varepsilon(E) = \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

La condition (11) est la condition de quantification qui, dans notre cas, remplace la condition de Bohr-Sommerfeld usuelle.

Soulignons que les intervalles I_l sont exponentiellement petits et sont séparés par des distances de l'ordre de ε . De plus, la formule (14) nous garantit que chacun de ces intervalles contient du spectre. Nous concluons ce paragraphe en disant que la preuve du Théorème 1 ne requiert en fait aucune d'hypothèses sur la nature arithmétique de ε .

5.2. La nature du spectre. Nous définissons la fonction

$$\Delta S(E) := S_1(E) - S(E).$$

et, pour $a > 0$, les ensembles

$$J_a^- = \{E \in J_\delta; \Delta S(E) < -a\} \text{ and } J_a^+ = \{E \in J_\delta; \Delta S(E) > a\}.$$

Si $J_a^+ \neq \emptyset$ (resp. $J_a^- \neq \emptyset$), alors, pour ε assez petit, le nombre d'intervalles I_l dans J_a^+ (resp. dans J_a^-) est de taille $O(1/\varepsilon)$. Nous démontrons le

Théorème 2. *Fixons $\aleph > 0$ et $\delta > 0$. Supposons que V et W satisfont aux hypothèses décrites dans les sections 1 et 3. Alors il existe $C_0 = C_0(\aleph, \delta) > 0$ et $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\aleph, \delta) > 0$ tels que, pour $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \cap \mathcal{D}_\aleph$, on ait*

- tout intervalle I_l contenu dans $J_{C_0\varepsilon}^-$ ne contient que du spectre singulier (i.e. du spectre singulier continu ou purement ponctuel),
- tout intervalle I_l contenu dans $J_{C_0\varepsilon}^+$ contient du spectre absolument continu. De plus, pour $C \geq C_0$ et tout $I_l \subset J_{C\varepsilon}^+$, on a

$$|I_l \cap \Sigma_{ac}|/|I_l| = 1 + o(1),$$

où

- $o(1) \rightarrow 0$ quand $C \rightarrow +\infty$,
- l'erreur $o(1)$ est uniforme en ε .

Commençons par dire que ce théorème n'est pas entièrement satisfaisant ceci pour deux raisons. D'abord on s'attend à ce que tout le spectre dans $J_{C\varepsilon}^+$ soit absolument continu. Puis on s'attend également à ce que le spectre singulier dans $J_{C\varepsilon}^-$ soit (pour presque tout ϕ) en fait du spectre purement ponctuel. Nous reviendrons un peu plus loin sur les raisons qui expliquent que nous n'avons pas encore pu établir cela.

Dans le Théorème 2, nous ne décrivons pas ce qui se passe dans des petits voisinages des seuils de mobilité asymptotiques. Si tout se passe comme nous l'attendons, c'est dans cette zone que se trouvent les vrais seuils de mobilité, et donc les transitions.

Pour clore ce paragraphe, nous pouvons reformuler le Théorème 2 en termes physiques de la façon suivante: considérons la surface iso-énergétique réelle (9) décrite dans la figure 3. Alors

1. si l'interaction (ou l'effet tunnel qui lui est associé) la plus forte a lieu entre deux composantes réelles "verticales" de la courbe iso-énergétique (i.e. si $S_1 < S$) alors le spectre est singulier i.e. on est dans un état "localisé" en position donc "délocalisé" en impulsion.

2. si l'interaction (ou l'effet tunnel qui lui est associé) la plus forte a lieu entre deux composantes réelles "horizontales" de la courbe iso-énergétique (i.e. si $S_1 > S$) alors le spectre est absolument continu i.e. on est dans un état "délocalisé" en position donc "localisé" en impulsion.

Ceci est une version locale en énergie du principe de dualité d'Aubry-André ([1]).

5.2.1. *Les diagrammes de phase.* Le Théorème 2 nous dit que les transitions sont possibles et nous donne un critère pour les localiser asymptotiquement. Commençons par fixer V . Nous allons étudier la fonction $\Delta S(E) = S_1(E) - S(E)$ comme fonction de l'énergie E mais aussi comme fonction du potentiel W . Pour simplifier la situation, nous remplacerons W par αW et étudierons les variations de $\Delta S(E)$ en E et α . Nous supposons α positif et pour souligner la dépendance en α , nous noterons $S(\alpha, E) = S(E)$, $S_1(\alpha, E) = S_1(E)$ et $\Delta S(\alpha, E) = \Delta S(E)$. Toujours pour simplifier la discussion, nous supposons que $W_- < 0 < W_+$ (ce qui ne nous restreint en rien).

Pour pouvoir appliquer les résultats décrits dans les paragraphes 5.1 et 5.2, il faut que les potentiels V et αW vérifient les hypothèses des paragraphes 1 et 3, ceci pour au moins une énergie dans l'intervalle $[E_1 + \alpha W_-, \inf(E_1 + W_+, E_2 + W_-)]$. Ceci impose les restrictions suivantes sur α et E . Notons \mathcal{V} la plus grand voisinage de l'axe réel dans lequel W est analytique et dans lequel $W^{-1}(\mathbb{R})$ a la structure la plus simple possible. Appelons W^- l'infimum de W dans $W^{-1}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{V}$. Alors $W^- < W_-$ et W^- peut valoir $-\infty$. Si on définit

(15)

$$\mathcal{S} = \{(\alpha, E); 0 < \alpha, \alpha W^- + E_2 < E, E_1 + \alpha W_- \leq E \leq \inf(E_2 + \alpha W_-, E_1 + \alpha W_+)\},$$

alors, pour $(\alpha, E) \in \mathcal{S}$, V et αW satisfont aux hypothèses décrites dans les paragraphes 1 et 3 pour l'énergie E . En effet, si $\alpha W^- + E_2 < E$, les points de branchement φ_2^\pm (solutions de $E - \alpha W(\varphi) = E_2$) se trouvent dans la bande d'analyticité de W .

Remarque 1. Nous ne chercherons pas ici à obtenir des résultats uniformes en α .

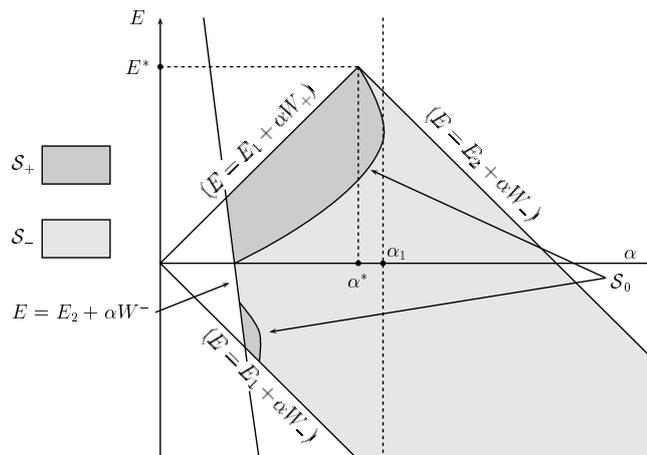


FIG. 4. Un exemple de diagramme de phase quand $W^- > -\infty$

Nous pouvons alors appliquer nos résultats pour $(\alpha, E) \in \mathcal{S}$. Soient

$$\mathcal{S}_\pm = \{(\alpha, E) \in \mathcal{S}; \Delta S(\alpha, E) \gtrless 0\} \text{ et } \mathcal{S}_0 = \{(\alpha, E) \in \mathcal{S}; \Delta S(\alpha, E) = 0\}.$$

et

$$\alpha^* := \frac{E_2 - E_1}{W_+ - W_-} \text{ et } E^* := \frac{E_2 W_+ - E_1 W_-}{W_+ - W_-}.$$

\mathcal{S}_+ , \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_- forment une partition de \mathcal{S} . On démontre le

Théorème 3. *Supposons que V et W vérifient les hypothèses décrites dans les paragraphes 1 et 3. Alors*

- \mathcal{S}_0 est une courbe non-vide, analytique par morceau et dont l'une des composantes connexes commence en (α^*, E^*) ;
- \mathcal{S}_+ est non-vide;
- \mathcal{S}_- est connexe et il existe $\alpha_1 > \alpha^* > 0$ tel que $\mathcal{S} \cap \{\alpha > \alpha_1\} \subset \mathcal{S}_-$.

Remarque 2. De plus, on peut noter que l'ensemble \mathcal{S}_0 jouit de la propriété (très utile dans la preuve du Théorème 3) que, pour tout $t \in [W_-, W_+]$, \mathcal{S}_0 coupe chaque demi-droite $E = t\alpha$ ($\alpha \geq 0$) en au plus un point. Le diagramme de phase décrit dans le Théorème 3 est représentée sur la figure 4.

Dans certains cas, $W^- = -\infty$. Ceci se produit, par exemple, si W est entière et que $W^{-1}(\mathbb{R})$ a la structure la plus simple possible sur tout le plan complexe (comme pour $W(\varphi) = \cos \varphi$). Mais aussi dans d'autres cas, par exemple, si $W(\varphi) = \frac{1}{2 + \cos \varphi}$: dans ce cas $W^{-1}(\mathbb{R})$ a la même structure que dans le cas de $\cos \varphi$ mais W a un pôle sur l'axe $\text{Im } \varphi = \pi$. Si $W^- = -\infty$, on peut décrire plus précisément les ensembles \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_+ ; on

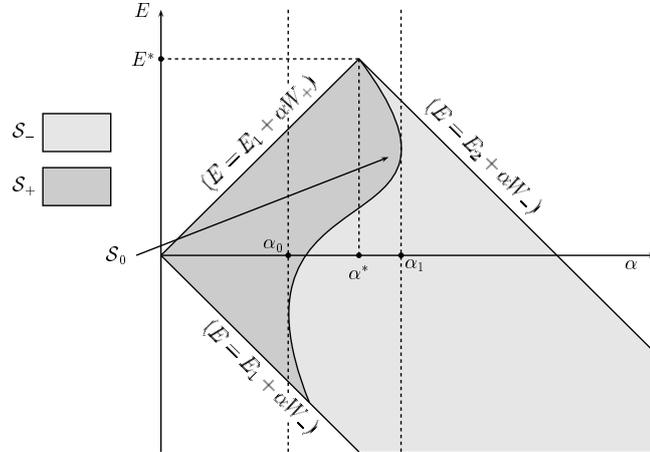


FIG. 5. Un exemple de diagramme de phase quand $W^- = -\infty$

démontre le

Théorème 4. *Supposons que V et W vérifient les hypothèses décrites dans les paragraphes 1 et 3. Si $W^- = -\infty$ alors en sus des résultats du Théorème 3, on prouve que*

- \mathcal{S}_0 est analytique, connexe et joint le point (α^*, E^*) à un point de la demi-droite $E = E_1 + \alpha W_-$ ($\alpha > 0$).
- \mathcal{S}_+ est connexe et il existe $\alpha_0 > 0$ tel que $\mathcal{S} \cap \{\alpha < \alpha_0\} \subset \mathcal{S}_+$.

Dans ce cas, l'image du diagramme de phase que donne le Théorème 4 est essentiellement celle représentée sur la figure 5.

On peut encore préciser cette image quelque peu en calculant la pente de \mathcal{S}_0 et (α^*, E^*) . A cette fin, introduisons M_1 (resp. M_2) les masses effectives (voir [21]) de $k(E)$ et E_1 (resp. E_2) définies par

$$-ik(E_1 - \theta) = \sqrt{2M_1\theta}(1 + o(1)) \text{ et } -i(k(E_2 - \theta) - \pi) = i\sqrt{2M_2\theta}(1 + o(1)), \theta > 0.$$

On peut remarquer que les estimées données dans [21] impliquent que $M_1 > M_2$. On définit le coefficient

$$c_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1} \left| \frac{W''(0)}{W''(\varphi_0)} \right|}.$$

Au point (α^*, E^*) , \mathcal{S}_0 a pour pente

$$\frac{d\alpha}{dE} = \frac{1 - c_{\text{eff}}}{W_+ - c_{\text{eff}}W_-}.$$

Pour illustrer cette discussion, nous allons maintenant décrire certaines situations où l'on peut calculer le diagramme de phase numériquement. Pour cela on choisit pour V un potentiel à “un gap” associé au spectre $[E_1, E_2] \cup [E_3, +\infty)$ où $E_1 = 0$, $E_2 = 8$. La valeur de E_3 est calculée de façon à ce que V ait pour période 1 (voir, par exemple, [25]). Le

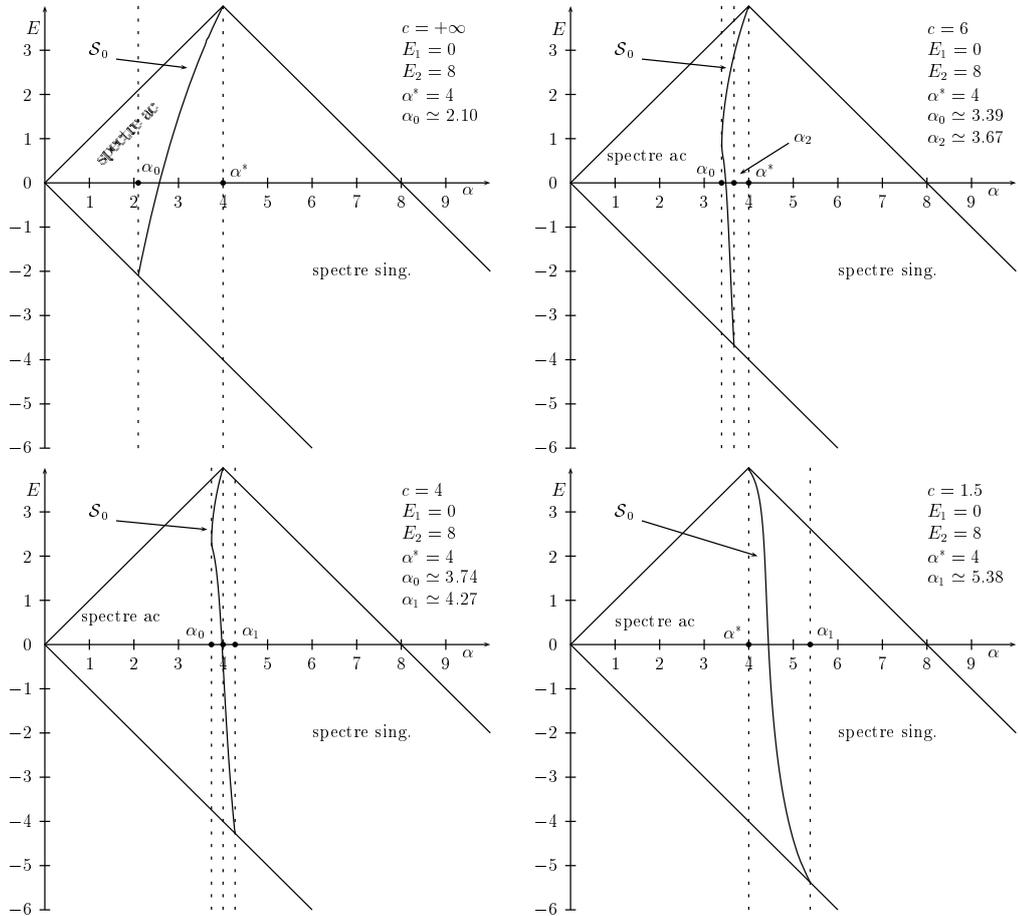


FIG. 6. Exemples de diagrammes de phase

potentiel W est lui choisi dans la famille

$$W_c(x) = \frac{(\cos x + c)^3 - c^3 - 3c}{3c^2 + 1}, \quad |c| > 1.$$

Notons que, pour tout c , $-1 \leq W_c \leq 1$ et que $W_{+\infty}(x) = \cos x$. On calcule

$$c_{\text{eff}} = \frac{c+1}{c-1} \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}.$$

Dans la figure 6, nous avons représenté le diagramme de phase pour 4 valeurs différentes du paramètre c . On obtient des comportements assez variés:

- pour $c = +\infty$: lorsque le paramètre α croît à partir de 0, c'est l'infimum du spectre qui commence par être "localisé" d'abord. Le zone de spectre singulier augmente jusqu'à couvrir toute le fenêtre de spectre que nous étudions si $\alpha > \alpha^*$.
- pour $c = 6$: pour $\alpha < \alpha_0$, le spectre est absolument continu. Pour $\alpha > \alpha_0$, il existe deux seuils de mobilité asymptotiques qui se propagent l'un vers l'intérieur du spectre, l'autre vers le bord quand α croît. Pour $\alpha > \alpha_2$, le bord de la bande est "localisé" mais on doit attendre que $\alpha > \alpha^*$ avant que toute le fenêtre de spectre que nous étudions soit "localisée".
- pour $c = 4$: ce cas est similaire au cas $c = 6$ sauf que le centre de la bande est "localisé" avant le bord.
- pour $c = 1.5$: dans ce cas, c'est l'intérieur même de la bande qui est "localisé" en premier, puis la "localisation" se propage vers le bord de la bande de spectre.

Ces phénomènes avaient déjà été observés numériquement (voir par exemple [18]).

Remarque 3. Nous avons ici librement utilisé le terme "localisé" pour désigner le spectre singulier.

6. A PROPOS DES PREUVES

Pour démontrer les résultats présentés ci-dessus, nous réduisons la famille d'équations (1) à un hamiltonien effectif localement en énergie. Pour ce faire, nous introduisons une *matrice de monodromie* adaptée à (1) (voir [14, 10]). La matrice de monodromie est un objet très général. Pour des opérateurs périodiques, la notion est classique (voir, par exemple, [28]). Pour des équations aux différences à coefficients périodiques, elle a été définie dans [4]. Pour une famille d'opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques, nous l'avons définie dans [14].

Pour ϕ fixé, soit $\psi_{1,2}(x, \phi)$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1). On dira qu'elles forment une *base cohérente* si leur wronskien est indépendant de ϕ et que ces solutions sont 1-périodiques en ϕ i.e. $\forall x, \phi, \psi_{1,2}(x, \phi + 1) = \psi_{1,2}(x, \phi)$.

Soit $(\psi_{1,2})$ une base cohérente de solutions de (1). Les fonctions $\psi_{1,2}(x + 2\pi/\varepsilon, \phi + 2\pi/\varepsilon)$ sont deux nouvelles solutions linéairement indépendantes de l'équation (1). On peut donc les exprimer comme

$$(16) \quad \Psi(x + 2\pi/\varepsilon, \phi + 2\pi/\varepsilon) = M(\phi)\Psi(x, \phi),$$

où

- Ψ est le vecteur transposé de $(\psi_1(x, \phi), \psi_2(x, \phi))$,
- $M(\phi)$ est une matrice indépendante de x .

$M(\phi)$ est la *matrice de monodromie* associée à la base cohérente $(\psi_{1,2})$. Comme $(\psi_{1,2})$ est cohérente, M est 1-périodique en ϕ , et, $\forall \phi, \det M(\phi) \equiv 1$.

Posons $h = \frac{2\pi}{\varepsilon} \bmod 1$ donc $0 < h < 1$. L'analyse du spectre de l'opérateur $H_{\phi, \varepsilon}$ peut se réduire à l'analyse des solutions de l'équation de monodromie

$$(17) \quad \chi(\phi + h) = M(\phi) \chi(\phi) \quad \forall \phi \in \mathbb{R}.$$

En effet, on sait que, les propriétés spectrales d'équations de Schrödinger sur la droite réelle peuvent être entièrement décrites en terme du comportement asymptotique en $x \rightarrow \pm\infty$ des solutions de cette même équation (voir [15]). Il se trouve que le comportement asymptotique en $\pm\infty$ des solutions de (1) reproduit celui en $\phi \rightarrow \mp\infty$ des solutions de l'équation de monodromie. Plus précisément, considérons la restriction $\chi_n = \chi(\phi + nh)$ d'une solution χ de (17) au réseau $\phi + h\mathbb{Z}$. Elle satisfait à l'équation

$$(18) \quad \chi_{n+1} = M(\phi + nh)\chi_n, \quad \forall n.$$

On démontre la

Proposition 1. *Soit $\psi_{1,2}$ une base cohérente de solutions de (1), et soit M la matrice de monodromie correspondante. Fixons $\phi = \phi_0 \in \mathbb{R}$. Alors, il existe $C > 1$ tel que, pour toute solution vectorielle $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de (18), il existe une unique solution f de (1) telle que*

$$(19) \quad \frac{1}{C} \|F_{-n}\| \leq \left\| \begin{pmatrix} f(x + 2\pi n/\varepsilon) \\ f'(x + 2\pi n/\varepsilon) \end{pmatrix} \right\| \leq C \|F_{-n}\|, \quad \forall x \in \left[0, \frac{2\pi}{\varepsilon}\right], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Cette proposition réduit l'analyse du spectre de (1) à l'analyse des solutions de (18). Cette dernière équation joue le rôle du hamiltonien effectif mentionné au début de cette partie.

Il reste maintenant deux questions. D'abord il faut construire une base cohérente pour laquelle nous pouvons calculer la matrice de monodromie (modulo peut-être de petites erreurs). Ensuite nous devons analyser l'équation de monodromie ainsi obtenue.

Pour résoudre le premier problème, nous utilisons une méthode WKB adaptée aux équations différentielles ordinaires dans le régime adiabatique. Cette méthode a été développée dans [14, 11]. La forme de la matrice de monodromie (i.e. quels sont les coefficients dominants dans cette matrice quand $\varepsilon \rightarrow 0$) que l'on obtient de ce calcul dépend de la configuration des points de branchement définis par l'équation (7) (ceci est dû au fait que ces configurations contrôlent la forme des domaines canoniques utilisés dans la méthodes WKB). Dans la région d'énergie que nous étudions (i.e. la configuration du cas 2. de la figure 2), les asymptotiques des coefficients dominants de la matrice de monodromie sont données en terme des actions S , S_1 et de la phase Φ .

L'équation aux différences finies vectorielle du premier ordre (18) peut être réécrite comme une équation scalaire du second ordre. Quand les points de branchement sont dans la configuration du cas 2. de la figure 2, cette équation est une petite perturbation de l'équation de Harper

$$(20) \quad (u_{n+1} + u_{n-1}) + 2\lambda \cos(nh + \phi)u_n = \mathcal{E}u_n,$$

$$(21) \quad \text{où } \lambda = \lambda(E) \text{ et } \mathcal{E} = \mathcal{E}(E).$$

Si on se place dans une autre configuration des points de branchement (par exemple, les cas 1. et 3. de la figure 2), on obtient d'autres hamiltoniens effectifs locaux ([13]).

L'équation de Harper et ses perturbations ont été abondamment étudiées ces dernières vingt années (voir, par exemple [19, 20, 22, 4, 26, 5, 16, 6]). Pour ce qui concerne son spectre, c'est le paramètre λ qui en contrôle la nature: si λ est grand, il est purement ponctuel pour presque tout ϕ , si λ est petit, il est absolument continu. Dans notre cas, le paramètre λ est donné explicitement en terme de la différence d'actions ΔS par

$$\lambda = \lambda(E) \sim e^{-\Delta S(E)/\varepsilon}.$$

Ceci explique les résultats du Théorème 2. Néanmoins, l'une des différences majeures avec l'équation de Harper usuelle est que, dans (20), l'énergie effective \mathcal{E} et la constante de couplage λ dépendent l'une de l'autre. Ceci est la raison principale pour laquelle, dans le Théorème 2, nous n'obtenons pas une preuve de l'existence de spectre purement ponctuel dans $J_{C_\varepsilon}^-$ (pour presque tout ϕ) mais seulement de spectre singulier. Dans notre preuve, nous devons aussi tenir compte du fait que (18) est une petite perturbation de (20). Pour étudier ces équations, nous utilisons des résultats sur les équations quasi-périodiques ([3, 8, 9]), résultats qui ne sont pas toujours exactement adaptés à nos besoins. Ceci explique en particulier pourquoi, dans le Théorème 2, nous ne montrons pas que tout le spectre contenu dans $J_{C_\varepsilon}^+$ est absolument continu.

RÉFÉRENCES

- [1] S. Aubry and G. André. Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices. *Ann. Isr. Phys. Soc.*, 3, 133-164 1980.
- [2] J. Avron and B. Simon. Almost periodic Schrödinger operators, II. the integrated density of states. *Duke Mathematical Journal*, 50:369–391, 1983.
- [3] J. Bellissard, R. Lima, and D. Testard. Metal-insulator transition for the Almost Mathieu model. *Communications in Mathematical Physics*, 88:207–234, 1983.
- [4] V. Buslaev and A. Fedotov. Monodromization and Harper equation. In *Séminaires d'équations aux dérivées partielles*, volume XXI, Palaiseau, 1994. Ecole Polytechnique.
- [5] R. Carmona and J. Lacroix. *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators*. Birkhäuser, Basel, 1990.
- [6] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon. *Schrödinger Operators*. Springer Verlag, Berlin, 1987.
- [7] M. Eastham. *The spectral theory of periodic differential operators*. Scottish Academic Press, Edinburgh, 1973.
- [8] L. H. Eliasson. Discrete one-dimensional quasi-periodic Schrödinger operators with pure point spectrum. *Acta Mathematica*, 179:153–196, 1997.
- [9] L. H. Eliasson. Reducibility and point spectrum for linear quasi-periodic skew products. In *Proceedings of the ICM 1998, Berlin*, volume II, pages 779–787, 1998.
- [10] A. Fedotov and F. Klopp. Anderson transitions for quasi-periodic Schrödinger operators in dimension 1. in progress.
- [11] A. Fedotov and F. Klopp. A complex WKB analysis for adiabatic problems. in progress.
- [12] A. Fedotov and F. Klopp. The monodromy matrix for one-dimensional adiabatic quasi-periodic Schrödinger operators I. in progress.
- [13] A. Fedotov and F. Klopp. The monodromy matrix for one-dimensional adiabatic quasi-periodic Schrödinger operators II. in progress.
- [14] A. Fedotov and F. Klopp. The monodromy matrix for a family of almost periodic equations in the adiabatic case. Preprint, Fields Institute, Toronto, 1997.
- [15] D. Gilbert and D. Pearson. On subordinacy and analysis of the spectrum of one-dimensional Schrödinger operators. *Journal of Mathematical Analysis and its Applications*, 128:30–56, 1987.
- [16] B. Helffer and J. Sjöstrand. Analyse semi-classique pour l'équation de Harper. *Mémoires de la Société Mathématique de France*, 34, 1988.
- [17] B. Helffer and J. Sjöstrand. Semi-classical analysis for Harper's equation III. Cantor structure of the spectrum. *Mémoires de la Société Mathématique de France*, 39, 1989.
- [18] H. Hiramoto and M. Kohmoto. Electronic spectral and wavefunction properties of one-dimensional quasi-periodic systems: a scaling approach. *International Journal of Modern Physics B*, 164(3–4):281–320, 1992.
- [19] T. Janssen. Aperiodic Schrödinger operators. In R. Moody, editor, *The Mathematics of Long-Range Aperiodic Order*, pages 269–306. Kluwer, 1997.
- [20] S. Jitomirskaya. Almost everything about the almost Mathieu operator. II. In *XIth International Congress of Mathematical Physics (Paris, 1994)*, pages 373–382, Cambridge, 1995. Internat. Press.
- [21] P. Kargaev and E. Korotyaev. Effective masses and conformal mappings. *Communications in Mathematical Physics*, 169:597–625, 1995.

- [22] Y. Last. Almost everything about the almost Mathieu operator. I. In *XIth International Congress of Mathematical Physics (Paris, 1994)*, pages 366–372, Cambridge, 1995. Internat. Press.
- [23] Y. Last and B. Simon. Eigenfunctions, transfer matrices, and absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operator. Technical report, Caltech, 1996.
- [24] V. Marchenko and I. Ostrovskii. A characterization of the spectrum of Hill's equation. *Math. USSR Sbornik*, 26:493–554, 1975.
- [25] H. McKean and P. van Moerbeke. The spectrum of Hill's equation. *Inventiones Mathematicae*, 30:217–274, 1975.
- [26] L. Pastur and A. Figotin. *Spectra of Random and Almost-Periodic Operators*. Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [27] V. Sprindzhuk. *Metric theory of Diophantine approximation*. Wiley, New-York, 1979.
- [28] E.C. Titchmarsh. *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. Part II*. Clarendon Press, Oxford, 1958.

(Alexander Fedotov) DEPARTMENT OF MATHEMATICAL PHYSICS, ST PETERSBURG STATE UNIVERSITY, 1, ULIANOVSKAJA, 198904 ST PETERSBURG-PETRODVORETZ, RUSSIA

E-mail address: `fedotov@mph.niif.spb.su`

(Frédéric Klopp) DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE, INSTITUT GALILÉE, U.R.A 7539 C.N.R.S, UNIVERSITÉ DE PARIS-NORD, AVENUE J.-B. CLÉMENT, F-93430 VILLETANEUSE, FRANCE

E-mail address: `klopp@math.univ-paris13.fr`