SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1998-1999

Raphaël Danchin

Existence globale dans des espaces critiques pour le système de Navier-Stokes compressible

Séminaire É. D. P. (1998-1999), Exposé n° XXI, 14 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1998-1999____A21_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Existence globale dans des espaces critiques pour le système de Navier-Stokes compressible

Raphaël Danchin

Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris-VI,
4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05 France.
E-mail: danchin@ann.jussieu.fr

1 Introduction

L'évolution d'un fluide compressible isentropique est décrite par le modèle suivant

$$(NSC)\qquad \begin{cases} \partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\nabla \operatorname{div} u + \nabla P = \rho f, \end{cases}$$

où $\rho = \rho(t,x) \in \mathbb{R}^+$ désigne la densité au point $x \in \mathbb{R}^N$ à l'instant $t \geq 0$, et $u = u(t,x) \in \mathbb{R}^N$, la vitesse. Pour simplifier, les coefficients de viscosité du fluide λ et μ sont supposés constants et vérifient $\mu > 0$ et $\lambda + 2\mu > 0$, condition réalisée dans les cas physiques. Le fluide considéré est isentropique, c'est-à-dire que la pression P est une fonction de ρ seulement, que l'on supposera régulière. Enfin, f désigne une densité de force extérieure. Dans tout ce travail, on suppose que le fluide évolue dans l'espace entier: $x \in \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ mais les résultats obtenus s'adaptent facilement au cadre périodique.

On s'intéresse à la résolution de (NSC) pour tout temps t positif, l'état initial $(\rho, u)_{|t=0} = (\rho_0, u_0)$ étant donné dans une classe fonctionnelle que l'on s'attachera à choisir "la plus grande possible".

Il est naturel de présenter notre approche du problème et les résultats que l'on peut espérer obtenir en faisant un parallèle avec quelques résultats classiques pour les fluides incompressibles.

Le mouvement d'un fluide incompressible visqueux de viscosité $\nu > 0$ est régi par

$$(NSI)\qquad \begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}(u \otimes u) - \nu\Delta u + \nabla P = 0, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases}$$

On sait depuis les travaux de J. Leray en 1934 (voir [11]) que le problème de Cauchy associé avec donnée initiale $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ à divergence nulle admet une solution faible globale u telle que

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 \, ds \leq \|u_0\|_{L^2}^2\,,$$

mais le problème de l'unicité de cette solution lorsque $N \geq 3$ reste ouvert.

Une façon d'aborder l'étude de l'unicité consiste à chercher des classes de données initiales les plus grandes possibles donnant l'existence et l'unicité d'une solution (que nous appellerons *solution forte*) dans un cadre fonctionnel bien choisi.

Cette approche trouve probablement son origine dans un article de H. Fujita et T. Kato (voir [9]) où l'on considère des champs de vitesse initiaux u_0 à divergence nulle et dans l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^{\frac{N}{2}-1}$.

Les auteurs prouvent l'existence d'un temps $T > 0$ tel que (NSI) ait une unique solution (forte) dans $L^\infty([0,T]; \dot{H}^{\frac{N}{2}-1}) \cap L^2(0,T; \dot{H}^{\frac{N}{2}})$. Lorsque de plus $\|u_0\|_{\dot{H}^{\frac{N}{2}-1}} \ll \nu$, cette solution est en fait globale.

Signalons que l'indice de régularité $s = N/2 - 1$ est l'indice minimal pour lequel on sache établir l'existence et l'unicité d'une solution globale avec donnée initiale petite dans $\dot{H}^s$. Ceci est étroitement lié au fait que l'espace $L^\infty(0,T;\dot{H}^{\frac{N}{2}-1}) \cap L^2(0,T;\dot{H}^{\frac{N}{2}})$ avec donnée initiale dans $\dot{H}^{\frac{N}{2}-1}$ est *invariant par le scaling* de (NSI).

Rappelons que ce *scaling* correspond à la transformation

$$u(t,x) \longrightarrow \ell u(\ell^2 t, \ell x) \quad \text{et} \quad u_0(x) \longrightarrow \ell u_0(\ell x),$$

qui manifestement laisse le système (NSI) invariant ainsi que la norme des espaces fonctionnels mentionnés ci-dessus.

Bien d'autres espaces fonctionnels vérifient cette propriété d'invariance si bien que de nombreux travaux consistent à établir l'existence de solutions fortes dans ce type d'espaces (on pourra par exemple consulter le livre de M. Cannone [2]). En schématisant à l'extrême, ces solutions sont obtenues à l'aide d'une méthode de point fixe dans un espace fonctionnel adéquat, invariant par le *scaling* de (NSI). On obtient d'une part l'existence locale d'une solution forte pour des données initiales de taille quelconque, d'autre part l'existence globale lorsque la donnée initiale est petite par rapport à la viscosité dans l'espace considéré.

Rappelons maintenant quelques résultats sur les fluides compressibles.

La preuve de l'existence de solutions faibles globales *à la Leray* pour (NSC) avec des lois de pression du type $P(\rho) = \rho^\gamma$ ($\gamma \geq 3/2$ si $N = 2$, $\gamma \geq 9/5$ si $N = 3$ et $\gamma > N/2$ si $N \geq 4$) est due à P.-L. Lions (voir [12]). Si l'on part de données initiales $(\rho, \rho u)_{|t=0} = (\rho_0, m_0)$ telles que $\rho_0 \in L^\gamma$, $|m_0|^2/\rho_0 \in L^1$ (où l'on convient que $m_0 = 0$ sur $\rho_0^{-1}(\{0\})$), et si $f \in L^1(\mathbb{R}^+; L^{2\gamma/(\gamma-1)})$, ces solutions vérifient l'inégalité d'énergie suivante:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \frac{a}{\gamma-1}\rho^\gamma\right)dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \left(\mu|\nabla u|^2 + (\lambda+\mu)(\mathrm{div} u)^2\right)dx\,d\tau$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}\frac{|m_0|^2}{\rho_0} + \frac{a}{\gamma-1}\rho_0^\gamma\right)dx + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \rho u \cdot f\,dx\,d\tau.$$

A l'opposé, pour des données initiales très régulières, on connaît l'existence de solutions classiques. L'existence locale pour une densité initiale régulière bornée et loin du vide (*i. e.* $0 < \underline{\rho} \leq \rho_0 \leq \bar{\rho} < +\infty$ pour des constantes $\underline{\rho}$ et $\bar{\rho}$), est par exemple établie dans [15].

Lorsque les données initiales sont de plus proches d'un équilibre stable, on a existence globale. Dans [13], T. Nishida et A. Matsumura construisent une solution forte pour une donnée initiale proche de $(\bar{\rho}, 0)$ dans $H^3(\mathbb{R}^3)$ avec la condition de stabilité $P'(\bar{\rho}) > 0$.

On peut aussi dans certains cas remplacer la condition de petitesse sur la donnée initiale par une hypothèse de proximité d'un état incompressible à densité constante. Dans le cadre bidimensionnel et périodique avec donnée initiale régulière vérifiant une telle hypothèse, T. Hagstrom et J. Lorenz ont prouvé l'existence d'une solution globale forte (voir [10]).

Dans ce travail, on s'inspire de l'approche de H. Fujita et T. kato pour faire descendre l'indice de régularité exigé sur les données initiales dans le cas compressible. On s'attend à ce que les espaces critiques correspondants soient invariants par le *scaling* de (NSC), s'il existe.

Un calcul immédiat montre que (NSC) est invariant par la transformation

$$(\rho(t,x), u(t,x)) \longrightarrow (\rho(\ell^2 t, \ell x), \ell u(\ell^2 t, \ell x)) \quad \text{et} \quad (\rho_0(x), u_0(x)) \longrightarrow (\rho_0(\ell x), \ell u_0(\ell x)),$$

à une modification près du terme de pression, qui peut être vu comme d'ordre inférieur.

Si l'on s'en tient aux espaces de Sobolev, il est donc naturel de chercher à résoudre (NSC) pour des données initiales proches de $(\bar{\rho}, 0)$ dans $\dot{H}^{N/2} \times (\dot{H}^{N/2-1})^N$.

Construire des solutions fortes pour $(\rho_0 - \bar\rho, u_0)$ dans $\dot H^{N/2} \times (\dot H^{N/2-1})^N$ semble cependant hors de portée: on voit mal comment se passer d'un contrôle L^∞ sur la densité, ne serait-ce que pour traiter le terme de pression. Par ailleurs, l'espace $\dot H^{N/2}$ a un mauvais comportement vis-à-vis du produit usuel (ce n'est pas une algèbre par exemple), ce qui risque de poser quelques problèmes pour estimer les termes non linéaires dans (NSC).

Il serait sans doute plus réaliste d'imposer en plus $\rho_0 \in L^\infty$ mais l'espace L^∞ se prête mal aux techniques d'analyse harmonique que nous allons utiliser.

C'est pourquoi, nous avons préféré considérer des espaces de Besov homogènes du type $\dot B^s \stackrel{\text{déf}}{=} \dot B^s_{2,1}$ très proches des $\dot H^s$ mais un peu plus petits. Ce type d'espace a d'ailleurs déjà été utilisé pour les mêmes raisons et avec succès d'autres types d'équations: signalons par exemple les travaux de D. Tataru sur l'équation des ondes semi-linéaire [16], l'étude de J.-Y. Chemin et N. Masmoudi sur les fluides visco-élastiques [5] et notre travail en collaboration avec B. Desjardins sur les fluides capillaires [8].

On peut définir les espaces B^s comme suit. Rappelons d'abord que la norme dans $\dot H^s$ est définie par $\|v\|^2_{\dot H^s} = \int |\xi|^{2s}|\hat v(\xi)|^2\,d\xi$. On a donc

$$\|v\|_{\dot H^s} = \left(\sum_{q\in\mathbb{Z}} v_q^2\right)^{\frac12} \quad \text{avec} \quad v_q \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\int_{2^q\le|\xi|\le 2^{q+1}} |\xi|^{2s}|\hat v(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac12}.$$

On définit alors

$$\|v\|_{B^s} = \sum_{q\in\mathbb{Z}} v_q$$

Pour $s \le N/2$, on pose

$$B^s = \Big\{ v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\ \hat v \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N) \quad \text{et} \quad \|v\|_{B^s} < +\infty \Big\},$$

et l'on renvoie à l'appendice pour la définition dans le cas $s > N/2$.

Il est classique que $B^{N/2}$ est une algèbre incluse dans L^∞. De plus, $B^{N/2} \times (B^{N/2-1})^N$ est visiblement invariant par $(\rho_0(x), u_0(x)) \longrightarrow (\rho_0(\ell x), \ell u_0(\ell x))$.

Introduisons maintenant l'espace fonctionnel dans lequel on va résoudre (NSC):

Définition 1.— *Pour $s \in \mathbb{R}$, on note*

$$E^s = \Big(L^2(\mathbb{R}^+; B^s) \cap C(\mathbb{R}^+; B^s \cap B^{s-1})\Big) \times \Big(L^1(\mathbb{R}^+; B^{s+1}) \cap C(\mathbb{R}^+; B^{s-1})\Big)^d.$$

L'espace $E^{\frac N2}$ est manifestement invariant par le *scaling* de (NSC).

Énonçons le résultat principal de ce travail:

Théorème 1.—*Soit $\bar\rho > 0$ tel que $P'(\bar\rho) > 0$. Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout triplet (ρ_0, u_0, f) tel que $(\rho_0 - \bar\rho) \in B^{N/2} \cap B^{N/2-1}$, $u_0 \in B^{N/2-1}$, $f \in L^1(\mathbb{R}^+; B^{N/2-1})$ et*

$$\|\rho_0 - \bar\rho\|_{B^{\frac N2} \cap B^{\frac N2 - 1}} + \|u_0\|_{B^{N/2-1}} + \|f\|_{L^1(B^{N/2-1})} \le \alpha,$$

le système (NSC) admette une solution (ρ, u) telle que $(\rho - \bar\rho, u) \in E^{\frac N2}$ qui est unique si $N \ge 3$.

Pour tout $N \ge 2$, si de plus $(\rho_0 - \bar\rho) \in B^s$, $u_0 \in B^{s-1}$ et $f \in L^1(B^{s-1})$ pour un $s \in]N/2, N/2+1[$, alors il existe une unique solution (ρ, u) telle que $(\rho - \bar\rho, u)$ appartienne à $E^{N/2} \cap E^s$.

Remarques: 1) Les données initiales n'appartiennent pas tout à fait à un espace invariant par le scaling de l'équation, puisqu'on a supposé en sus que $(\rho_0-\bar\rho)\in B^{N/2-1}$. Remarquons toutefois que cette hypothèse ne porte que sur les basses fréquences de la densité (et ne change donc pas la régularité locale exigée), et n'est pas très surprenante dans la mesure où ce que nous avons appelé *scaling de (NSC)* ne tenait pas compte du terme de pression. Il se trouve d'ailleurs que l'on peut se passer de $(\rho_0-\bar\rho)\in B^{N/2-1}$ tant que l'on se limite à des résultats locaux en temps (voir [7]).

2) L'unicité dans E^1 en dimension 2 pose problème: certains termes non linéaires apparaissant dans le système vérifié par la différence des solutions ne peuvent pas être estimés convenablement sous la seule hypothèse que les solutions appartiennent à E^1.

3) Dans un travail en collaboration avec B. Desjardins, nous avons établi un résultat similaire pour les fluides compressibles avec capillarité. Le scaling des équations associées à de tels fluides est le même que pour (NSC). Cependant, le terme de capillarité a un effet régularisant sur la densité qui n'apparaît pas ici.

Nous adopterons le plan suivant.

Dans la première partie, nous donnons les éléments essentiels de la preuve du théorème 1. Nous renvoyons à [6] pour la preuve intégrale.

Dans la deuxième partie, nous étudions plus spécifiquement un système linéaire de type mixte qui correspond au linéarisé de (NSC) près de $(\bar\rho,0)$, où l'on a gardé le terme de convection.

Dans la dernière partie, nous indiquons des généralisations de notre résultat. On s'intéresse d'une part à des espaces critiques autres que $E^{N/2}$ et qui n'ont pas de lien proche avec les espaces d'énergie, d'autre part au cas de fluides compressibles polytropiques.

Enfin, nous donnons en appendice une définition des espaces de Besov homogènes et de la décomposition de Littlewood-Paley que nous utilisons dans la deuxième partie. Nous rappelons aussi quelques propriétés importantes de ces espaces.

1 Principe de la preuve

En faisant le changement d'inconnues $c(t,x)=\rho(\epsilon^2t,\epsilon x)/\bar\rho-1,\ v(t,x)=\epsilon u(\epsilon^2t,\epsilon x)$ avec $\epsilon=(P'(\bar\rho))^{-1/2}$, on se ramène au système

$$(1)\qquad \begin{cases}\partial_t c+v\cdot\nabla c+\operatorname{div}v=-c\operatorname{div}v,\\ \partial_t v+v\cdot\nabla v-\mathcal{A}v+\nabla c=-\left(\dfrac{c}{1+c}\right)\mathcal{A}v-K(c)\nabla c+\bar f,\end{cases}$$

avec $\bar\mu=\mu/\bar\rho$, $\bar\lambda=\lambda/\bar\rho$, $\mathcal{A}=\bar\mu\Delta+(\bar\lambda+\bar\mu)\nabla\operatorname{div}$, $\bar f=\epsilon^3 f(\epsilon^2t,\epsilon x)$ et $K(c)=\dfrac{P'(\bar\rho(1+c))}{(1+c)P'(\bar\rho)}-1$.

Pour $s\in\mathbb{R}$, notons Λ^s l'opérateur défini par $\Lambda^s z=\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s\widehat{z})$. Posons $d=\Lambda^{-1}\operatorname{div}v$, $\Omega=\Lambda^{-1}\operatorname{rot}v$ (avec $\operatorname{rot}v=\nabla v-{}^t\nabla v$) et $\bar\nu=\bar\lambda+2\bar\mu$. Le système (1) se réécrit

$$(2)\qquad \begin{cases}\partial_t c+\Lambda d=-v\cdot\nabla c-c\operatorname{div}v,\\ \partial_t d-\bar\nu\Delta d-\Lambda c=-\Lambda^{-1}\operatorname{div}\left(v\cdot\nabla v+\left(\dfrac{c}{1+c}\right)\mathcal{A}v+K(c)\nabla c\right)+\Lambda^{-1}\operatorname{div}\bar f,\\ \partial_t\Omega-\bar\mu\Delta\Omega=-\Lambda^{-1}\operatorname{rot}\left(v\cdot\nabla v+\left(\dfrac{c}{1+c}\right)\mathcal{A}v\right)+\Lambda^{-1}\operatorname{rot}\bar f,\\ v=-\Lambda^{-1}\nabla d+\Lambda^{-1}\operatorname{div}\Omega.\end{cases}$$

L'équation vérifiée par la partie incompressible de la vitesse (c'est-à-dire par Ω) se découple linéairement des deux premières et peut être traitée comme une équation de la chaleur. La preuve du théorème passe donc d'abord par une étude approfondie du système linéaire

$$(3)\qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}=A(D)\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F\\ G\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}_{t=0}=\begin{pmatrix}c_0\\ d_0\end{pmatrix}\quad\text{avec}\quad A(D)=\begin{pmatrix}0 & -|D|\\ |D| & -\bar\nu|D|^2\end{pmatrix}.$$

En basses fréquences (i. e. pour $\bar\nu|\xi|<2$), le système (3) a un comportement de type parabolique: les deux valeurs propres de $A(\xi)$ sont $\lambda^\pm(\xi)=-\frac{\bar\nu|\xi|^2}{2}\left(1\pm i\sqrt{\frac{4}{\bar\nu^2|\xi|^2}-1}\right)$.

La situation est assez différente en hautes fréquences où $\lambda^\pm(\xi)=-\frac{\bar\nu|\xi|^2}{2}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4}{\bar\nu^2|\xi|^2}}\right)$. Un calcul aisé montre que pour $|\xi|\to+\infty$, le mode λ^- correspond à un amortissement en $e^{-t/\bar\nu}$ sur c et que le mode λ^+ traduit un comportement parabolique pour d.

Un calcul explicite du semi-groupe donne l'estimation suivante:

Proposition 1.— *Soit (c,d) une solution de* (3)*. Pour tout $r\in[1,+\infty]$ et $\rho\in\mathbb{R}$, on a*

$$\|c\|_{L^r_T(\widetilde{B}^{\rho,r}_{\bar\nu})}+\|d\|_{L^r_T(B^{\rho-1+2/r})}\leq C(\|c_0\|_{\widetilde{B}^{\rho,\infty}_{\bar\nu}}+\|d_0\|_{B^{\rho-1}}+\|f\|_{L^1_T(\widetilde{B}^{\rho,\infty}_{\bar\nu})}+\|g\|_{L^1_T(B^{\rho-1})}),\tag{4}$$

où C ne dépend que de d et où l'on a noté $\|\cdot\|_{\widetilde{B}^{\rho,r}_{\bar\nu}}$ les normes de Besov hybrides suivantes:

$$\|u\|_{\widetilde{B}^{\rho,r}_{\bar\nu}}\stackrel{\text{déf}}{=}\sum_{q\in\mathbb{Z}}2^{q\rho}\max\left(\bar\nu,2^{-q}\right)^{1-2/r}\|\Delta_q u\|_{L^2}.$$

Cette proposition ne nous permet pas encore de prouver le théorème 1: le terme de convection $v\cdot\nabla c$ qui, *a priori*, a un cran de régularité de moins que c, pose problème. On peut cependant généraliser la proposition 1 au cas d'un système linéaire de type (3) avec terme de convection:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}+v\cdot\nabla\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=A(D)\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F\\G\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}_{t=0}=\begin{pmatrix}c_0\\d_0\end{pmatrix}.\tag{5}$$

Proposition 2.—*Si l'on se restreint aux indices $\rho\in]1-N/2,1+N/2]$, les solutions de* (5) *vérifient une estimation analogue à* (4) *où l'on a remplacé C par $Ce^{C\|v\|_{L^1_T(B^{N/2+1})}}$.*

Nous renvoyons à la partie suivante pour la preuve de ce résultat.

Le théorème 1 en découle moyennant une méthode d'approximations successives mettant en jeu des systèmes linéaires de type (5). On peut par exemple procéder de la manière suivante. On pose $(c^0,v^0)=(0,0)$ et on définit $((c^n,v^n))_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence: une fois (c^n,v^n) construit, on prend (c^{n+1},v^{n+1}) comme étant la solution du système

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t c^{n+1}+v^n\cdot\nabla c^{n+1}+\Lambda d^{n+1}=F^n,\\ \partial_t d^{n+1}+v^n\cdot\nabla d^{n+1}-\bar\nu\Delta d^{n+1}-\Lambda c^{n+1}=G^n+\Lambda^{-1}\operatorname{div}f_n,\\ \partial_t\Omega^{n+1}-\bar\mu\Delta\Omega^{n+1}=H^n+\Lambda^{-1}\operatorname{rot}f_n,\\ v^{n+1}=-\Lambda^{-1}\nabla d^{n+1}+\Lambda^{-1}\operatorname{div}\Omega^{n+1},\\ (c^{n+1},d^{n+1},\Omega^{n+1})_{t=0}=(c_n,\Lambda^{-1}\operatorname{div}v_n,\Lambda^{-1}\operatorname{rot}v_n),\end{array}\right.\tag{6}$$

avec

$$c_n=\sum_{|q|\leq n}\Delta_q c_0,\qquad v_n=\sum_{|q|\leq n}\Delta_q v_0,\qquad f_n=\sum_{|q|\leq n}\Delta_q\bar f,$$

$$F^n=-c^n\operatorname{div}v^n,$$

$$G^n=v^n\cdot\nabla d^n-\Lambda^{-1}\operatorname{div}\left(v^n\cdot\nabla v^n+K(c^n)\nabla c^n+\frac{c^n}{1+c^n}\mathcal{A}v^n\right),$$

$$H^n=-\Lambda^{-1}\operatorname{rot}\left(v^n\cdot\nabla v^n+\frac{c^n}{1+c^n}\mathcal{A}v^n\right).$$

On remarquera que la définition de cette suite ne pose pas de problème, tous les termes étant en fait réguliers et à décroissance rapide en espace.

La première étape dans la preuve de l'existence d'une solution pour (2) consiste à écrire des estimations uniformes pour $((c^n, v^n))_{n\in\mathbb{N}}$ dans $E^{\frac{N}{2}}$. Ceci se fait aisément à l'aide de la proposition 2, de la proposition A.3 de l'appendice et grâce aux propriétés des espaces de Besov données dans les propositions A.1 et A.2.

Dans une deuxième étape, on établit des bornes uniformes pour $((\partial_t c^n, \partial_t v^n))_{n\in\mathbb{N}}$ dans des espaces ayant un cran de régularité de moins (sauf dans le cas $N = 2$ où il faut être un peu plus soigneux). Ceci nous donne des propriétés de compacité suffisantes pour prouver l'existence d'une limite à une extraction près pour $((c^n, v^n))_{n\in\mathbb{N}}$. En revenant aux estimations uniformes dans $E^{\frac{N}{2}}$, on montre que cette limite est dans $E^{\frac{N}{2}}$ et vérifie (6) au sens des distributions.

L'unicité se prouve en estimant la différence de deux solutions (c_1, v_1) et (c_2, v_2) dans $E^{\frac{N}{2}-1}$ à l'aide des propositions 2 et A.3. Lorsque $N = 2$ cependant, certains termes non linéaires tels que $(v_2 - v_1)\cdot\nabla v_1$ ne peuvent pas être majorés convenablement à l'aide de bornes de v_i dans E^1 et de $v_2 - v_1$ dans E^0. Il faudrait en effet être capable d'estimer ce terme dans $L^1(\mathbb{R}^+; B^0)$ ce qui n'est pas possible en général sachant que le produit usuel n'opère pas de $B^0 \times B^1$ dans B^0, mais dans un espace un peu plus gros (l'espace de Besov $B^0_{2,\infty}$ pour les connaisseurs).

Nous renvoyons le lecteur intéressé par les détails techniques à [6].

2 Étude d'un système linéaire mixte avec terme de convection

La preuve de la proposition 2 découle d'une méthode d'énergie appliquée à (LPH) après localisation en fréquences à l'aide d'une décomposition de Littlewood-Paley homogène (voir l'appendice).

Dans toute cette partie, on désignera par C une "constante" qui peut varier d'une ligne à l'autre mais qui ne dépend que de la dimension, des paramètres de régularité et de viscosité. On notera $(a|b)$ le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Soit (c, d) une solution de (LPH) et $K > 0$. On pose

$$\tilde{c} = e^{-KV(t)}c, \quad \tilde{d} = e^{-KV(t)}d, \quad \tilde{F} = e^{-KV(t)}F, \quad \tilde{G} = e^{-KV(t)}G.$$

En appliquant Δ_q à (LPH), il vient

$$(LPH)_q \qquad \begin{cases} \partial_t\Delta_q\tilde{c} + \Delta_q(v\cdot\nabla\tilde{c}) + \Lambda\Delta_q\tilde{d} = \Delta_q\tilde{F} - KV'(t)\Delta_q\tilde{c}, \\ \partial_t\Delta_q\tilde{d} + \Delta_q(v\cdot\nabla\tilde{d}) - \bar{\nu}\Delta\Delta_q\tilde{d} - \Lambda\Delta_q\tilde{c} = \Delta_q\tilde{G} - KV'(t)\Delta_q\tilde{d}. \end{cases}$$

Nous étudierons (LPH_q) différemment suivant que l'on se trouve en régime de basses fréquences $(q \le q_0 - 1)$ ou de hautes fréquences $(q \ge q_0)$ où $q_0 \overset{\text{déf}}{=} 1 - [\log_2 \bar{\nu}]$ (et donc $2 \le 2^{q_0}\bar{\nu} < 4$).

Posons
$$g_q = 2^{q(\rho-1)}\sqrt{\|\Delta_q\tilde{c}\|^2_{L^2} + \left\|\Delta_q\tilde{d}\right\|^2_{L^2} - \frac{1}{4}(\bar{\nu}\Lambda\Delta_q\tilde{c}|\Delta_q\tilde{d})} \quad \text{si} \quad q \le q_0 - 1,$$
$$g_q = 2^{q(\rho-1)}\sqrt{\|\bar{\nu}\Lambda\Delta_q\tilde{c}\|^2_{L^2} + 2\left\|\Delta_q\tilde{d}\right\|^2_{L^2} - 2(\bar{\nu}\Lambda\Delta_q\tilde{c}|\Delta_q\tilde{d})} \quad \text{si} \quad q \ge q_0.$$

La décomposition de Littlewood-Paley construite dans l'appendice est telle que $\operatorname{Supp}\mathcal{F}(\Delta_q c) \subset 2^q C(0, 5/6, 12/5)$, si bien que

$$(7) \qquad \left(\frac{g_q}{2^{q\rho}\max(\bar{\nu}, 2^{-q})\,\|\Delta_q\tilde{c}\|_{L^2} + 2^{q(\rho-1)}\left\|\Delta_q\tilde{d}\right\|_{L^2}}\right)^{\pm 1} \le C$$

pour une constante universelle C.

Dans les deux premières étapes de la preuve, on considère les basses fréquences puis les hautes fréquences pour montrer que

$$(8)\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}g_q^2+\kappa\bar{\nu}\min(2^{2q},\bar{\nu}^{-2})g_q^2 \leq C\alpha_q g_q(\|\tilde{F}\|_{\widetilde{B}_{\bar{\nu}}^{\rho,\infty}}+\|\tilde{G}\|_{B^{\rho-1}}+V'(\|\tilde{c}\|_{\widetilde{B}_{\bar{\nu}}^{\rho,\infty}}+\|\tilde{d}\|_{B^{\rho-1}}))-KV'g_q^2,$$

(avec $\sum_q \alpha_q \leq 1$ et $\kappa > 0$ constante universelle).

On montre alors dans la troisième étape que cette inégalité donne un amortissement hautes fréquences pour c et d.

En revenant à $(LPH)_q$, on en déduit alors dans la dernière étape un effet régularisant de type parabolique pour d.

Première étape: les basses fréquences

On suppose que $q < q_0$ et l'on pose $f_q^2 = \|\Delta_q\tilde{c}\|_{L^2}^2 + \left\|\Delta_q\tilde{d}\right\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}(\bar{\nu}\Lambda\Delta_q\tilde{c}|\Delta_q\tilde{d})$.

Prenons le produit scalaire L^2 de la première équation de $(LPH)_q$ avec $\Delta_q\tilde{c}$ et de la deuxième avec $\Delta_q\tilde{d}$. Il vient

$$(9)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta_q\tilde{c}\|_{L^2}^2 + (\Delta_q(v\cdot\nabla\tilde{c})|\Delta_q\tilde{c}) + (\Lambda\Delta_q\tilde{d}|\Delta_q\tilde{c}) = (\Delta_q\tilde{F}|\Delta_q\tilde{c}) - KV'\|\Delta_q\tilde{c}\|_{L^2}^2,$$

$$(10)\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\Delta_q\tilde{d}\right\|_{L^2}^2+\bar{\nu}\left\|\Lambda\Delta_q\tilde{d}\right\|_{L^2}^2+(\Delta_q(v\cdot\nabla\tilde{d})|\Delta_q\tilde{d}) - (\Lambda\Delta_q\tilde{c}|\Delta_q\tilde{d})=(\Delta_q\tilde{G}|\Delta_q\tilde{d}) - KV'\left\|\Delta_q\tilde{d}\right\|_{L^2}^2.$$

En considérant les produits scalaires “croisés” (après avoir appliqué l'opérateur Λ à la première équation), on obtient également

$$(11)\quad \frac{d}{dt}\Big(\bar{\nu}\Lambda\Delta_q\tilde{c}|\Delta_q\tilde{d}\Big)+\bar{\nu}\left\|\Lambda\Delta_q\tilde{d}\right\|_{L^2}^2-\bar{\nu}\|\Lambda\Delta_q\tilde{c}\|_{L^2}^2+(\bar{\nu}\Lambda\Delta_q\tilde{c}|\Delta_q(v\cdot\nabla\tilde{d}))+(\bar{\nu}\Lambda\Delta_q(v\cdot\nabla\tilde{c})|\Delta_q\tilde{d})$$
$$+\bar{\nu}(\Lambda^2\Delta_q\tilde{d}|\bar{\nu}\Lambda\Delta_q\tilde{c}) = (\bar{\nu}\Lambda\Delta_q\tilde{F}|\Delta_q\tilde{d}) + (\bar{\nu}\Lambda\Delta_q\tilde{c}|\Delta_q\tilde{G}) - 2KV'(\bar{\nu}\Lambda\Delta_q\tilde{c}|\Delta_q\tilde{d}).$$

Une combinaison linéaire de (9), (10) et (11), et l'équivalence suivante:

$$(12)\qquad \frac{5}{8}f_q^2 \leq \|\Delta_q\tilde{c}\|_{L^2}^2 + \left\|\Delta_q\tilde{d}\right\|_{L^2}^2 \leq \frac{5}{2}f_q^2,$$

permettent d'obtenir l'existence d'une constante κ (1/32 fait l'affaire) telle que

$$(13)\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}f_q^2 + (\kappa\bar{\nu}2^{2q}+KV')f_q^2\leq(\Delta_q\tilde{F}|\Delta_q\tilde{c})+(\Delta_q\tilde{G}|\Delta_q\tilde{d})-\frac{1}{8}\Big((\bar{\nu}\Lambda\Delta_q\tilde{F}|\Delta_q\tilde{d})+(\bar{\nu}\Lambda\Delta_q\tilde{c}|\Delta_q\tilde{G})\Big)$$
$$-(\Delta_q(v\cdot\nabla\tilde{c})|\Delta_q\tilde{c})-(\Delta_q(v\cdot\nabla\tilde{d})|\Delta_q\tilde{d})+\frac{1}{8}\Big((\bar{\nu}\Lambda\Delta_q\tilde{c}|\Delta_q(v\cdot\nabla\tilde{d}))+(\bar{\nu}\Lambda\Delta_q(v\cdot\nabla\tilde{c})|\Delta_q\tilde{d})\Big).$$

A ce stade, on utilise une variante d'un lemme de [4] démontrée dans [6]:

Lemme.1— *Soit $F \in C^\infty(\mathbb{R}^N\backslash\{0\})$ une fonction homogène de degré m. Supposons que $1-N/2 < \rho \leq 1+N/2$ and $-N/2 < \rho' \leq N/2+1$. Alors on a les trois inégalités suivantes:*

$$|(F(D)\Delta_q(v\cdot\nabla c)|F(D)\Delta_q c)| \leq C\alpha_q 2^{-q(\rho'-m)}\|v\|_{B^{\frac{N}{2}+1}}\|c\|_{B^{\rho'}}\|F(D)\Delta_q c\|_{L^2},$$

$$|(F(D)\Delta_q(v\cdot\nabla c)|F(D)\Delta_q c)| \leq C\alpha_q 2^{-q(\rho-m)}\min(2^q,\bar{\nu}^{-1})\|v\|_{B^{\frac{N}{2}+1}}\|c\|_{\widetilde{B}_{\bar{\nu}}^{\rho,\infty}}\|F(D)\Delta_q c\|_{L^2},$$

$$|(F(D)\Delta_q(v\cdot\nabla c)|\Delta_q d) + (\Delta_q(v\cdot\nabla d)|F(D)\Delta_q c)| \leq C\alpha_q\|v\|_{B^{\frac{N}{2}+1}}$$
$$\times(2^{-q\rho'}\|F(D)\Delta_q c\|_{L^2}\|d\|_{B^{\rho'}} + 2^{-q(\rho-m)}\min(2^q,\bar{\nu}^{-1})\|c\|_{\widetilde{B}_{\bar{\nu}}^{\rho,\infty}}\|\Delta_q d\|_{L^2}),$$

où C ne dépend que de ρ, ρ' et N, et $\sum_q \alpha_q \leq 1$.

Ceci permet de majorer les quatre derniers termes de (13). En se souvenant de (12) et comme $2^q\bar\nu < 2$, on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}f_q^2 + \kappa\bar\nu 2^{2q} f_q^2 \le C f_q\Big(\left\|\Delta_q\tilde F\right\|_{L^2} + \left\|\Delta_q\tilde G\right\|_{L^2} + 2^{-q(\rho-1)}\alpha_q V'(\|\tilde c\|_{\widetilde B_{\bar\nu}^{\rho,\infty}} + \|\tilde d\|_{B^{\rho-1}})\Big) - KV' f_q^2,$$

avec $\sum_{q\in\mathbb{Z}}\alpha_q \le 1$.

Multiplions l'inégalité ci-dessus par $2^{2q(\rho-1)}$. Il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}g_q^2+\kappa\bar\nu 2^{2q} g_q^2 \le C g_q\Big(2^{q(\rho-1)}\left\|\Delta_q\tilde F\right\|_{L^2}+2^{q(\rho-1)}\left\|\Delta_q\tilde G\right\|_{L^2}+\alpha_q V'(\|\tilde c\|_{\widetilde B_{\bar\nu}^{\rho,\infty}}+\|\tilde d\|_{B^{\rho-1}})\Big)-KV' g_q^2.$$

Deuxième étape: les hautes fréquences

Supposons maintenant que $q \ge q_0$. On applique $\bar\nu\Lambda$ à la première équation de $(LPH)_q$ puis on prend le produit scalaire L^2 avec $\bar\nu\Lambda\Delta_q\tilde c$. Il vient

$$\begin{aligned}(14)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar\nu\Lambda\Delta_q\tilde c\|_{L^2}^2 + (\bar\nu\Lambda\Delta_q(v\cdot\nabla\tilde c)|\bar\nu\Lambda\Delta_q\tilde c) + \bar\nu\left(\Lambda^2\Delta_q\tilde d|\bar\nu\Lambda\Delta_q\tilde c\right)&\\ = \left(\bar\nu\Lambda\Delta_q\tilde F|\bar\nu\Lambda\Delta_q\tilde c\right) - KV'\|\bar\nu\Lambda\Delta_q\tilde c\|_{L^2}^2.&\end{aligned}$$

Soit $f_q^2 = \|\bar\nu\Lambda\Delta_q\tilde c\|_{L^2}^2 + 2\left\|\Delta_q\tilde d\right\|_{L^2}^2 - 2(\bar\nu\Lambda\Delta_q\tilde c|\Delta_q\tilde d)$. D'après (10), (11) et (14), on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}f_q^2 + \bar\nu\|\Lambda\Delta_q\tilde c\|_{L^2}^2+\bar\nu\left\|\Lambda\Delta_q\tilde d\right\|_{L^2}^2-2(\Lambda\Delta_q\tilde c|\Delta_q\tilde d) + KV' f_q^2 &= \left(\bar\nu\Lambda\Delta_q\tilde F|\bar\nu\Lambda\Delta_q\tilde c\right)\\ +2(\Delta_q\tilde d|\Delta_q\tilde G) - (\bar\nu\Lambda\Delta_q\tilde c|\Delta_q\tilde G) - (\bar\nu\Lambda\Delta_q\tilde F|\Delta_q\tilde d) &- (\bar\nu\Lambda\Delta_q(v\cdot\nabla\tilde c)|\bar\nu\Lambda\Delta_q\tilde c)\\ -2\left(\Delta_q(v\cdot\nabla\tilde d)|\Delta_q\tilde d\right) + \left(\bar\nu\Lambda\Delta_q(v\cdot\nabla\tilde c)|\Delta_q\tilde d\right) &+ \left(\bar\nu\Lambda\Delta_q\tilde c|\Delta_q(v\cdot\nabla\tilde d)\right).\end{aligned}$$

Comme pour $q \ge q_0$, on a trivialement

$$\left\|\bar\nu\Lambda\Delta_q\tilde d\right\|_{L^2}^2 - 2\left\|\Delta_q\tilde d\right\|_{L^2}^2 \ge \frac{7}{9}\left\|\Delta_q\tilde d\right\|_{L^2}^2,$$

des calculs immédiats conjugués au lemme 1 donnent

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}g_q^2 + \kappa\bar\nu g_q^2 \le C g_q\Big(2^{q(\rho-1)}\left\|\bar\nu\Lambda\Delta_q\tilde F\right\|_{L^2} + 2^{q(\rho-1)}\left\|\Delta_q\tilde G\right\|_{L^2}&\\ +\alpha_q V'\left(\|\tilde c\|_{\widetilde B_{\bar\nu}^{\rho,\infty}} + \|\tilde d\|_{B^{\rho-1}}\right)\Big) - KV' g_q^2&\end{aligned}$$

pour une constante universelle $\kappa > 0$. Ceci achève la preuve de (8).

Troisième étape: l'amortissement

En intégrant (8), on établit que

$$\begin{aligned}(15)\quad g_q(t) + \kappa\bar\nu\min(2^{2q},\bar\nu^{-2})\int_0^t g_q(\tau)\,d\tau \le g_q(0)+C\int_0^t \alpha_q(\tau)(\|\tilde F(\tau)\|_{\widetilde B_{\bar\nu}^{\rho,\infty}} + \|\tilde G(\tau)\|_{B^{\rho-1}})\,d\tau&\\ +\int_0^t V'(\tau)\Big(C\alpha_q(\tau)\Big(\|\tilde c(\tau)\|_{\widetilde B_{\bar\nu}^{\rho,\infty}} + \|\tilde d(\tau)\|_{B^{\rho-1}}\Big) - K g_q(\tau)\Big)\,d\tau.&\end{aligned}$$

Par ailleurs, (7) nous assure que

$$C\alpha_q(\tau)\big(\|\tilde{c}(\tau)\|_{\widetilde{B}^{\rho,\infty}_{\bar\nu}} + \|\tilde{d}(\tau)\|_{B^{\rho-1}}\big) - Kg_q(\tau) \le C\alpha_q(\tau)\|\tilde{c}(\tau)\|_{\widetilde{B}^{\rho,\infty}_{\bar\nu}}$$
$$-KC^{-1}2^{q\rho}\max(\bar\nu,2^{-q})\,\|\Delta_q\tilde{c}\|_{L^2} + C\alpha_q(\tau)\|\tilde{d}(\tau)\|_{B^{\rho-1}} - KC^{-1}2^{q(\rho-1)}\left\|\Delta_q\tilde{d}\right\|_{L^2}.$$

Si l'on choisit $K\ge C^2$, on en déduit que

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} C\alpha_q(\tau)(\|\tilde{c}(\tau)\|_{\widetilde{B}^{\rho,\infty}_{\bar\nu}} + \|\tilde{d}(\tau)\|_{B^{\rho-1}}) - Kg_q(\tau)\le 0.$$

En injectant cette dernière inégalité et (7) dans (15) après sommation sur $\mathbb{Z}$, on conclut que

$$(16)\ \|\tilde{c}(t)\|_{\widetilde{B}^{\rho,\infty}_{\bar\nu}} + \|\tilde{d}(t)\|_{B^{\rho-1}} + \kappa\bar\nu\left(\int_0^t \|\tilde{c}(\tau)\|_{\widetilde{B}^{\rho,1}_{\bar\nu}}\,d\tau + \sum_{q\in\mathbb{Z}}\int_0^t 2^{q(\rho-1)}\min(2^{2q},\bar\nu^{-2})\left\|\Delta_q\tilde{d}(\tau)\right\|_{L^2}d\tau\right)$$
$$\le C\Big(\|c_0\|_{\widetilde{B}^{\rho,\infty}_{\bar\nu}} + \|d_0\|_{B^{\rho-1}} + \int_0^t\Big(\|\tilde{F}(\tau)\|_{\widetilde{B}^{\rho,\infty}_{\bar\nu}} + \|\tilde{G}(\tau)\|_{B^{\rho-1}}\Big)\,d\tau\Big).$$

Quatrième étape: l'effet régularisant

Il ne reste plus qu'à montrer l'effet régularisant de (LPH) sur d. On a déjà obtenu cet effet pour les basses fréquences dans (16), on se limite donc dans cette section à $q\ge q_0$.

Soit $g_q \stackrel{\text{déf}}{=} 2^{q(\rho-1)}\left\|\Delta_q\tilde{d}\right\|_{L^2}$. D'après (10) et le lemme 1, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}g_q^2 + \kappa\bar\nu 2^{2q}g_q^2 \le g_q\left(2^{q\rho}\|\Delta_q\tilde{c}\|_{L^2} + 2^{q(\rho-1)}\left\|\Delta_q\tilde{G}\right\|_{L^2}\right) + g_qV'(t)(C\alpha_q\|\tilde{d}\|_{B^{\rho-1}} - Kg_q).$$

On en déduit donc que

$$g_q(t) + \kappa\bar\nu 2^{2q}\int_0^t g_q(\tau)\,d\tau \le g_q(0) + \int_0^t 2^{q(\rho-1)}\left\|\Delta_q\tilde{G}(\tau)\right\|_{L^2}d\tau + \int_0^t 2^{q\rho}\|\Delta_q\tilde{c}(\tau)\|_{L^2}\,d\tau$$
$$+C\int_0^t V'(\tau)\alpha_q(\tau)\|\tilde{d}(\tau)\|_{B^{\rho-1}}\,d\tau,$$

d'où

$$\sum_{q\ge q_0}2^{q(\rho-1)}\left\|\Delta_q\tilde{d}(t)\right\|_{L^2} + \kappa\bar\nu\int_0^t\sum_{q\ge q_0}2^{q(\rho+1)}\left\|\Delta_q\tilde{d}(\tau)\right\|_{L^2}d\tau \le \|d_0\|_{B^{\rho-1}}$$
$$+\int_0^t\|\tilde{G}(\tau)\|_{B^{\rho-1}}\,d\tau + \int_0^t\sum_{q\ge q_0}2^{q\rho}\|\Delta_q\tilde{c}(\tau)\|_{L^2}\,d\tau + CV(t)\sup_{[0,t]}\|\tilde{d}(t)\|_{B^{\rho-1}}.$$

En revenant à (16), on conclut que

$$\kappa\bar\nu\int_0^t\sum_{q\ge q_0}2^{q(\rho+1)}\left\|\Delta_q\tilde{d}(\tau)\right\|_{L^2}d\tau \le (C+CV(t))\Big(\|c_0\|_{\widetilde{B}^{\rho,\infty}_{\bar\nu}} + \|d_0\|_{B^{\rho-1}}$$
$$+\int_0^t\Big(\|\tilde{F}(\tau)\|_{\widetilde{B}^{\rho,\infty}_{\bar\nu}} + \|\tilde{G}(\tau)\|_{B^{\rho-1}}\Big)\,d\tau\Big).$$

Cette dernière inégalité combinée avec (16), permet d'achever la preuve de la proposition 2. □

Remarque 4.— L'existence (et l'unicité) d'une solution régulière pour (LPH) dans le cas de données régulières est classique (voir par exemple [6] pour une esquisse de preuve.)

3 Quelques généralisations

3.1 Existence locale dans d'autres espaces critiques

Dans le cas incompressible, on connaît de nombreux résultats d'existence globale de solutions fortes dans des espaces invariants par le scaling de l'équation qui ne sont pas construits à partir de l'espace L^2. On dispose par exemple de tels résultats pour des données initiales dans les espaces de Besov homogènes $B_p^{\frac{N}{p}-1}$ (définis en appendice) pour $1 \leq p < +\infty$.

Lorsque $p > N$, l'indice de régularité de l'espace ci-dessus est strictement négatif. On sait pourtant que lorsque la donnée initiale mesurée dans cet espace de Besov est petite, on a existence globale d'une solution forte. Ceci permet par exemple d'obtenir l'existence globale pour une vitesse initiale "grande en module" mais très oscillante.

Ces considérations motivent l'étude de (NSC) avec une densité initiale ρ_0 telle que $(\rho_0 - \bar{\rho}) \in B_p^{\frac{N}{p}}$ et une vitesse initiale $u_0 \in B_p^{\frac{N}{p}-1}$. Lorsque $p \neq 2$, nous ne sommes malheureusement pas encore en mesure de prouver un résultat d'existence globale sous l'hypothèse ci-dessus, même sous une condition de petitesse. Nous devons nous contenter d'un résultat d'existence locale pour une densité initiale proche d'un état constant $\bar{\rho} > 0$ quelconque.

Introduisons l'espace fonctionnel suivant pour $T > 0$, $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p < +\infty$:

$$E_p^s = \Big(C([0,T]; B_p^s) \Big) \times \Big(L^1(0,T; B_p^{s+1}) \cap C(0,T; B_p^{s-1}) \Big)^d.$$

L'espace $E^{\frac{N}{p}}$ est manifestement invariant par le *scaling* de (NSC).

Dans [7], nous prouvons le résultat suivant:

Théorème 2.—*Soit $\bar{\rho} > 0$ et $p \in [1, 2N[$. Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout triplet (ρ_0, u_0, f) tel que $(\rho_0 - \bar{\rho}) \in B_p^{N/p}$, $u_0 \in B_p^{N/p-1}$, $f \in L^1(\mathbb{R}^+; B_p^{N/p-1})$ et*

$$\|\rho_0 - \bar{\rho}\|_{B_p^{\frac{N}{p}}} \leq \alpha,$$

il existe un temps $T > 0$ tel que (NSC) admette une solution (ρ, u) vérifiant $(\rho - \bar{\rho}, u) \in E_T^{\frac{N}{p}}$. Si de plus $p < N$, cette solution est unique dans l'espace fonctionnel ci-dessus.

La preuve de ce résultat utilise une variante de la proposition A.3 et des estimations sur les équations de transport par un champ de vitesse dans $L^1(0,T; B^{\frac{N}{p}+1})$. Tout revient finalement à remarquer que le couplage linéaire entre les deux équations de (NSC) n'intervient que par des termes d'ordre inférieur que l'on peut traiter comme des termes de forces tant que l'on se limite à des résultats locaux en temps.

On remarquera que la partie existence du théorème autorise des indices de régularité s négatifs pour la vitesse (avec toutefois $s > -1/2$ au lieu de $s > -1$ dans le cas incompressible) mais que l'unicité semble exiger que $s > 0$.

Signalons enfin que si l'on considère des données initiales un peu plus régulières (c'est-à-dire $(\rho_0 - \rho) \in B_p^s$, $u_0 \in B_p^{s-1}$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^+; B_p^{s-1})$ pour un $s > N/p$), on peut remplacer la condition de petitesse $\|\rho_0 - \bar{\rho}\|_{B_p^{\frac{N}{p}}} \leq \alpha$ par une hypothèse du type "loin du vide":

$$0 < \underline{\rho} \leq \rho_0 \quad \text{avec} \quad \underline{\rho} \quad \text{constante}.$$

3.2 Cas d'un fluide polytropique

L'évolution d'un fluide compressible "général" est décrit par le système suivant:

$$(NSP)\qquad \begin{cases} \partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u\otimes u) - \operatorname{div}\tau + \nabla P = \rho f, \\ \partial_t\Big(\rho\Big(\frac{|u|^2}{2}+e\Big)\Big) + \operatorname{div}\Big[u\Big(\rho\Big(\frac{|u|^2}{2}+e\Big)+P\Big)\Big] = \operatorname{div}(\tau\cdot u) - \operatorname{div} q + \rho f\cdot u. \end{cases}$$

Contrairement aux hypothèses faites dans le cas isentropique, la pression P dépend de la densité *et* de l'énergie interne du fluide par unité de masse, $e(t,x)$. On a noté $\tau = \lambda\operatorname{div} u\,\mathbf{1} + 2\mu Du$ (où $(Du)_{ij} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}(\partial_i u^j + \partial_j u^i)$ est le tenseur des déformations) et on suppose pour simplifier que les coefficients λ et μ sont constants et tels que $\mu > 0$ et $\lambda + 2\mu > 0$. Enfin, q désigne la conduction thermique et s'écrit $q = -k\nabla\mathcal{T}$ avec k constante strictement positive et $\mathcal{T} = \mathcal{T}(t,x)$, température du fluide.

Dans les conditions "normales" de température et de pression, un tel fluide est polytropique. Il vérifie la loi de Mariotte: $P = R\rho\mathcal{T}$ (R constante des gaz parfaits) et la loi de Joule: $e = C_v\mathcal{T}$ avec C_v constante strictement positive.

On s'intéresse à de petites perturbations d'un état à densité et température constantes $(\bar\rho, \bar{\mathcal{T}})$. On vérifie aisément que (NSP) est invariant par la transformation

$$\begin{gathered}(\rho(t,x), u(t,x), \mathcal{T}(t,x)) \longrightarrow (\rho(\ell^2 t, \ell x), \ell u(\ell^2 t, \ell x), \ell^2\mathcal{T}(\ell^2 t, \ell x)) \\ (\rho_0(x), u_0(x), \mathcal{T}_0(x)) \longrightarrow (\rho_0(\ell x), \ell u_0(\ell x), \ell^2\mathcal{T}_0(\ell x)),\end{gathered}$$

à des termes d'ordre inférieur près provenant de la pression. Ceci nous suggère d'étudier l'existence de solutions fortes pour des densités et vitesses initiales dans les mêmes espaces que pour (NSC), et d'imposer à $\mathcal{T}_0 - \bar{\mathcal{T}}$ un cran de régularité de moins que pour la vitesse.

Si l'on se limite à des espaces de type B^s, on s'attend donc à obtenir l'existence globale de solutions fortes sous l'hypothèse

$$(17)\qquad \|\rho_0 - \bar\rho\|_{B^{\frac{N}{2}}\cap B^{\frac{N}{2}-1}} + \|u_0\|_{B^{\frac{N}{2}-1}} + \|\mathcal{T}_0 - \bar{\mathcal{T}}\|_{B^{\frac{N}{2}-2}} + \|f\|_{L^1(B^{\frac{N}{2}-1})} \ll 1,$$

En reprenant les méthodes employées ici dans le cas isentropique, on prouve que c'est effectivement le cas en dimension $N \geq 4$, ce qui n'est pas très intéressant d'un point de vue physique !

En dimension $N = 3$, on peut construire une solution globale sous la condition (17) mais on perd la partie unicité à moins de supposer un peu plus de régularité sur les données initiales.

En dimension $N = 2$, la situation est encore pire, même pour obtenir l'existence, il faut supposer plus de régularité que ce que suggèrent nos considérations de *scaling.*

Le lecteur intéressé par les résultats détaillés pourra consulter [7]. Indiquons juste que là encore, la partie incompressible de la vitesse se découple des autres équations. On doit finalement prouver des estimations *a priori* pour un système linéaire mixte de trois équations avec terme de convection, les équations portant respectivement sur l'écart à la densité de référence, c, la partie compressible de la vitesse, d et l'écart à la température de référence.

Appendice

Nous définissons ici pour la commodité du lecteur les espaces de Besov homogènes, la décomposition de Littlewood-Paley et en rappelons quelques propriétés classiques.

A.1 La décomposition de Littlewood-Paley et les espaces de Besov homogènes

Avant toute chose, définissons une décomposition de Littlewood-Paley homogène. On part d'une partition dyadique de l'unité, c'est-à-dire d'une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ que l'on supposera à support dans la couronne $\mathcal{C} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\xi \in \mathbb{R}^N,\ 5/6 \leq |\xi| \leq 12/5\}$ (pour fixer les idées) et telle que

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-q}\xi) = 1 \quad \text{si} \quad \xi \neq 0.$$

Si l'on pose $h = \mathcal{F}^{-1}\varphi$, on définit les blocs dyadiques Δ_q par

$$\Delta_q u \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi(2^{-q}D)u = 2^{qN}\int_{\mathbb{R}^N} h(2^q y)u(x-y)\,dy.$$

La décomposition formelle

$$u = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \Delta_q u$$

est appelée décomposition de Littlewood-Paley homogène.

On prendra garde au fait que l'égalité ci-dessus n'est pas toujours valable dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ mais seulement dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ modulo les polynômes (voir [14]). En effet,

i) Le membre de droite ne converge pas toujours dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$,

ii) Même lorsqu'il converge, l'égalité peut ne pas être vraie dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ (penser au cas $u = 1$).

En revanche, les propriétés de support de φ confèrent à la décomposition d'agréables propriétés de quasi-orthogonalité. Par exemple, on a

$$\Delta_p\Delta_q u \equiv 0 \quad \text{si} \quad |p-q| \geq 2.$$

Nous pouvons maintenant définir les espaces de Besov homogènes que nous utiliserons:

Définition A.1.—*Soit $1 \leq p < +\infty$, $s \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. On pose*

$$\|u\|_{B^s_p} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{q\in\mathbb{Z}} 2^{sq}\,\|\Delta_q u\|_{L^p}.$$

Dans le cas $p = 2$, cette définition coïncide avec celle donnée dans l'introduction. Lorsque $p \neq 2$, une définition correcte des espaces B^s_p nécessite une troncature régulière.

On notera que $\|\cdot\|_{B^s_p}$ n'est pas une norme sur $\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\ \|u\|_{B^s_p} < +\infty\}$. En effet, si u est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $\|u\|_{B^s_p} = 0$ si et seulement si u est un polynôme.

En suivant [1], ceci nous conduit à définir nos espaces de Besov homogènes de la façon suivante:

Définition A.2.— *Soit $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < +\infty$ et $m = -[N/p + 1 - s]$. Si $m < 0$, on pose*

$$B^s_p = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),\ \|u\|_{B^s_p} < \infty \ \text{et}\ u = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \Delta_q u \ \text{dans}\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)\}.$$

Lorsque $m \geq 0$, on note $\mathcal{P}_m[\mathbb{R}^N]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq m$ et on pose

$$B^s_p = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)/\mathcal{P}_m[\mathbb{R}^N],\ \|u\|_{B^s} < \infty \ \text{et}\ u = \sum_{q\in\mathbb{Z}} \Delta_q u \ \text{dans}\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)/\mathcal{P}_m[\mathbb{R}^N]\}.$$

Dans l'article, nous utilisons principalement l'espace B^s_2 que nous notons B^s en l'absence d'ambiguïté. Cet espace est inclus dans l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s$: en effet, on a

$$\|u\|^2_{\dot{H}^s} \approx \sum_{q\in\mathbb{Z}} \left(2^{sq}\,\|\Delta_q u\|_{L^2}\right)^2,$$

ce qui montre que B^s et $\dot{H}^s$ sont en fait très proches.

Plus généralement, les espaces B^s_p et $\dot{W}^{s,p}$ sont aussi très proches et on a toujours $B^s_p \hookrightarrow \dot{W}^{s,p}$.

A.2 Quelques propriétés classiques des espaces de Besov

Énonçons maintenant quelques propriétés importantes des espaces B^s_p.

Proposition A.1.— *On a les résultats suivants:*

i) Densité: L'ensemble C_0^∞ est dense dans B^s_p dès que $|s| \leq N/p$.

ii) Dérivation: Il existe une constante universelle C telle que

$$C^{-1}\|u\|_{B^s_p} \leq \|\nabla u\|_{B^{s-1}_p} \leq C\|u\|_{B^s_p}.$$

iii) Dérivation fractionnaire: Soit $\Lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{-\Delta}$ et $\sigma \in I\!R$. L'opérateur Λ^σ est un isomorphisme de B^s_p dans $B^{s-\sigma}_p$.

iv) Propriétés d'algèbre: lorsque $s > 0$, $B^s_p \cap L^\infty$ est une algèbre.

v) Interpolation: $(B^{s_1}_p, B^{s_2}_p)_{\theta,1} = B^{\theta s_1+(1-\theta)s_2}_p$.

Signalons de plus que l'espace $B^{N/p}$ est une algèbre incluse dans l'espace C_0 des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.

Les espaces B^s_p vérifient des propriétés du type estimations douces:

Proposition A.2.— *Soit $s > 0$, $1 \leq p < +\infty$, $u \in L^\infty \cap B^s_p$ et $v \in L^\infty \cap B^s_p$. Alors $uv \in B^s_p \cap L^\infty$ et l'on a les estimations douces suivantes*

$$\|uv\|_{B^s_p} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{B^s_p} + \|v\|_{L^\infty}\|u\|_{B^s_p}\right).$$

Soit s_1, $s_2 \leq N/p$ tels que $s_1 + s_2 > 0$, $u \in B^{s_1}_p$ et $v \in B^{s_2}_p$. Alors $uv \in B^{s_1+s_2-N/p}_p$ et de plus

$$\|uv\|_{B^{s_1+s_2-N/p}_p} \leq C\|u\|_{B^{s_1}_p}\|v\|_{B^{s_2}_p}.$$

On renvoie à [3] pour la preuve de ces résultats.

Le lemme de composition suivant nous sera fort utile pour estimer le terme de pression dans (NSC).

Lemme A.1.—*Soit $s > 0$, $1 \leq p < +\infty$ et $u \in B^s_p \cap L^\infty$. Si $F \in W^{[s]+2,\infty}_{loc}(I\!R^N)$ vérifie $F(0) = 0$ alors $F(u) \in B^s_p$. De plus, il existe une fonction d'une variable C_0 ne dépendant que de s, p, N et F, et telle que*

$$\|F(u)\|_{B^s_p} \leq C_0\left(\|u\|_{L^\infty}\right)\|u\|_{B^s_p}.$$

A.3 Propriétés régularisantes de l'équation de la chaleur

Dans cette partie, on donne des propriétés régularisantes de l'équation de la chaleur utilisées pour estimer la partie incompressible de la vitesse dans (NSC). Introduisons d'abord quelques notations.

Pour $T > 0$, $r \in [1, +\infty]$ et X espace de Banach, on pose $\|u\|_{L^r_T(X)} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\int_0^T \|u(\tau,\cdot)\|^r_X \, d\tau\right)^{1/r}$ et

$$L^r(0,T;X) \stackrel{\text{déf}}{=} \{u(t,x),\ u(t,\cdot) \in X \text{ pour presque tout } t \in]0,T[\text{ et } \|u\|_{L^r_T(X)} < +\infty\}.$$

On pose aussi $\|u\|_{L^r(X)} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\int_0^{+\infty} \|u(\tau,\cdot)\|^r_X \, d\tau\right)^{1/r}$ et

$$L^r(\mathbb{R}^+;X) \stackrel{\text{déf}}{=} \{u(t,x),\ u(t,\cdot) \in X \text{ pour presque tout } t > 0 \text{ et } \|u\|_{L^r(X)} < +\infty\}.$$

Soit $C([0,T];X)$ (resp. $C(\mathbb{R}^+;X)$) l'espace des fonctions de $L^\infty(0,T;X)$ (resp. $L^\infty(\mathbb{R}^+;X)$) telles que l'application $t \mapsto u(t,\cdot)$ soit continue de $[0,T]$ (resp. $\mathbb{R}^+$) dans X.

D'après [3], on a la proposition suivante:

Proposition A.3.— *Soit $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1,+\infty[$, $r \in [1,+\infty]$, et u solution de*

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u = f, \\ u_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de N, ν et r et telle que pour tout $0 < T \leq +\infty$, on ait

$$\|u\|_{L^r_T(B_p^{s+2/r})} \leq C \left(\|u_0\|_{B_p^s} + \|f\|_{L^1_T(B_p^s)} \right).$$

De plus, $u \in C([0,T];B_p^s)$.

Références bibliographiques

[1] G. Bourdaud: Réalisations des espaces de Besov homogènes, *Arkiv för matematik*, **26**, pages 41-54 (1988).

[2] M. Cannone: Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes, Diderot Editeurs (1995).

[3] J.-Y. Chemin: About Navier-Stokes system, *Prépublication du Laboratoire d'analyse numérique de Paris 6* (1996).

[4] J.-Y. Chemin et N. Lerner: Flot de champs de vecteurs non lipschitziens et équations de Navier-Stokes, *Journal of Differential Equations*, **121**, pages 314–328 (1992).

[5] J.-Y. Chemin and N. Masmoudi: About lifespan of regular solutions of equations related to viscoelastic fluids, *preprint* (1998).

[6] R. Danchin: Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations. Prépublication du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris 6 (1999).

[7] R. Danchin: Travail en cours. Future prépublication du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris 6.

[8] R. Danchin and B. Desjardins: Existence of solutions for compressible fluid models of Korteweg type. Prépublication du *DMI de l'Ecole Normale Supérieure* (1998).

[9] H. Fujita and T. Kato: On the Navier-Stokes initial value problem I, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, pages 269-315 (1964).

[10] T. Hagstrom and J. Lorenz: All-time existence of classical solutions for slightly compressible flows, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **29**, pages 652-672 (1998).

[11] J. Leray: Sur le mouvement d'un liquide visqueux remplissant l'espace, *Acta mathematica*, **63**, pages 193-248 (1934).

[12] P.-L. Lions: Mathematical topics in fluid mechanics, vol. 2, compressible models (1998).

[13] A. Matsumura and T. Nishida: The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases, *J. of Math. of Kyoto University*, **20**, pages 67-104 (1980).

[14] J. Peetre: New thoughts on Besov spaces, Duke University Mathematical Series, Duke University, Durham (1976).

[15] V. Solonnikov: Solvability of the initial boundary value problem for the equation of a viscous compressible fluid, *Journal of Soviet Mathematics*, **14**, pages 1120–1133 (1980).

[16] D. Tataru: Local and global results for wave maps I, *Communications in Partial Differential Equations*, **23**, pages 1781–1793 (1998).