Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1998-1999

C Cheverry

Effet régularisant pour une loi de conservation scalaire multidimensionnelle

Séminaire É. D. P. (1998-1999), Exposé n° XXIV, 13 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1998-1999____A24_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

EFFET RÉGULARISANT POUR UNE LOI DE CONSERVATION SCALAIRE MULTIDIMENSIONNELLE

PAR

C. CHEVERRY

CNRS UMR 6625 IRMAR
Université de Rennes I, Campus de Beaulieu
35 042 Rennes Cedex, France
cheverry@maths.univ-rennes1.fr

0. Introduction

On s'intéresse dans cet exposé au problème de Cauchy associé à une loi de conservation scalaire multidimensionnelle:

$$(\mathcal{L}_0^N) \quad \begin{cases} \partial_t \varrho(t,x) + \sum_{i=1}^N \partial_{x_i}(A_i \circ \varrho)(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^N \\ \varrho(0,x) = \varrho_0(x) \end{cases}$$

où le flux $A(\cdot)$ est supposé suffisamment régulier:

$$(\mathcal{H}_1) \qquad A := (A_1, \dots, A_N) \in C^3(\mathbb{R};\mathbb{R}^N), \quad a := A' \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}^N).$$

La donnée initiale est choisie bornée et à support compact:

$$(\mathcal{H}_2) \qquad \varrho_0^\infty := \| \varrho_0 \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\varrho_0(x)| < \infty.$$

Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$, le problème de Cauchy $(\mathcal{L}_0^N)$ est bien posé. Les travaux de Kružkov[Kr] garantissent l'existence d'une solution faible, unique sous des conditions d'entropie, qui respecte le principe du maximum et qui est continue en temps à valeurs $L^1(\mathbb{R}^N)$:

$$(0.1) \qquad \| \varrho \|_{L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N)} \leq \varrho_0^\infty, \quad \varrho \in C^0\big(\mathbb{R}_*^+; L^1(\mathbb{R}^N)\big).$$

L'étude des propriétés de la fonction $\varrho(\cdot)$ ainsi exhibée est une préoccupation ancienne, considérée par exemple dans les articles [Br], [L1], [Ol], [P-T], [Se], [Sm], [Ta], [Vo].

C'est un fait avéré que la non linéarité du flux conduit à des mécanismes de dissipation (augmentation d'entropie, expansion des ondes de raréfaction, cancellations entre chocs et ondes de détente interagissant ...). De manière heuristique, ces phénomènes se traduisent au niveau de la solution $\varrho(\cdot)$ par un gain de régularité ou encore par un comportement asymptotique en temps décroissant. Ces deux aspects ont été abordés sous des angles différents: méthode des caractéristiques [Co], [D1], [L2], [L-P], [Sc], [Zu] ; compacité par compensation [E-E], [Mu] ; point de vue semi-groupe [B-C], [Ot] ; formulation cinétique et lemmes de moyenne [L-P-T], [Va].

Nous proposons ici une analyse qui réalise la synthèse de ces approches et qui s'ouvre sur des résultats (visiblement) optimaux. Seuls les arguments formels sont fournis. Les démonstrations rigoureuses sont rédigées dans [Ch].

Notre démarche introduit un opérateur de scattering qui substitue à l'évolution non linéaire $(\mathcal{L}_0^N)$ un modèle linéaire:

$$(\mathcal{T}_0^N) \quad \begin{cases} \partial_s g(s,x,v) + a(v)\cdot\nabla_x g(s,x,v) = 0, \quad (s,x,v)\in\mathbb{R}^{N+2} \\ g(0,x,v) = g_0(x,v), \quad g(t,x,v) = \chi_{\varrho(t,x)}(v) \end{cases}$$

où il est fait usage du profil cinétique:

$$\alpha\in\mathbb{R}, \quad L^\infty(\mathbb{R}) \ni \chi_\alpha(\cdot) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < v \le \alpha. \\ -1 & \text{si} \quad \alpha \le v < 0. \\ 0 & \qquad \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La difficulté consiste à montrer que la dérivée en v de $g_0(\cdot)$ est une mesure de Radon bornée:

$$\Theta(t,\varrho_0) := \| \partial_v g_0 \|_{\mathbb{M}_b(\mathbb{R}_x^N\times\mathbb{R}_v)} < \infty, \quad \forall\, t\in\mathbb{R}_*^+. \tag{0.2}$$

L'estimation (0.2) est fondamentale. Elle est exploitée après moyennisation en v de l'équation de transport $(\mathcal{T}_0^N)$. Elle donne accès aux effets de lissage sous-jacents à l'évolution non linéaire $(\mathcal{L}_0^N)$. Ceux-ci s'expriment de façon variée:

- La divergence de la vitesse de propagation est systématiquement une mesure de Radon bornée (voir la proposition 1.1).

- Pour $N=1$, l'application qui à t dans $\mathbb{R}_*^+$ associe $\varrho(t,\cdot)$ dans $L^1(\mathbb{R})$ est meilleure que ce qui est annoncé en (0.1) (voir la proposition 2.1).

- La trace de $\varrho(\cdot)$ à tout instant $t>0$ tombe spontanément dans des espaces de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}_x^N)$ avec $s>0$ (voir la proposition 2.2).

- A tout instant $t>0$, la fonction $\varrho(t,\cdot)$ récupère un soupçon de régularité deux-microlocale. Les moyennes par rapport à n'importe quel feuilletage de codimension un d'expressions non linéaires bien ajustées de $\varrho(\cdot)$ sont nécessairement à variations bornées en la variable transverse (voir la proposition 2.3).

Par souci de concision, on ne précise pas toutes les notations. Celles-ci sont définies sans ambiguité dans notre article [Ch] auquel le lecteur peut se reporter.

1. L'opérateur de scattering

Les effets de lissage dépendent du comportement de l'application qui à v associe $A(v)$. Ils sont plus marqués lorsque l'accélération $A''(\cdot)$ s'annule peu. En dimension un d'espace, il est aisé de classifier les flux selon ce critère. Trois situations se dégagent:

- La dégénérescence linéaire:

$$(\mathcal{LD})^1 \qquad A''(v) = a'(v) = 0, \quad \forall\, v \in [-\varrho_0^\infty, \varrho_0^\infty].$$

- L'occurence d'un (unique) point d'inflexion:

$$(\mathcal{I})_1^1 \qquad \exists\,!\; i_A \in [-\varrho_0^\infty, \varrho_0^\infty]; \quad A''(i_A) = a'(i_A) = 0.$$

Dans la suite, il sera uniquement tenu compte des points d'inflexion non dégénérés pour lesquels l'accroissement:

$$\mathbb{R} \ni v \longmapsto \bar{A}(v) := A(i_A + v) - A(i_A) - A'(i_A)\, v \in \mathbb{R}$$

est astreint à:

$$(\mathcal{I})_2^1 \qquad \exists\, \nu_A > 1; \quad |v\; \bar{A}'(v)| \geq \nu_A\, |\bar{A}(v)|, \quad \forall\, v \in [-\varrho_0^\infty, \varrho_0^\infty].$$

Pour les flux homogènes $A(v) = c\, v^{m+1}$ avec $m \geq 2$, on a exactement:

$$v\; A'(v) \,/\, A(v) \;=\; m+1 \;=\; \nu_A \geq 3, \quad \forall\, v \in [-\varrho_0^\infty, \varrho_0^\infty].$$

Pour les flux qui ne sont pas plats au voisinage du point d'inflexion:

$$(1.1) \quad \exists\, m \geq 2, \quad A^{(m+1)}(i_A) \neq 0, \quad A^{(j)}(i_A) = 0, \quad \forall\, j \in \{0, \dots, m\},$$

la minoration $\nu_A > 1$ est une conséquence de la condition d'entropie donnée par Oleinik[Ol].

- La vraie non linéarité:

$$(\mathcal{VNL})^1 \qquad A''(v) = a'(v) \neq 0, \quad \forall\, v \in [-\varrho_0^\infty, \varrho_0^\infty].$$

En multidimension d'espace, il devient plus difficile de mesurer la façon dont le flux s'annule. Une manière naturelle de procéder consiste à polariser le flux dans chaque direction afin de ramener la discussion à la situation monodimensionnelle détaillée ci-dessus. La notion adaptée est la suivante:

<u>*Définition:*</u> *On dit que le flux $A(\cdot)$ est* ***admissible*** *si pour tout angle ω de la sphère $\mathbb{S}^{N-1}$ la fonction $\omega \cdot A(\cdot)$ vérifie l'une des trois conditions $(\mathcal{LD})^1$ ou $(\mathcal{I})^1 := (\mathcal{I})_1^1 \cup (\mathcal{I})_2^1$ (avec une constante ν_A indépendante du choix de ω dans $\mathbb{S}^{N-1}$) ou $(\mathcal{VNL})^1$.* $\triangleleft$

Les flux $A(\cdot)$ dont toutes les composantes $A_i(\cdot)$ sont des polynômes de degré $m+1$ inférieur à 3 sont admissibles. Si $m=0$, on a toujours $(\mathcal{LD})^1$. Si $m=1$, on est confronté à $(\mathcal{LD})^1$ ou $(\mathcal{VNL})^1$. Si $m=2$, les trois possibilités $(\mathcal{LD})^1$, $(\mathcal{I})^1$ et $(\mathcal{VNL})^1$ sont de mise. Un flux multidimensionnel ne peut jamais vérifier $(\mathcal{VNL})^1$ pour tous les angles de la sphère. En effet:

$$N \geq 2 \implies \forall\,(A,v) \in C^3(\mathbb{R};\mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}, \quad \exists\,\omega \in \mathbb{S}^{N-1}; \quad \omega \cdot A''(v) = 0.$$

Cette remarque explique pourquoi les mécanismes de dissipation induits par la non linéarité sont atténués lorsque plusieurs directions interviennent. Pour $N \geq 2$, la solution $\varrho(\cdot)$ n'acquiert pas systématiquement une variation totale finie. Il en va de même pour l'expression composée $B \circ \varrho(\cdot)$ dès que $B(\cdot) \not\equiv 0$.

Notre attention se tourne à présent vers la transformation Ξ_t^N dont le mécanisme se lit sur le diagramme $(\mathcal{D})$ représenté ci-dessous:

$$\begin{array}{ccccccc}
L^\infty(\mathbb{R}^N) & \ni & \varrho(t,x) & \longrightarrow & \chi_{\varrho(t,x)}(v) & \in & L^\infty(\mathbb{R}^{N+1}) \\
(\mathcal{L}_0^N)\ \Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow\ (\mathcal{T}_0^N) \\
L^\infty(\mathbb{R}^N) & \ni & \varrho_0(x) & \underset{\Xi_t^N}{\longrightarrow} & g_0(x,v) & \in & L^\infty(\mathbb{R}^{N+1})
\end{array}$$

A gauche de $(\mathcal{D})$, l'évolution non linéaire s'interprète à l'aide de la formulation cinétique décrite dans [Br], [P-T]:

$$\partial_s f(s,x,v) + a(v) \cdot \nabla_x f(s,x,v) = \partial_v m(s,x,v), \quad f(s,x,v) = \chi_{\varrho(s,x)}(v),$$

qui implique:

$$(1.2) \qquad \|\, \partial_v f(s,\cdot)\, \|_{\mathbb{M}_b(\mathbb{R}_x^N \times \mathbb{R}_v)} = 2\ |supp\ \varrho(s,\cdot)| \ < \ \infty, \quad \forall\ s \in [0,t].$$

A droite de $(\mathcal{D})$, le retour à l'instant initial se fait via le transport libre $(\mathcal{T}_0^N)$. Le terme source $\partial_v m(\cdot)$ a disparu de sorte que l'équation est linéaire, réversible. On retient la formule explicite:

$$(1.3) \qquad \Xi_t^N(\varrho_0)(x,v) \ = \ g_0(x,v) \ = \ \chi_{\varrho(t,x+ta(v))}(v).$$

A première vue, l'application $g_0(\cdot)$ est simplement bornée (à valeurs discrètes sélectionnées parmi le triplet $\{-1,0,1\}$) et à support compact. En fait, il y a sous-jacent à la construction de Ξ_t^N une propriété de compatibilité qui lie les contraintes $(\mathcal{L}_0^N)$ et $(\mathcal{T}_0^N)$, qui veut que la majoration (1.2) ne soit pas perturbée après retour via le transport libre. Ce principe se traduit par une estimation fine ayant trait au nombre $\Theta(t,\varrho_0)$.

Lorsque la loi scalaire $(\mathcal{L}_0^N)$ est à coefficients constants ou lorsque la solution $\varrho(\cdot)$ est continue sur la bande $[0,t]\times\mathbb{R}^N$, l'action de Ξ_t^N sur $\varrho_0(\cdot)$ n'est autre que le passage au profil cinétique $\chi_{\varrho_0(\cdot)}(\cdot)$. On en déduit (0.2). Plus précisément, on a alors: $\Theta(t,\varrho_0)=2\ |supp\,\varrho_0|<\infty$.

La question est de savoir si la borne (0.2) résiste en présence de non linéarité et après la formation des chocs. Conserve t'on l'inégalité stricte (0.2) pour toute donnée initiale $\varrho_0(\cdot)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ lorsque l'accélération $A''(\cdot)$ n'est plus identiquement nulle ?

Une réponse partielle (mais déjà significative) est apportée par le résultat suivant:

Théorème 1.1. *Lorsque le flux $A(\cdot)$ est admissible $\big($et, pour $N>1$, sous une hypothèse non restrictive $(\mathcal{H})$ expliquée dans [Ch]$\big)$, on a:*

$$\exists\ C(A)\in\mathbb{R}^+;\quad \forall\,\varrho_0\in L_c^\infty(\mathbb{R}^N),\quad \forall\ t\in\mathbb{R}_*^+,\qquad \Theta(t,\varrho_0)\ \le\ C(A)\ \ |supp\,\varrho_0+t|\ <\ \infty. \tag{1.4}$$

Nous expliquons en quelques mots comment la démonstration du théorème 1.1 s'articule. Les détails sont précisés dans [Ch].

Pour $\varrho_0(\cdot)$ dans $BV_c(\mathbb{R}^N)$, l'inégalité (1.4) écrite avec une constante $C(A,\varrho_0)$ qui dépend de $\|\ \varrho_0\ \|_{BV(\mathbb{R}^N)}$ est immédiate.

Pour $\varrho_0(\cdot)$ dans $L_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, on procède par approximation. On approche la fonction $\varrho_0(\cdot)$ par une suite $\{\varrho_{0\,\varepsilon}(\cdot)\}_{\varepsilon\in\,]0,1]}$ dont chaque élément est dans $BV_c(\mathbb{R}^N)$. Il s'agit alors d'établir le contrôle uniforme:

$$\exists\, C(A)\in\mathbb{R}^+;\quad \sup_{\varepsilon\in\,]0,1]}\quad C(A,\varrho_{0\,\varepsilon})\ \le\ C(A)\ <\ \infty. \tag{1.5}$$

L'inégalité (1.4) se déduit facilement de l'information (1.5) après passage à la limite (ε tend vers zero). Cette technique est commode, efficace et précise puisqu'elle permet d'exploiter toute la richesse de structure des solutions $BV(\mathbb{R}^N)$. Le point crucial réside ici dans l'obtention de l'inégalité (1.5). Les méthodes employées à cette fin s'adaptent à la spécificité des cas de figure rencontrés. La situation test est la dimension un d'espace ($N=1$). Des calculs explicites sont alors possibles.

Sous $(\mathcal{VNL})^1$, l'estimation (1.4) est le fruit d'une propriété géométrique. Le retour à l'instant initial via le schéma $(\mathcal{D})$ ne provoque pas l'apparition de plis sur le graphe de $g(\cdot)$. En d'autres termes, on dispose pour l'application $g(s,\cdot)$ d'une écriture sous forme réduite:

$$\forall\,\varrho_0\in L_c^\infty(\mathbb{R}),\quad \forall\,(t,s)\in\mathbb{R}^+\times[0,t],\quad \exists\ \tilde\varrho(t,s,\cdot)\in L_c^\infty(\mathbb{R});\qquad g(s,x,v)\ =\ \chi_{\varrho(t,x-(s-t)\,a(v))}(v)\ =\ \chi_{\tilde\varrho(t,s,x)}(v), \tag{1.6}$$

complétée par une localisation concernant le support des données:

$$supp\ \tilde\varrho(t,s,\cdot)\subset supp\ \varrho_0+t\,V.$$

Bien entendu, l'équation hyperbolique non linéaire $(\mathcal{L}_0^N)$ n'est pas réversible. Si un choc est présent à l'instant t, il n'est pas possible de récupérer $\varrho_0(\cdot)$ connaissant seulement la trace $\varrho(t,\cdot)$. Cette particularité n'est pas incompatible avec le procédé de scattering. En effet, la donnée $\varrho_0(\cdot)$ est remplacée (et lissée) sur certains intervalles de $\mathbb{R}$ en un $\tilde{\varrho}_0(\cdot)$ convenable. De toute évidence, la relation (1.6) garantit (0.2).

Sous $(\mathcal{I})^1$, la relation (1.6) est mise en défaut. Les chocs mixtes (c'est à dire ceux qui mettent en jeu deux états situés de part et d'autre du point i_A) conduisent à la formation d'un pli. Il faut vérifier que les contributions qui en découlent ne détruisent pas (0.2). Cela revient à évaluer l'aire occupée par les surfaces qui engendrent les chocs mixtes. A ce niveau, la gestion des discontinuités semi-caractéristiques s'avère particulièrement délicate. A cet endroit, la minoration $(\mathcal{I})^1_2$ joue un rôle crucial. △

En multidimension d'espace, il devient plus difficile de raisonner comme précédemment sur les caractéristiques rétrogrades. On préfère une approche plus directe qui consiste à établir un lien avec la divergence de la vitesse de propagation. On s'intéresse à la distribution:

$$D(t,\cdot) \,:=\, \text{div}\, (a\circ\varrho)(t,\cdot) \,=\, \sum_{i=1}^{N} \, \partial_{x_i}(a_i\circ\varrho)(t,\cdot) \;\in\; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

Lemme 1.1. *On a toujours:*

$$t \;\| \; D(t,\cdot) \; \|_{\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^N)} \leq \Theta(t,\varrho_0), \quad \forall \; (t,\varrho_0) \in \mathbb{R}^+_* \times L^\infty_c(\mathbb{R}^N). \tag{1.7}$$

Lorsque le flux $A(\cdot)$ est admissible, un contrôle inverse est vrai. Il existe une constante $C(A)$ telle que:

$$\Theta(t,\varrho_0) \leq 2 \; |supp \; \varrho(t,\cdot)| + C(A) \; t \; \| \; D(t,\cdot) \; \|_{\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^N)} \; . \tag{1.8}$$

L'inégalité (1.7) est une conséquence directe de l'identité (à comprendre dans un sens formel):

$$\int\!\!\int g_0(x,v) \; \partial_v[b\big(x + t\, a(v)\big)] \;\; dx \; dv \;=\; t \; \int D(t,x) \; b(x) \;\; dx.$$

La comparaison (1.8) se traduit à l'aide du calcul fonctionnel de Vol'pert[Vo] en une information ponctuelle. Il s'agit d'établir:

$$|\int_0^1 (ba'_\nu)\big(x, l_{-\nu}\varrho(t,x) + r \;\, (l_\nu\varrho - l_{-\nu}\varrho)(t,x) \;\; dr \, | \tag{1.9}$$

$$\times \, |(l_\nu \, \varrho - l_{-\nu} \, \varrho)(t,x)| \;\leq\; C(A) \; |(l_\nu a\circ\varrho - l_{-\nu} a\circ\varrho)(t,x)|, \quad \forall \, (t,x) \in \Gamma(\varrho),$$

où $\Gamma(\varrho)$ regroupe l'ensemble des positions en lesquelles la fonction $\varrho(\cdot)$ subit une discontinuité d'ordre zéro (un saut).

La majoration (1.9) est évidente sous $(\mathcal{LD})^1$ et $(\mathcal{VNL})^1$. Sous $(\mathcal{I})^1$, elle résulte de la condition d'entropie mise à jour par Oleinik[Ol]. $\triangle$

D'après (1.8), les majorations (0.2) et (1.4) se ramènent à une estimation sur la quantité $D(\cdot)$. Tel est l'objet de l'énoncé qui suit:

Lemme 1.2. *Lorsque le flux $A(\cdot)$ est admissible $\big($et, pour $N > 1$, sous une hypothèse $(\mathcal{H})$ expliquée dans [Ch]$\big)$, on a:*

$$t \ \| D(t,\cdot) \|_{\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^N)} \leq \ C\big(|supp\ \varrho(t,\cdot)| \big), \quad \forall\ t \in \mathbb{R}^+_* . \tag{1.10}$$

La contrainte $(\mathcal{H})$ n'est pas restrictive. Elle autorise par exemple tous les flux quadratiques.

Nous exposons à présent les raisons qui fondent (1.10).

$\mapsto$ (1): La distribution $D(t,\cdot)$ se décompose en sa partie positive moins sa partie négative:

$$\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^N) \ni D(t,\cdot) \ = \ D^+(t,\cdot) - D^-(t,\cdot), \quad D^{\pm}(t,\cdot) \geq 0. \tag{1.11}$$

Puisque $D(t,\cdot)$ est de moyenne nulle, on a:

$$\| D(t,\cdot) \|_{\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^N)} \ = \ 2 \ \| D^+(t,\cdot) \|_{\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^N)} \ . \tag{1.12}$$

Par conséquent, pour obtenir (1.10), il suffit de concentrer son attention sur $D^+(t,\cdot)$.

$\mapsto$ (2): La condition d'Oleinik associée à $(\mathcal{I})^1_2$ implique l'inégalité stricte $\triangle(a_\nu \circ \varrho)(t,x) < 0$. Il s'ensuit que pour tout $\Gamma \subset \Gamma(\varrho)$, on a:

$$\int_\Gamma D(t,x) \ \mathbb{H}_{N-1}(dx) \ = \ \int_\Gamma \triangle(a_\nu \circ \varrho)(t,x) \ \mathbb{H}_{N-1}(dx) \ \leq \ 0.$$

Cela signifie que les singularités d'ordre zero de la solution $\varrho(\cdot)$ sont incorporées dans $D^-(t,\cdot)$. Elles ne sont pas perçues au niveau de $D^+(t,\cdot)$. Ce fait combiné avec (1.12) indique qu'il convient de porter l'analyse sur la partie $D^+(\cdot)$, à l'intérieur du domaine $\mathbb{R}^N \setminus \Gamma(\varrho)$, là où $D^+(\cdot)$ est suffisamment régulier pour pouvoir progresser à l'aide du calcul différentiel.

$\mapsto$ (3): A l'intérieur de l'ensemble $\mathbb{R}^N \setminus \Gamma(\varrho)$, la fonction $D(\cdot)$ est (génériquement) de classe C^1. Un calcul rapide qui est valide sur le domaine

$$\Upsilon \ := \ \{ \, (t,x) \ ; \quad D^+(t,x) > 0 \, \} \ \subset \ \big(\mathbb{R}^N \setminus \Gamma(\varrho) \big).$$

montre que l'application $D^+(\cdot)$ est assujettie sur Υ à la contrainte différentielle:

$$\partial_t D^+(t,x) \ + \ \sum_{i=1}^N \ a_i \circ \varrho(t,x) \ \partial_{x_i} D^+(t,x) \ + \ D^+(t,x)^2 = 0. \tag{1.13}$$

Cette identité indique que le scalaire $D^+(t,x)$ est borné par $1/t$ pour peu que la caractéristique rétrograde issue de (t,x) soit bien définie et contenue à l'intérieur de Υ sur l'intervalle $[0,t]$. Une telle estimation est en accord avec (1.10). $\triangle$

L'implémentation rigoureuse des étapes (1), (2) et (3) se heurte à des obstacles d'ordre technique. Par exemple l'apparition (éventuelle) de surfaces de contact fait que l'expression $D^+(t,y)$ peut tendre vers $+\infty$ lorsque la position (t,y) se rapproche de $\Gamma(\varrho)$. L'exploitation de l'équation différentielle (1.13) devient alors délicate. Dans [Ch], ces difficultés sont contournées par approximation parabolique. Cette approche n'est pas forcément la mieux adaptée car elle requiert la vérification de l'hypothèse $(\mathcal{H})$.

Néanmoins, la combinaison des lemmes 1.1 et 1.2 justifie (0.2) pour une large classe de flux. La majoration (0.2) exprime une propriété de compatibilité qui lie $(\mathcal{L}_0^N)$ et $(\mathcal{T}_0^N)$. On s'attend à ce qu'elle soit satisfaite en toute généralité.

L'intérêt de la démarche ainsi dégagée tient à ses nombreuses applications.

2. Des résultats de régularité

Le point de vue dégagé au théorème 1.1 se révèle fructueux. Il permet d'améliorer notre connaissance des phénomènes de régularisation.

Discutons d'abord des progrès réalisés en ce qui concerne la dimension un d'espace.

- Benillan et Crandall ont observé que les solutions de $(\mathcal{L}_0^1)$ associées à une donnée $\varrho_0(\cdot)$ dans $L^1(\mathbb{R})$ et à un flux homogène de degré $m+1$ $\big($avec $A(\lambda\, v)=\lambda^{m+1}A(v)\big)$ satisfont:

$$\begin{aligned}(2.1)\qquad t \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{1}{h} \ \| \varrho(t+h,\cdot)-\varrho(t,\cdot) \|_{L^1(\mathbb{R})} \\ \leq 2 \ \| \varrho_0 \|_{L^1(\mathbb{R})} \ / m, \quad \forall\, t\in\mathbb{R}_*^+.\end{aligned}$$

La preuve donnée dans [B-C] repose sur deux observations. D'une part, l'équation $(\mathcal{L}_0^1)$ n'est pas affectée par le changement d'expressions $\varrho(t,x)$ en $\lambda^{1/m}\ \varrho(\lambda\, t,x)$. D'autre part, le semi-groupe associé à $(\mathcal{L}_0^1)$ est une contraction dans $L^1(\mathbb{R})$. Le premier argument (à savoir l'invariance par scaling) ne résiste pas à la perte d'homogénéité. Toutefois, il est possible d'étendre les idées de Bénillan et Crandal à condition de se placer sous l'hypothèse (1.1). Dans le cadre (1.1), suivant les idées de [B-C], F. Otto a en effet récemment mis à jour la régularité Hölderienne:

$$\varrho\in C^s\big(\mathbb{R}_*^+;L^1(\mathbb{R})\big), \quad s=1/(m+1)\leq 1/3<1.$$

Il se trouve que l'indice s peut être choisi aussi proche que souhaité du seuil 1 . En tout cas, l'inégalité (2.1) est de mise pour tous les flux raisonnables:

Proposition 2.1. *Sous (1.1), l'application qui à t associe $\varrho(t,\cdot)$ vit dans l'espace $Lip_{loc}\big(\mathbb{R}_*^+; L^1(\mathbb{R})\big)$.*

- Dafermos[D2] a étudié avec soin le comportement asymptotique en temps des solutions d'une loi scalaire ayant un unique point d'inflexion (le contexte est $N=1$ sous (1.1) et pour $i_A=0$). Il remarque incidemment que l'application $D\circ\varrho(\cdot)$ où $D(\cdot)$ désigne la fonction conjuguée du flux:

$$D(\varrho) := \varrho\ A'(\varrho) - A(\varrho) = \int_0^{\varrho} v\ a'(v)\ \ dv, \quad \forall\ \varrho \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

acquiert la régularité $BV(\mathbb{R})$. On a:

$$\mathrm{TV}_{\mathbb{R}}\big(\,D\circ\varrho(t,\cdot)\,\big) \leq\ 2\ \ \|\ \varrho_0\ \|_{L^1(\mathbb{R})}\ /\ t, \quad \forall\ t\in\mathbb{R}_*^+. \tag{2.3}$$

Dans un contexte légèrement modifié $\big($pour $N=1$, dans le cas homogène avec $m\geq 2$ quelconque et sous la restriction $\varrho_0(\cdot)$ contenu dans $BV(\mathbb{R})\,\big)$, K. Zumbrun[Zu] analyse comment la vitesse de propagation se comporte près de l'instant initial lorsque la norme $BV(\mathbb{R})$ de $\varrho_0(\cdot)$ grandit. Il obtient:

$$\begin{aligned} TV_{\mathbb{R}}\left(\,a\circ\varrho(t,\cdot)\,\right)\ =\ \bigcirc(1)\ \delta^{m/(m+1)}\ t^{-m/(m+1)} & \\ \times\ TV_{\mathbb{R}}\left(\,a\circ\varrho_0\right)^{1/(m+1)}, & \quad \forall\, t\in\mathbb{R}_*^+, \end{aligned} \tag{2.4}$$

où le paramètre δ désigne le diamètre du support de $\varrho_0(\cdot)$ et où le $\bigcirc(1)$ ne dépend que de m.

Notre démarche fournit le catalogue complet (voir la proposition 2.3) des expressions $B(\cdot)$ qui après composition avec $\varrho(\cdot)$ conduisent à une majoration analogue à (2.3). Ce qui importe à cet endroit, c'est la platitude de $D(\cdot)$ au voisinage de zéro. On gagne une puissance de v par rapport à $D(\cdot)$. Par ailleurs, le contrôle des variations de la vitesse se fait sans l'intervention de $\varrho_0(\cdot)$. On peut remplacer le second membre de (2.4) par $\bigcirc(1)\,\delta\, t^{-1}$ (voir le lemme 1.2).

Signalons aussi qu'il est aussi possible d'extraire des informations sur le comportement asymptotique en temps des solutions périodiques.

Considérons à présent le cas de la multidimension d'espace. Dans ce cas, la non linéarité du flux est souvent mesurée par l'indice α qui intervient dans la condition de non-stationnarité:

$$(\mathcal{N}S)^N \quad \exists\ C\in\mathbb{R}^+, \quad \exists\ \alpha\in\,]0,1]; \quad \forall\ \delta\in\,]0,1], \quad \forall\ (\tau,\omega)\in\mathbb{S}^N,$$
$$m_1\left(\,\{\,v\,;\ |v|\leq\varrho_0^\infty\ ,\ |\tau+\big(\omega,a(v)\big)_N|\leq\delta\,\}\,\right)\ \leq\ C\,\delta^\alpha.$$

Sous $(\mathcal{N}S)^N$, Lions, Perthame et Tadmor[LPT] ont montré que la solution possède la régularité Sobolev:

$$\varrho(t,\cdot) \in W^{\tau,1}(\mathbb{R}^N), \quad \forall\, \tau \in [0, \alpha/(\alpha+2)[, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_*^+. \tag{2.5}$$

La limitation imposée à τ en (2.5) provient du second membre mesure $\partial_v m(\cdot)$ inhérent à toute formulation cinétique. Ce terme source disparait lorsque la donnée initiale est tordue via l'opérateur de scattering Ξ_t^N. Il devient alors possible d'appliquer les lemmes de moyenne dans leur version optimale [Bo]. Ceux-ci garantissent de la régularité Sobolev en (t,x) pour les moyennes en v de $g(\cdot)$. En utilisant l'équation $(\mathcal{T}_0^N)$, l'estimation à priori (0.2) et des techniques d'interpolation, on obtient l'amélioration:

Proposition 2.2. *Sous $(\mathcal{N}S)^N$ et (0.2), on a:*

$$\varrho(t,\cdot) \in W^{\tau,2}(\mathbb{R}^N), \quad \forall\, \tau < \alpha\,/\,2, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_*^+. \tag{2.6}$$

$$\varrho(t,\cdot) \in W^{\tau,1}(\mathbb{R}^N), \quad \forall\, \tau < 2\ \alpha\,/\,3, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_*^+. \tag{2.7}$$

Sous $(\mathcal{VNL})^1$, on a $\alpha = 1$. L'appartenance annoncée en (2.6) est cohérante avec l'inclusion des fonctions $BV_c(\mathbb{R})$ dans $H^{1/2}(\mathbb{R})$. A cet égard, l'information (2.6) est optimale.

- Un résultat (désormais classique) dû à Oleinik[Ol] et Lax[L1] affirme que la solution d'une loi de conservation scalaire strictement convexe $(N=1)$ devient spontanément à variations bornées:

$$TV_{]x,y[}\,\big(\,a \circ \varrho(t,\cdot)\,\big) \;\leq\; 2\ (y-x)\,/\,t, \qquad \forall\,(t,x,y) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad y - x \geq t. \tag{2.8}$$

L'extension à des flux quelconques et à la multidimension d'espace de ce premier pas fait intervenir deux ingrédients supplémentaires: la composition non linéaire et la moyennisation en x. L'interprétation est alors celle d'une régularité deux-microlocale:

Proposition 2.3. *Pour tout angle ω de la sphère $\mathbb{S}^{N-1}$, pour toute fonction $B(\cdot)$ sélectionnée dans l'espace fonctionnel:*

$$C_A^\omega(\mathbb{R}) \;:=\; \{\, B\ ;\ \exists\, b \in Lip_c(\mathbb{R}) \quad \text{avec:} \quad B(v) = \int_{-\infty}^{v} b(r)\ \omega \cdot a'(r)\ dr, \quad \forall\, v \in \mathbb{R}\,\}, \tag{2.9}$$

il existe une constante $C(A,\omega,b)$ telle que pour toute donnée initiale $\varrho_0(\cdot)$ dans $L_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et tout instant t positif, on ait:

$$TV_{z\in\mathbb{R}}\,\Big(\int_{\mathbb{H}_{\omega,z}} B\big(\varrho(t,x)\big)\ dm_{\omega,z}\Big) \;\leq\; \frac{C(A,\omega,b)}{t}\ \Theta(t,\varrho_0), \tag{2.10}$$

où $dm_{\omega,z}$ représente la mesure de Lebesgues $N-1$ dimensionnelle sur l'hyperplan $\mathbb{H}_{\omega,z} := \{x\,;\,\omega \cdot x = z\}$.

Il faut comprendre que l'énoncé (2.10) n'est pas un résultat de propagation. L'expression placée à gauche de l'inégalité (2.10) n'est pas controlée par une quantité similaire évaluée à l'instant initial mais (compte tenu du théorème 1.1) par une constante universelle fois un facteur qui dépend de l'instant t et de la mesure du support de $\varrho_0(\cdot)$. Considérée sous cet angle, la logique qui mène à (2.10) s'apparente à celle qui sous-tend (2.8).

On explique brièvement (et formellement) comment déduire (2.10) en travaillant sur le modèle linéaire $(\mathcal{T}_0^N)$. Une démonstration rigoureuse et complète est donnée dans [Ch].

On introduit la moyenne:

$$\tilde{g}(s,\omega,z,v) := \int_{\mathbb{H}_{\omega,z}} g(s,x,v)\ dm_{\omega,z}$$

qui est astreinte à une famille d'équations de transport paramétrées par l'angle ω:

$$(\tilde{\mathcal{T}}_0^N) \qquad \begin{cases} \partial_s \tilde{g}(s,\omega,z,v) + \omega\cdot a(v)\ \partial_z g(s,\omega,z,v) = 0 \\ \tilde{g}(0,\omega,z,v) = \tilde{g}_0(\omega,z,v), \end{cases} \quad , \quad \omega \in \mathbb{S}^{N-1}.$$

La définition (0.2) garantit:

$$\|\ \tilde{g}_0(\omega,\cdot)\ \|_{BV(\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_v)} \leq\ \Theta(t,\varrho_0), \quad \forall\,\omega\in\mathbb{S}^{N-1}.$$

D'après (1.3) et (2.9), on a:

$$\int_{\mathbb{H}_{\omega,z}} B\circ\varrho(t,x)\ dm_{\omega,z} = \int_{\mathbb{R}} b(v)\ \omega\cdot a'(v)\ \tilde{g}_0\big(z - t\ \omega\cdot a(v), v\big)\ dv \tag{2.11}$$

Comme l'expression $\tilde{g}_0(\cdot)$ est à support compact en les variables z et v, il vient:

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_v \left\{ b(v)\ \tilde{g}_0\big(z - t\ \omega\cdot a(v), v\big) \right\}\ dv\ =\ 0.$$

On développe la dérivée ∂_v à l'intérieure de la parenthèse puis on se souvient de (2.11) pour obtenir:

$$t\ |\,\partial_z \Big(\int_{\mathbb{H}_{\omega,z}} B\big(\varrho(t,x)\big)\ dm_{\omega,z} \Big)\,|\ \leq\ |\int_{\mathbb{R}} b'(v)\ \tilde{g}_0\big(z - t\,\omega\cdot a(v), v\big)\ dv\,|$$
$$+\,|\int_{\mathbb{R}} b(v)\ (\partial_v\,\tilde{g}_0)\big(z - t\,\omega\cdot a(v), v\big)\ dv\,|.$$

Ainsi la dérivée en z se trouve reportée selon une dérivée par rapport à v. En passant la valeur absolue sous le signe somme puis en intégrant selon la variable x, on voit surgir la majoration (2.10). $\triangle$

En suivant la méthode adoptée par P. Gérard dans [Ger], on déduit de (2.10) l'appartenance de $B \circ \varrho(\cdot)$ à une classe de Hörmander $H^{\tau,\bar\tau}$ avec $\tau > 0$.

En *conclusion*, il existe une propriété de compatibilité entre la loi de conservation $(\mathcal{L}_0^N)$ et le modèle linéaire $(\mathcal{T}_0^N)$ qui se traduit par le contrôle uniforme (0.2). A l'aide de (0.2), il devient possible d'analyser avec une grande précision les effets de lissage induits par la non linéarité du flux. En particulier, l'estimation classique (2.8) de Lax[L1] n'est autre qu'un transfert de dérivée (en v) perçu après moyennisation d'une équation de transport (sans terme source), qui se transcrit à la situation non linéaire via un opérateur de scattering. Son extension à la multidimension d'espace se fait en appliquant la transformation de Radon puis en multipliant la fonction $\tilde g(\omega, \cdot)$ par un poids adapté $\big($du type $b(v)$ fois une puissance de $\omega \cdot a'(v)\,\big)$.

References

[B-C] P. Bénilan, M.G. Crandall, *Regularizing effects of homogeneous evolution equations*, Contributions to Analysis and Geometry, John Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, (1981), 23-39.

[Bo] F. Bouchut, *Introduction to the mathematical theory of kinetic equations*, Coll. "Series in Appl. Math." Elsevier in Session "L'état de la recherche" de la S. M. F., Equations cinétiques, Orléans, 4-6 juin 1998.

[Br] Y. Brenier, *Averaged multivalued solutions fot scalar conservation laws*, Siam J. Numer. Anal., 6 (1984), 1013-1037.

[Ch] C. Cheverry, *Regularizing effects for multidimensional scalar conservation laws*, submitted to the Ann. Inst. Poin., option Analyse non linéaire (1999).

[Co] E.D. Conway, *The formation and decay of shocks for a conservation law in several dimensions*, Arch. Rational Mech. Anal., 64 (1977), 47-57.

[D1] C. Dafermos, *Regularity and large time behaviour of solutions of a conservation law without convexity*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 99 (1985), 201-239.

[D-L-M] R.J. DiPerna, P. L. Lions, Y. Meyer, *L^p regularity of velocity averages*, Ann. Inst. Henri Poincaré, 8 (1991), 271-287.

[E-E] B. Engquist, W. E, *Large Time Behavior and Homogenization of Solutions of Two-Dimensional Conservation Laws*, Comm. Pure and Ap. Math., XLVI (1993), 1-26.

[Ger] P. Gérard, *Moyennisation et régularité deux-microlocale*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 23 (1990), 89-121.

[He] S. Helgason, *The Radon transform*, Progress in Mathematics, 5, Birkhäuser.

[Kr] S.N. Kruzkov, *First-order quasilinear equations in several independent variables*, Math.USSR-Sb., 64 (1977), 47-57.

[L1] P.D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves*, Regional conference series in applied mathematics, SIAM (1973).

[L2] P.D. Lax, *The Formation and Decay of shock waves*, Am. Math. Month., 3 (1972), 227-241.

[L-P] T.P. Liu et M. Pierre, *Source solutions and asymptotic behavior in conservation laws*, Siam J. Math. Anal., 19 (1988), 763-773.

[L-P-T] P.L. Lions, B. Perthame et E. Tadmor, *A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations*, Bull. of the Ame. math. So., 7 (1994), 169-189.

[Mu] F. Murat, *Compacité par compensation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 5 (1978), 489-507.

[Ol] O. Oleinik, *Discontinuous solutions of nonlinear differential equations*, Usp. Mat. Nauk., 26 (1963), 95-172.

[Ot] F. Otto, *A regularizing effect of nonlinear transport equations*, Quart. Appl. Math., 56 (1998), no 2, 355-375.

[P-T] B. Perthame et E. Tadmor, *A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws*, Comm. Math. Phys., 136 (1991), 501-517.

[Sc] D.G. Schaeffer, *A regularity theorem for conservation laws*, Adv. in Math., 11 (1973), 368-386.

[Se] D. Serre, *Systèmes de lois de conservation I*, Diderot éditeur, arts et sciences.

[Sm] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New-York, (1983).

[Ta] L. Tartar, *Une nouvelle méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, Lecture Notes in Math., 665, Springer,Berlin, (1977), 228-241.

[Va] A. Vasseur, *Contributions à l'approche cinétique des systèmes de lois de conservation hyperboliques*, Thèse de doctorat de l'université Paris 6 (1999).

[Vo] A. I. Volpert, *The space BV and quasilinear equations*, Mat. Sb. 73, (1967). English translation: Math. USSR Sb. 2 (1967), 225-267.

[Zu] K. Zumbrun, *Decay rates for nonconvex systems of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math., Vol XLVI (1993), 353-386.