SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1998-1999

Jean-Michel Bony

Sur l'inégalité de Fefferman-Phong

Séminaire É. D. P. (1998-1999), Exposé n° III, 14 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1998-1999____A3_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

SUR L'INÉGALITÉ DE FEFFERMAN-PHONG

par

Jean-Michel Bony

Un opérateur A de symbole a positif est formellement autoadjoint (en quantification de Weyl) , mais il n'est pas vrai en général qu'il soit positif ni même borné inférieurement (c'est-à-dire que $(A\varphi \mid \varphi) \geqslant -\mathrm{C}^{\mathrm{te}} \|\varphi\|_{L^2}^2$ pour $\varphi \in \mathcal{S}$).

On utilise couramment le nom d'"inégalité de Gårding précisée" pour désigner deux énoncés assez différents. Tous deux permettent d'affirmer que A est borné inférieurement, mais les conditions portant sur a sont

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)\right| \leqslant C_{\alpha\beta} \langle\xi\rangle^{1-|\alpha|} \qquad \text{pour } |\alpha| + |\beta| \geqslant 0 \tag{1}$$

dans le premier cas et

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)\right| \leqslant C_{\alpha\beta} \qquad \text{pour } |\alpha| + |\beta| \geqslant 2 \tag{2}$$

dans le second.

Le premier énoncé s'étend au cas de symboles associés à une métrique g sur l'espace des phases, dans le cadre du calcul de Weyl-Hörmander. Toutefois, le résultat n'est non vide que s'il existe un calcul symbolique asymptotique non trivial (c'est-à-dire si les commutateurs sont "d'ordre" strictement moins élevé que les produits). Nous allons donner ici un énoncé (théorème 2.1) qui contient les deux cas ci-dessus et qui est significatif même en l'absence de calcul asymptotique. On verra d'ailleurs que c'est dans ce dernier cas que l'énoncé est le plus fort, et que le cas général s'y ramène aisément.

L'inégalité de Fefferman-Phong [**FP**] est une amélioration très substantielle des conditions ci-dessus. Dans le cas le plus simple, elle assure que l'on peut remplacer 1 par 2 dans l'exposant du membre de droite de (1). Elle s'énonce aussi pour des métriques g générales, mais ne fournit un résultat effectif que s'il existe un calcul asymptotique. Nous en donnerons une généralisation (théorème 3.1) qui ne présente pas cet inconvénient. Par exemple, il suffit d'avoir les inégalités (2) lorsque $|\alpha| + |\beta| \geqslant 4$ pour que A soit borné inférieurement.

Nos démonstrations sont très directement inspirées de celles de [**Hö**] §18.6. Les seuls points réellement nouveaux sont l'importance que nous donnons à des conditions de lenteur supplémentaires sur la métrique, et l'exploitation systématique du fait que les termes de reste, dans le développement de la formule de composition des symboles, ne dépendent que des dérivées de ceux-ci (théorème 1.2).

1. Composition et restes

Nous rappelons brièvement dans cette section les éléments du calcul de Weyl-Hörmander (voir [**Hö**] §18.5). On note $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d)^\star$ l'espace des phases, muni de la forme symplectique

$$\sigma(X,Y) = \langle \xi \, , \, y\rangle - \langle \eta \, , \, x\rangle \quad \text{pour } X=(x,\xi) \text{ et } Y=(y,\eta).$$

Si g est une métrique riemannienne sur $\mathcal{X}$, on peut, pour chaque point $X \in \mathcal{X}$, trouver des coordonnées symplectiques (x_j,ξ_j) dans lesquelles la forme quadratique g_X se mette sous la forme

$$g_X(dx,d\xi) = \sum_j \frac{dx_j^2 + d\xi_j^2}{\lambda_j(X)} \, .$$

Les λ_j sont des invariants de g_X et on pose $\lambda(X) = \inf_j \lambda_j(X)$.

La forme quadratique g_X^σ est la forme quadratique inverse de g_X, le dual de $\mathcal{X}$ étant identifié à $\mathcal{X}$ par la forme symplectique. Dans les coordonnées ci-dessus, elle prend la forme

$$g_X^\sigma(dx,d\xi) = \sum_j \lambda_j(X)(dx_j^2 + d\xi_j^2).$$

On utilisera enfin la forme quadratique γ_X moyenne géométrique de g_X et g_X^σ. C'est la plus grande des formes quadratiques définies positives γ telles que l'on ait (en notant aussi γ la forme polarisée) $|\gamma(S,T)| \leqslant g_X(S)^{1/2} g_X^\sigma(T)^{1/2}$. Dans les coordonnées ci-dessus, on a $\gamma_X(dx,d\xi) = \sum_j (dx_j^2 + d\xi_j^2)$.

On dit que g est *sous-symplectique* [resp. *symplectique*] si on a $g \leqslant g^\sigma$ [resp. $g = g^\sigma$] ou encore si $\lambda \geqslant 1$ [resp. $\lambda = 1$].

On dit que g est une *métrique de Hörmander* si elle est sous-symplectique et si elle vérifie les deux conditions suivantes :

Lenteur. — $$g_X(Y-X) \leqslant C^{-1} \Longrightarrow (g_Y/g_X)^{\pm 1} \leqslant C \tag{3}$$

Tempérance. — $$(g_Y/g_X)^{\pm 1} \leqslant C(1+g_X^\sigma(Y-X))^N \tag{4}$$

On dira que g admet C et N comme constantes de structure.

Une fonction M définie sur $\mathcal{X}$ et strictement positive est un g-poids si on a

— $g_X(Y-X) \leqslant C^{-1} \Longrightarrow (M(Y)/M(X))^{\pm 1} \leqslant C'$,

— $(M(Y)/M(X))^{\pm 1} \leqslant C'(1+g_X^\sigma(Y-X))^{N'}$,

et on dira de même que C' et N' sont des constantes de structure de M.

L'espace $S(M,g)$ est constitué des fonctions a de classe C^∞ sur $\mathcal{X}$ vérifiant pour $k \in \mathbb{N}$

$$\|a\|_{k;S(M,g)} = \sup_{X,T_j} \left\{ \frac{|\partial_{T_1} \ldots \partial_{T_l} a(X)|}{M(X)} \;\middle|\; l \leqslant k,\ g_X(T_j) \leqslant 1 \right\} < \infty,$$

en posant $\partial_T a = \langle T\,,\, da\rangle$.

La quantification de Weyl associe à un symbole a l'opérateur a^w défini par

$$a^w u(x) = \iint e^{i\langle x-y\,,\,\xi\rangle} a(\tfrac{x+y}{2},\xi) u(y)\, dy\, d\xi/(2\pi)^d.$$

L'invariance symplectique de cette quantification jouera un rôle important. Si χ est une transformation symplectique de $\mathcal{X}$, on a $(a\circ\chi)^w = U^\star a^w U$ où U est un opérateur métaplectique. En particulier U est unitaire et la borne inférieure de l'opérateur a^w, si elle existe, est la même que celle de l'opérateur $(a\circ\chi)^w$.

On définit le composé $a_1 \# a_2$ de deux symboles par $(a_1\#a_2)^w = a_1^w \circ a_2^w$ lorsque ce dernier opérateur est défini. Dans les bons cas, par exemple si $a_\iota \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$, on a

$$a_1\#a_2(X) = \iint e^{-2i\sigma(X-X_1,X-X_2)} a_1(X_1) a_2(X_2)\, dX_1\, dX_2/\pi^{2d}. \tag{5}$$

Si g est une métrique de Hörmander, si M est un g-poids et si $a \in S(M,g)$, l'opérateur a^w applique $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même et, si $M=1$, $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même. Si de plus M' est un g-poids, alors il en est de même de MM' et, pour $a' \in S(M',g)$, on a $a\#a' \in S(MM',g)$.

Le développement asymptotique de la formule (5) est classique, mais nous aurons besoin ici de l'expression exacte du reste

$$a_1\#a_2(X)=\sum_{p=0}^{m-1}\tfrac{1}{p!}\Big(\tfrac{1}{2i}\sigma(\partial_{X_1},\partial_{X_2})\Big)^p a_1(X_1)a_2(X_2)\big|_{X_1=X_2=X}+R_m(a_1,a_2)(X)$$

$$R_m(a_1,a_2)(X)=\int_0^1\frac{(1-\theta)^{m-1}}{(m-1)!}\iint e^{-2i\sigma(X-X_1,X-X_2)/\theta}$$
$$\Big(\tfrac{1}{2i}\sigma(\partial_{X_1},\partial_{X_2})\Big)^m a_1(X_1)a_2(X_2)\,dX_1\,dX_2\,d\theta/(\pi\theta)^{2d},$$

où $\sigma(\partial_Y,\partial_Z)$ est l'opérateur différentiel sur $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ qui, dans toute base symplectique, se met sous la forme $\sum_j(\partial^2/\partial\eta_j\partial z_j-\partial^2/\partial\zeta_j\partial y_j)$. En notant $\{a_1\,,\,a_2\}$ le crochet de Poisson, le développement de $a_1\#a_2$ commence par $a_1a_2+\{a_1\,,\,a_2\}/2i+\cdots$

L'expression du reste suggère d'introduire la loi de composition

$$a_1\underset{\theta}{\#}a_2(X)=\iint e^{-2i\sigma(X-X_1,X-X_2)/\theta}a_1(X_1)a_2(X_2)\,dX_1\,dX_2/(\pi\theta)^{2d}.$$

qui correspond d'ailleurs à la quantification $a(x,\xi)\mapsto a^w(x,\theta D_x)$. Il est important d'énoncer avec précision les estimations de composition.

Proposition 1.1. — *Soit g une métrique de Hörmander, M_1 et M_2 deux g-poids. Pour tout k entier, il existe des constantes $l=l(k)$, $C=C(k)$, indépendantes de $\theta\in[0,1]$ et ne dépendant de g, M_1, M_2 que par l'intermédiaire de leurs constantes de structure, telles que l'on ait*

$$\Big\|a_1\underset{\theta}{\#}a_2\Big\|_{k;S(M_1M_2,g)}\leqslant C\,\|a_1\|_{l;S(M_1,g)}\,\|a_2\|_{l;S(M_2,g)}\,.$$

La moyenne géométrique γ_X de g_X et g_X^σ, qui interviendra dans les énoncés suivants, n'est pas nécessairement tempérée, mais on vérifie facilement que l'on a

$$(\gamma_Y/\gamma_X)^{\pm1}\leqslant C(1+g_X^\sigma(Y-X))^N.$$

Théorème 1.2. — *Soient g, M_1, M_2 comme ci-dessus et $m\in\mathbb{N}$. Soient a_1 et a_2 de classe C^∞ sur $\mathcal{X}$ vérifiant, pour $\iota=1,2$ et pour $k\in\mathbb{N}$,*

$$|\partial_{S_1}\ldots\partial_{S_m}\partial_{T_1}\ldots\partial_{T_k}a_\iota(X)|\leqslant C_kM_\iota(X)\ \text{pour}\ \gamma_X(S_j)\leqslant1\ \text{et}\ g_X(T_j)\leqslant1.$$

Alors $R_m(a_1,a_2)$ et la restriction de $\sigma(\partial_{X_1},\partial_{X_2})^m a_1(X_1)a_2(X_2)$ à la diagonale appartiennent à $S(M_1M_2,g)$.

Pour chaque point $X_0 \in \mathcal{X}$, on peut choisir une base symplectique de $\mathcal{X}$ formée de vecteurs S_j vérifiant $\gamma_{X_0}(S_j) = 1$. On peut alors écrire $R_m(a_1, a_2)$ comme une somme finie d'intégrales, pour $\theta \in [0, 1]$, de termes c du type

$$c = (\partial_{S_{j_1}} \dots \partial_{S_{j_m}} a_1) \underset{\theta}{\#} (\partial_{S_{k_1}} \dots \partial_{S_{k_m}} a_2). \tag{6}$$

L'hypothèse (7) assure que le premier facteur appartient à l'espace $S(\mu_1, g)$, avec

$$\mu_1(X) = M_1(X) \prod \gamma_X(S_{j_p})^{1/2}$$

et le second facteur appartient à un espace $S(\mu_2, g)$ du même type. Ces poids μ_ι dépendent de X_0 et du choix des S_j mais leurs constantes de structure ne dépendent que des constantes de structure de g, M_1 et M_2. Il en résulte que l'on a $\|c\|_{k;S(\mu_1\mu_2,g)} \leqslant C_k$ avec des constantes C_k indépendantes de X_0 et des S_j. Comme $\mu_1(X_0)\mu_2(X_0) = M_1(X_0)M_2(X_0)$, on a en particulier

$$|\partial_{T_1} \dots \partial_{T_k} c(X_0)| \leqslant C_k M_1(X_0) M_2(X_0) \quad \text{pour } g_{X_0}(T_j) \leqslant 1.$$

En sommant et en intégrant en θ, on obtient la même estimation pour $R_m(a_1, a_2)$ en tout point X_0, et donc le résultat.

Corollaire 1.3. — *Supposons que l'on ait, pour $\iota = 1, 2$,*

$$|\partial_{T_1} \dots \partial_{T_k} a_\iota(X)| \leqslant C_k M_\iota(X) \text{ pour } k \geqslant m \text{ et } g_X(T_j) \leqslant 1. \tag{7}$$

Alors $R_m(a_1, a_2)$ et la restriction de $\sigma(\partial_{X_1}, \partial_{X_2})^m a_1(X_1) a_2(X_2)$ à la diagonale appartiennent à $S(M_1 M_2 \lambda^{-m}, g)$.

Il suffit de remarquer que les hypothèses du théorème sont satisfaites en remplaçant M_ι par $M_\iota \lambda^{-m/2}$, ce qui résulte directement de $\gamma_X(T) \geqslant \lambda(X) g_X(T)$.

2. Inégalité de Gårding précisée

On se donne une métrique de Hörmander g qui pourra éventuellement être plus "lente" qu'il n'est requis par la condition (3) : on introduit une fonction R (le rayon de lenteur) définie sur $\mathcal{X}$, vérifiant $1 \leqslant R(X) \leqslant \infty$ et

$$g_X(Y - X)^{1/2} \leqslant C'^{-1} R(X) \Longrightarrow (g_Y/g_X)^{\pm 1} \leqslant C'. \tag{8}$$

On conserve les notations ci-dessus pour λ et γ.

Théorème 2.1. — *Soit a une fonction positive, de classe C^∞ définie sur $\mathcal{X}$, vérifiant*
$$\left|\prod_{j=1}^{k} \partial_{T_j} a(X)\right| \leqslant C_k \lambda(X)^{k/2} \text{ pour } k \geqslant 2 \text{ et } g_X(T_j) \leqslant 1 \tag{9}$$
et
$$a(X) \leqslant \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \lambda(X)^2 R(X)^4. \tag{10}$$
L'opérateur a^w est alors borné inférieurement, c'est-à-dire que l'on a $(a^w u \mid u) \geqslant -\mathrm{C}^{\mathrm{te}} \|u\|_{L^2}^2$ pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Pour démontrer ce théorème, on peut se ramener au cas $\lambda = 1$. En effet, la métrique $\widetilde{g} = \lambda g$ est aussi une métrique de Hörmander pour laquelle on a $\widetilde{\lambda} = 1$ et $\widetilde{R} = \lambda^{1/2} R$. Relativement à la métrique $\widetilde{g}$, la fonction a vérifie donc aussi les conditions (10) et (9) qui sont inchangées. Nous supposerons donc dans la suite $\lambda = 1$ et aussi (quitte à remplacer a par $a+1$) $a \geqslant 1$.

Posons $b = a^{1/2}$. On a $b \# b = b^2 + 0 + R_2(b,b)$. Nous allons montrer que $R_2(b,b) \in S(1,g)$, ce qui entraine immédiatement le théorème puisque la différence entre l'opérateur a^w et l'opérateur $(b^w)^2$, qui est positif, est alors bornée sur L^2. D'après le corollaire 1.3, il nous suffit de montrer que
$$\left|\prod_{j=1}^{k} \partial_{T_j} b(X)\right| \leqslant C'_k \text{ pour } k \geqslant 2 \text{ et } g_X(T_j) \leqslant 1.$$
Dans la g_X-boule de centre X et de rayon $R(X)$, la métrique g est essentiellement constante, et un développement de Taylor à l'ordre 2 dans cette boule, joint à l'estimation (9) pour $k = 2$, entraîne que l'on a $|\partial_T a(X)| \leqslant \mathrm{C}^{\mathrm{te}}(a(X)^{1/2} + a(X)/R(X))$ pour $g_X(T) \leqslant 1$. On a
$$\partial_{T_1}\partial_{T_2} b(X) = \frac{\partial_{T_1}\partial_{T_2} a(X)}{2a(X)^{1/2}} - \frac{\partial_{T_1} a(X) \partial_{T_2} a(X)}{4a(X)^{3/2}}.$$
Le premier terme est borné du fait que $a \geqslant 1$. Le second terme peut s'estimer par $\max(a(X)^{-1/2}, a(X)^{1/2} R(X)^{-2})$ et est donc borné en vertu de (10). Les dérivées d'ordre plus élevé de b s'estiment de même, ce qui achève la démonstration.

Remarque 2.2. — Pour la métrique euclidienne, on a $R(X) = +\infty$, la condition (10) disparaît, et on retrouve les conditions (2). Pour une métrique générale, si on compare les hypothèses ci-dessus à la condition usuelle $a \in S(\lambda, g)$, on voit que toutes les conditions portant sur a sont affaiblies, à l'exception de la condition portant sur les dérivées secondes qui est inchangée. Dans le cas où la métrique γ est elle-même tempérée, le théorème énoncé pour la métrique γ fournit des conditions suffisantes encore plus faibles.

Il existe plusieurs variantes de ce résultat, les zones de lenteur optimales n'étant pas nécessairement des g-boules. Nous nous limiterons au théorème suivant qui s'applique notamment aux métriques "de type (ρ, δ)" :

$$\langle\xi\rangle^{2\delta}\, dx^2 + d\xi^2 / \langle\xi\rangle^{2\rho}, \quad \text{pour } \delta \leqslant \rho \leqslant 1 \text{ et } \delta < 1,$$

avec $\bar{R} = \infty$ et qui permet de supprimer dans ce cas la condition (10).

Théorème 2.3. — *On suppose que la métrique g est scindée :*

$$g_X(dx, d\xi) = g_{1X}(dx) + g_{2X}(d\xi)$$

où les $g_{\iota X}$ sont des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^d$ et $(\mathbb{R}^d)^\star$. Soit $\bar{R}$ une fonction définie sur $\mathcal{X}$, vérifiant $1 \leqslant \bar{R}(X) \leqslant \infty$ et

$$\left.\begin{array}{r} g_{1X}(y-x)^{1/2} \leqslant C'^{-1}\bar{R}(X) \\ g_{2X}(\eta-\xi)^{1/2} \leqslant C'^{-1} \end{array}\right\} \Longrightarrow (g_Y/g_X)^{\pm 1} \leqslant C'.$$

Le théorème 2.1 est alors valable en remplaçant la condition (10) *par*

$$a(X) \leqslant \mathrm{C^{te}}\lambda(X)\bar{R}(X)^2. \tag{11}$$

On se ramène comme précédemment au cas $\lambda = 1$ et $a \geqslant 1$. Pour des vecteurs T vérifiant $g_X(T) \leqslant 1$, la démonstration précédente montre que l'on a $|\partial_T a(X)| \leqslant \mathrm{C^{te}}(a(X)^{1/2} + a(X)/\bar{R}(X))$ si T est "horizontal" (i.e. parallèle à $\mathbb{R}^d_x$) et $|\partial_T a(X)| \leqslant \mathrm{C^{te}} a(X)$ dans tous les cas.

Cette dernière majoration montre que la condition de lenteur est vérifiée pour a. Montrons que la condition de tempérance est aussi satisfaite. En posant $V = Y - X$ et $Y_t = X + tV$, on a $a(Y) \leqslant a(X) + \partial_V a(X) + \mathrm{C^{te}} \int_0^1 g_{Y_t}(V)\, dt$ compte tenu de l'estimation sur les dérivées secondes de a. On a $|\partial_V a(X)| \leqslant \mathrm{C^{te}} g_X(V)^{1/2} a(X)$ et $g_{Y_t}(V) \leqslant C g_X(V)(1 + g_X^\sigma(V))^N$. On a donc $a(Y) \leqslant \mathrm{C^{te}} a(X)(1 + g_X^\sigma(V))^N$. Nous avons ainsi montré que a est un g-poids, et il en est de même de $a^{1/2}$ et $a^{-1/2}$.

Comme ci-dessus, on pose $b = a^{1/2}$ et on se ramène à prouver que $R_2(b, b) \in S(1, g)$. Il faut maintenant reprendre l'argument du théorème 1.2. Pour chaque $X_0 \in \mathcal{X}$, on peut choisir une base de $\mathbb{R}^d$ dans laquelle g_{1X_0} et $g_{2X_0}^{-1}$ se diagonalisent simultanément et telle que leur moyenne géométrique prenne la forme $\sum dx_j^2$. En y adjoignant les vecteurs de la base duale de $(\mathbb{R}^d)^\star$, on obtient une base symplectique dans laquelle γ_{X_0} prend la forme $\sum dx_j^2 + \sum d\xi_j^2$. On peut écrire $R_2(b,b)$ comme somme finie d'intégrales, pour $\theta \in [0,1]$, de termes du type

$$c = (\partial_{S_1}\partial_{S_2} b) \underset{\theta}{\#} (\partial_{S_3}\partial_{S_4} b) \tag{12}$$

où les S_j sont des éléments de la base ci-dessus, deux d'entre eux étant horizontaux et les deux autres verticaux. On a $g_{X_0}(S_j) \leqslant \gamma_{X_0}(S_j) = 1$. Nous poserons $\mu_j(X) = \gamma_X(S_j)^{1/2}$ et nous distinguerons deux types de cas

— S_1 horizontal et S_2 vertical. On peut contrôler les semi-normes du premier facteur dans $S(\mu_1\mu_2, g)$, et celles du second facteur dans $S(\mu_3\mu_4, g)$. Le point essentiel est la majoration

$$\frac{|\partial_{S_1} a(X) \partial_{S_2} a(X)|}{a(X)^{3/2}} \leqslant \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \frac{a(X)\left(a(X)^{1/2} + a(X)/\bar{R}(X)\right)}{a(X)^{3/2}} \mu_1(X)\mu_2(X),$$

le membre de droite étant majoré par $\mathrm{C}^{\mathrm{te}}\mu_1(X)\mu_2(X)$ en vertu de (11).

— S_1 et S_2 horizontaux. On a alors

$$\frac{|\partial_{S_1} a(X) \partial_{S_2} a(X)|}{a(X)^{3/2}} \leqslant \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \frac{\left(a(X)^{1/2} + a(X)/\bar{R}(X)\right)^2}{a(X)^{3/2}} \mu_1(X)\mu_2(X),$$

qui se majore par $a(X)^{-1/2}\mu_1(X)\mu_2(X)$. En majorant aussi les dérivées, on peut estimer les semi-normes du premier facteur de (12) dans l'espace $S(a^{-1/2}\mu_1\mu_2)$. Pour le second facteur, où S_3 et S_4 sont verticaux, on peut contrôler de même ses semi-normes dans $S(a^{1/2}\mu_3\mu_4)$.

Dans les deux cas, on obtient donc $c \in S(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)$, les semi normes étant indépendantes de X_0 et du choix des S_j. On en déduit que $R_2(b,b) \in S(1,g)$ en reprenant la fin de la démonstration du théorème 1.2.

Exemple 2.4. — Si g est la métrique "de type $(1,0)$", on a $\bar{R} = \infty$ et la condition (9) s'écrit

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a\right| \leqslant \langle\xi\rangle^{\frac{|\beta|-|\alpha|}{2}} = \langle\xi\rangle^{1-|\alpha|} \langle\xi\rangle^{\frac{|\alpha|+|\beta|-2}{2}} \quad \text{pour } |\alpha| + |\beta| \geqslant 2.$$

Si on compare avec la condition classique (1), on voit que la condition portant sur les dérivées d'ordre k est inchangée pour $k = 2$, supprimée pour $k < 2$, et affaiblie pour $k > 2$. On remarque aussi que la condition ne se distingue pas de celle que l'on obtiendrait pour la métrique de type $(1/2, 1/2)$ qui, en l'occurrence, est la métrique λg (ou γ).

De même, pour chaque $\delta < 1$, la condition

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a\right| \leqslant \langle\xi\rangle^{\delta(|\beta|-|\alpha|)} \quad \text{pour } |\alpha|+|\beta| \geqslant 2.$$

garantit, si a est positif, que a^w est borné inférieurement.

3. Inégalité de Fefferman-Phong

Nous conservons les notations de la section précédente, et en particulier la définition (8) du rayon de lenteur $R(X)$.

Théorème 3.1. — *Soit a une fonction positive, de classe C^∞, définie sur $\mathcal{X}$ et vérifiant*

$$\left|\prod_{j=1}^{k} \partial_{T_j} a(X)\right| \leqslant C_k \lambda(X)^{k/2} \quad \textit{pour } k \geqslant 4 \textit{ et } g_X(T_j) \leqslant 1, \tag{13}$$

$$a(X) \leqslant \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \lambda(X)^2 R(X)^4, \tag{14}$$

$$|\partial_{T_1} \partial_{T_2} a(X)| \leqslant \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \lambda(X)^2 R(X)^2 \quad \textit{pour } g_X(T_j) \leqslant 1. \tag{15}$$

L'opérateur a^w est alors borné inférieurement.

Il est clair que les hypothèses ci-dessus sont satisfaites si $a \in S(\lambda^2, g)$ et on retrouve l'énoncé classique. Dans le cas particulier de la métrique de type $(0, 0)$, on obtient l'énoncé suivant, dont la démonstration sera en fait une étape pour la démonstration du cas général.

Théorème 3.2. — *Soit a une fonction positive vérifiant*

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(X)\right| \leqslant C_{|\alpha|+|\beta|} \quad \textit{pour } |\alpha|+|\beta| \geqslant 4. \tag{16}$$

Alors a^w est borné inférieurement par une constante ne dépendant que d'un nombre fini des C_k, $k \geqslant 4$.

Remarque 3.3. — La démonstration du théorème 3.1 que nous allons esquisser est directement inspirée de la démonstration originale de Fefferman-Phong [**FP**] et de celle du théorème 18.6.8 de [**Hö**], mais plusieurs différences vont apparaître.

1. — Dans les démonstrations classiques, on suppose $a \in S(\lambda^2, g)$ et on se localise dans des boules plus petites que les g-boules (i.e. on introduit une métrique $G \geqslant g$ adaptée au symbole). Dans notre situation, où on peut avoir $\lambda = 1$, une telle construction n'est pas possible sans violer le principe d'incertitude. En fait, après nous être ramené au cas $\lambda = 1$, c'est une métrique $G \leqslant g$ que nous construirons.
2. — Pour un poids m convenable, le symbole a appartiendra à $S(m, g)$

mais pas, contrairement au cas classique, à $S(m, G)$. Toutefois, les estimations des quatre premières dérivées de a sont celles de cette dernière classe de symboles. Cette situation, analogue à celle du calcul paradifférentiel (où les métriques de type $(1,0)$ et $(1,1)$ jouent le rôle de G et g), permet d'avoir un développement limité de la formule de composition des symboles avec de bonnes estimations du reste.
3. — La démonstration comporte une récurrence sur la dimension et l'on doit prouver qu'une fonction composée $a(F(X'), X')$ vérifie les mêmes estimations que a ce qui, sous nos hypothèses, est un peu plus délicat.

La démonstration se fera en plusieurs étapes, et les lemmes suivants nous serviront d'abord dans la démonstration du théorème 3.2, puis dans celle du théorème 3.1. Sauf indication du contraire, les "constantes" ne dépendront que de celles apparaissant dans (14), (15) et de la constante C_4 de (13) ou (16). On supposera toujours $a(X) \geqslant 1$.

Lemme 3.4. — *Supposons vérifiées les hypothèses du théorème 3.1 avec $\lambda = 1$, posons*

$$\rho(Y) = \max\left\{a(Y)^{1/4}\,;\ \left|\partial_S^2 a(Y)\right|^{1/2} \,\middle|\, g_Y(S) \leqslant 1\right\} \quad \text{et } G_Y = \rho(Y)^{-2} g_Y.$$

La métrique G est une métrique de Hörmander, ρ est un g-poids et un G-poids et on a, pour δ assez petit,

$$\left.\begin{array}{r} G_Y(X-Y) \leqslant \delta^2 \\ G_Y(T_j) \leqslant 1 \\ 0 \leqslant k \leqslant 4 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left|\prod_{j=1}^{k} \partial_{T_j} a(X)\right| \leqslant \mathrm{C^{te}} \rho(Y)^{4-k}. \tag{17}$$

On a $\rho(Y) \leqslant \mathrm{C^{te}} R(Y)$ en vertu de (14) et (15) et la métrique g est essentiellement constante dans les boules

$$B_{Y,\delta} = \left\{X \,\middle|\, G_Y(X-Y) \leqslant \delta^2\right\}$$

pour δ assez petit. Un développement de Taylor à l'ordre 4 (voir [**Hö**] lemme 18.6.9) permet d'obtenir les estimations (17). Il en résulte que $(\rho(X)/\rho(Y))^{\pm 1} \leqslant \mathrm{C^{te}}$ pour $x \in B_{Y,\delta}$ et la propriété de lenteur est donc vérifiée pour G.

Pour $Z \in \mathcal{X}$, en posant $Y_t = Y + t(Z - Y)$ et en utilisant encore la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} a(Z) &\leqslant \mathrm{C^{te}} \left\{ \rho(Y)^4 + \cdots + \rho(Y) g_Y(Z-Y)^{3/2} + \int_0^1 g_{Y_t}(Z-Y)^2 \, dt \right\} \\ &\leqslant \mathrm{C^{te}} \rho(Y)^4 \left(1 + g_Y^\sigma(Z-Y)\right)^N \leqslant \mathrm{C^{te}} \rho(Y)^4 \left(1 + G_Y^\sigma(Z-Y)\right)^N . \end{aligned}$$

On majore de même le carré des dérivées secondes de $a(Z)$, et donc $\rho(Z)^4$, par les membres de droite. Il en résulte que G est une métrique de Hörmander et que ρ est un poids pour les deux métriques.

On a $a \in S(\rho^4, g)$, il est faux en général que l'on ait $a \in S(\rho^4, G)$, mais les estimations (17) assurent que

$$\left| \prod_{j=1}^k \partial_{S_j} a(X) \right| \in S(\rho^4, g) \quad \text{pour } 0 \leqslant k \leqslant 4 \text{ et } G_X(S_j) \leqslant 1.$$

Lemme 3.5. — *Sous les hypothèses du théorème 3.1 avec $\lambda = 1$, supposons qu'il existe $\delta_1 < \delta$ et, pour tout Y, une fonction $a_Y \in C^\infty(\mathcal{X})$ égale à a dans $B(Y, \delta_1)$ et vérifiant, avec des constantes indépendantes de X et Y,*

$$\left| \prod_{j=1}^k \partial_{T_j} a_Y(X) \right| \leqslant \begin{cases} C' \rho(Y)^{4-k} & \text{si } k \leqslant 4 \\ C'_k & \text{si } k > 4 \end{cases} \quad \text{pour } g_Y(T_j) \leqslant 1, \tag{18}$$

et

$$(a_Y^w u \mid u) \geqslant -C' \left\| u \right\|_{L^2}^2 .$$

Alors a^w est borné inférieurement.

On fixe une partition de l'unité du type suivant

$$1 = \int \Phi_Y(X)^2 \left| G_Y \right|^{1/2} dY$$

où les Φ_Y, à support dans B_{Y,δ_1}, forment un ensemble borné dans $S(1, G)$. On a noté $|G_Y|$ le déterminant de la forme quadratique G_Y.

On a le développement

$$\begin{aligned} \Phi_Y \# a_Y \# \Phi_Y = \Phi_Y a_Y \Phi_Y + \tfrac{1}{2i} \left(\Phi_Y \left\{ a_Y \, , \, \Phi_Y \right\} + \left\{ \Phi_Y \, , \, a_Y \right\} \Phi_Y \right) \\ + R_2(\Phi_Y a_Y, \Phi_Y) + R_1(\left\{ \Phi_Y \, , \, a_Y \right\}, \Phi_Y) + R_2(\Phi_Y, a_Y) \# \Phi_Y , \end{aligned}$$

où le premier terme vaut $a\Phi_Y^2$, le second étant nul. On peut estimer les termes de reste en utilisant le corollaire 1.3 pour la métrique constante g_Y, en majorant les dérivées d'ordre $\geqslant 2$ de a_Y par le poids $\rho(Y)^2$, et celles de Φ_Y par le poids $\rho(Y)^{-2}(1 + g_Y^\sigma(\cdot - B_{Y,\delta}))^{-N}$ (égal à $\rho(Y)^{-2}$

sur le support de Φ_Y). Les constantes de structure de ces poids (et des métriques constantes) ne dépendant pas de Y, on obtient

$$\Big|\prod_{j=1}^{k} \partial_{T_j}(\Phi_Y \# a_Y \# \Phi_Y - a\Phi_Y^2)\Big| \leqslant C''_{kN}(1+g_Y^\sigma(\cdot - B_{Y,\delta}))^{-N}$$

pour $g_Y(T_j) \leqslant 1$, avec des constantes indépendantes de Y. En intégrant en Y, compte tenu de $G_Y \leqslant g_Y^\sigma$, on obtient

$$a - \int \Phi_Y \# a_Y \# \Phi_Y \, |G_Y|^{1/2} \; dY \in S(1,g).$$

On a d'autre part

$$\int \Big((\Phi_Y \# a_Y \# \Phi_Y)^w u \,\Big|\, u \Big) \, |G_Y|^{1/2} \; dY \\ \geqslant -C' \int \|\Phi_Y^w u\|_{L^2}^2 \, |G_Y|^{1/2} \; dY \geqslant -C'' \, \|u\|_{L^2}^2 \,,$$

et le lemme résulte immédiatement des deux relations qui précèdent.

3.6. Démonstration du théorème 3.2. — La métrique g est ici la métrique euclidienne de $\mathcal{X}$ et la métrique G est fournie par le lemme 3.4. On fixe $\delta_1 > 0$, assez petit devant δ, et une famille, bornée dans $S(1,G)$, de fonctions χ_Y à support dans $B_{Y,\delta}$ et valant 1 dans B_{Y,δ_1}.

Notre objectif est de construire des fonctions a_Y vérifiant les conditions du lemme 3.5 et nous distinguerons deux régions de l'espace des phases.

Zone d'ellipticité. — Il s'agit des points Y où $a(Y) \geqslant \delta_1 \rho(Y)^4$. On pose $b_Y = \chi_Y a^{1/2}$. On a

$$b_Y \# b_Y = \chi_Y^2 a + R_2(b_Y, b_Y).$$

Les estimations (17) entraînent que les dérivées de b d'ordre $\geqslant 2$ sont bornées, et on a donc $R_2(b_Y, b_Y) \in S(1,g)$. Il suffit de poser $a_Y = \chi_Y^2 a$ pour satisfaire aux conditions du lemme.

Zone de convexité. — Pour les autres points $Y = (y,\eta) \in \mathcal{X}$, on a $a(Y) \leqslant \delta_1 \rho(Y)^4$ et il résulte encore de la formule de Taylor que $|\partial_T a(Y)| \leqslant \mathrm{C^{te}} \delta_1^{1/2} \rho(Y)^3$. On a $\sup_T \partial_T^2 a(Y) = \rho(Y)^2$ pour $|T| = 1$ et on peut supposer, quitte à faire un changement de coordonnées symplectiques conservant la métrique, que $\partial^2 a / \partial_{\xi_1}^2 = \rho(Y)^2$. On posera $X' = (x_1, x_2, \xi_2, \ldots, x_d, \xi_d)$.

Pour δ_1 assez petit devant δ, l'équation $\partial a / \partial \xi_1 (\xi_1, X') = 0$ possède une solution $\xi_1 = F(X')$ avec $|\xi_1 - \eta_1| \leqslant \delta \rho(Y)/2$ pourvu que $|X' - Y'| \leqslant$

$2\delta_1\rho(Y)$. Pour des vecteurs unitaires S'_j du sous-espace $\{\xi_1{=}0\}$, on a

$$\Big|\prod_{j=1}^{k} \partial_{S'_j} F(X')\Big| \leqslant \begin{cases} \mathrm{C^{te}}\rho(Y)^{1-k} & \text{pour } k \leqslant 3 \\ C'_k\rho(Y)^{-2} & \text{pour } k > 3 \end{cases} \tag{19}$$

où C'_k ne dépend que des C_l de (16) avec $4 \leqslant l \leqslant k{+}1$. On peut écrire

$$a(\xi_1, X') = a(F(X'), X') + (\xi_1 - F(X'))^2 L(X)$$

$$L(\xi_1, X') = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 a}{\partial \xi_1^2}\Big((1{-}t)F(X'){+}t\xi_1\,, X'\Big)\,dt.$$

Posons $a_Y = b_Y^2 + c_Y$ avec $b_Y = \chi_Y(\xi_1 - F(X'))L(X)^{1/2}$ et $c_Y(X') = a(F(X'), X')\chi'_Y(X')$, où les χ'_Y sont à support dans la boule de centre Y' et de rayon $2\delta_1\rho(Y)$, et valent 1 dans la boule moitié.

En utilisant le fait que $\partial^2 a/\partial\xi_1^2 \geqslant \mathrm{C^{te}}\rho(Y)^2$ dans $B_{Y,\delta}$, on montre sans difficulté que les dérivées d'ordre $\geqslant 2$ de b_Y sont bornées. On a donc $b_Y \# b_Y - b_Y^2 \in S(1, g)$ et l'opérateur de symbole b_Y^2 est borné inférieurement.

En ce qui concerne c_Y, nous allons montrer que ses dérivées d'ordre $\geqslant 4$ sont bornées ce qui revient à estimer les dérivées d'ordre $\geqslant 4$ de $a(F(X'), X')$ pour $|X'| \leqslant 2\delta_1\rho(Y)$. La dérivation de F ne fait gagner un facteur $\rho(Y)$ que pour les trois premières dérivées, mais il se produit un phénomène de type "composition rugueuse" : on a

$$\frac{\partial}{\partial X'_j} a(F(X'), X') = \frac{\partial a}{\partial \xi_1}(F(X'), X')\frac{\partial F}{\partial X'_j}(X') + \frac{\partial a}{\partial X'_j}(F(X'), X')$$

et le premier terme du membre de droite est nul par définition de F. L'estimation des dérivées d'ordre $\geqslant 3$ de $\partial a/\partial X'_j(F(X'), X')$ ne présente pas de difficulté compte tenu de (19).

Le symbole $c_Y(x_1, \cdot)$ vérifie donc, uniformément en x_1, les hypothèses du théorème 3.2 en dimension $d-1$. En supposant, par récurrence, le théorème établi dans ce cas, on aura donc

$$\begin{aligned}(c_Y^w u \,|\, u) &= \int \Big(c_Y^w(x_1, x', D')u(x_1, \cdot) \,\Big|\, u(x_1, \cdot)\Big)\, dx_1 \\ &\geqslant -\mathrm{C^{te}} \int \|u(x_1, \cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d-1})}\, dx_1 = -\mathrm{C^{te}}\, \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,.\end{aligned}$$

Cela montre que les a_Y^w sont (uniformément) bornés inférieurement et achève la démonstration du théorème 3.2.

3.7. Démonstration du théorème 3.1. — La métrique g est maintenant une métrique générale et quitte à remplacer g par λg, ce qui ne modifie pas les conditions requises sur a, on peut supposer $\lambda(X) = 1$. Nous noterons G la métrique fournie par le lemme 3.4 et χ_Y une famille bornée dans $S(1, G)$ de fonctions à support dans la G-boule $B_{Y,\delta}$ et valant 1 dans B_{Y,δ_1}. Nous allons montrer que les fonctions $a_Y = \chi_Y a$ vérifient les hypothèses du lemme 3.5.

Les estimations (18) sont immédiates et il reste à montrer la condition sur les opérateurs a_Y^w. Quitte à composer a_Y avec une transformation symplectique, on peut supposer g_Y mise sous la forme $\sum(dx_j^2 + d\xi_j^2)/\lambda_j$. La g_Y-norme des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{2d}$ est alors $\leqslant 1$, et les estimations (18), pour $k \geqslant 4$, assurent que les fonctions $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a_Y$ sont bornées pour $|\alpha| + |\beta| \geqslant 4$ par des constantes indépendantes de Y. D'après le théorème 3.2, il en résulte que les opérateurs a_Y^w sont uniformément bornés inférieurement, ce qui termine la démonstration.

Références

[FP] C. Fefferman & D.H. Phong, On positivity of pseudo-differential operators, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **75** (1978) 4673–4674.

[Hö] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, Springer-Verlag (1985).

Jean-Michel Bony, Centre de Mathématiques, U.M.R 7640 du C.N.R.S., École Polytechnique, 91128 Palaiseau cedex • *E-mail :* bony@math.polytechnique.fr