SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1998-1999

Nader Masmoudi

Couches d'Ekman pour les fluides tournants et la limite du système de Navier-Stokes vers celui d'Euler.

Séminaire É. D. P. (1998-1999), Exposé n° XVI, 13 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1998-1999____A16_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Couches d'Ekman pour les fluides tournants et la limite du système de Navier-Stokes vers celui d'Euler.

N. Masmoudi

CEREMADE-UMR CNRS 7534, Université Paris Dauphine, Place de Lattre de Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France
masmoudi@dmi.ens.fr

1 Introduction

Nous donnons ici un résumé des résultats obtenus dans [27] et [28] (voir aussi [17]). Ces résultats justifient certains passages à la limite dans des équations provenant de la mécanique des fluides lorsqu'un ou plusieurs petits paramètres tendent vers zéro. Ces petits paramètres correspondent à une réalité physique (fluide peu visqueux, fluide tournant à grande vitesse...). Dans ce qui suit nous considérons des nombres de Reynolds tendant vers l'infini, des nombres d'Ekman et de Rossby tendant vers zéro. Dans le paragraphe suivant, nous présentons une esquisse de la démonstration du résultat principale de [27] qui est le passage des équations de Navier-Stokes vers ceux d' Euler dans un domaine avec bord. Dans le troisième paragraphe, nous présentons quelques résultats de [28] et introduisons la notion de données "semis bien préparées".

2 Le passage de Navier-Stokes à Euler

La description des solutions faibles de l'équation de Navier-Stokes dans un domaine avec bords lorsque la viscosité tend vers zéro est un problème ouvert (on ne sait pas si ces solutions convergent vers une solution de l'équation d'Euler, ou s'il y a une perte possible d'énergie). Le cas de l'espace entier a été résolu par H. Swann [32] et T. Kato [19] . La difficulté dans le cas avec bords provient du fait que pour la limite formelle, c'est-à-dire l'équation d'Euler, on ne peut plus imposer de condition de non glissement sur le bord (on peut juste imposer que la vitesse normale s'annule), on doit donc construire une couche limite pour pouvoir récupérer les conditions de Dirichlet sur le bord. Cependant les équations "naturelles" (équations de Prandtl) vérifiées par cette couche sont mal posées.

Dans [27], nous montrons qu'on peut éviter cette difficulté (dans certains cas particuliers) en construisant une autre couche limite, qui n'a pas vraiment de sens physique mais qui permet le passage à limite (dans un ouvert $\Omega = \mathbb{T}^2 \times]0,1[$ par exemple) si on suppose de plus que le rapport des viscosités verticale et horizontale tend vers zéro. Insistons sur le fait que la couche que nous construisons n'est pas vue par les estimations d'énergie (elle a une norme L^2 qui tend vers 0) et qu'elle peut donc être remplacée par une autre. Plus précisément nous montrons que les solutions faibles de l'équation de Navier-Stokes (où le terme de viscosité n'est plus isotrope et s' écrit $-A_H \Delta_{x,y} - A_V \partial^2_{zz}$) tendent vers la solution forte de l'équation d'Euler sur son intervalle d'existence lorsque A_H, A_V et (A_V/A_H) tendent vers zéro. Signalons aussi un résultat de Kato qui montre dans [18] que la convergence vers la solution de l'équation d'Euler est équivalente à la non dissipation d'énergie dans une petite couronne autour du bord.

Nous considérons le système $(NS_{\nu,\eta})$

$$\partial_t u^n + \nabla(u^n \otimes u^n) - \nu \partial_z^2 u^n - \eta \Delta_{x,y} u^n = -\nabla p \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{1}$$

$$\nabla . u^n = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{2}$$

$$u^n = 0, \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{3}$$

$$u^n(0) = u_0^n \quad \text{avec} \quad \nabla . u_0^n = 0 \tag{4}$$

où $\Omega = \omega \times [0,h]$ ou $\Omega = \omega \times [0,\infty[$ avec $\omega = \mathbb{T}^2$ ou $\mathbb{R}^2$, $\nu = \nu_n$ et $\eta = \eta_n$. Lorsque η, ν vont vers 0, on s'attend à ce que u^n converge vers la solution du système d'Euler

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t w + \nabla(w \otimes w) = -\nabla p \text{ dans } \quad \Omega, \\ \nabla . w = 0 \text{ dans } \quad \Omega, \\ w.n = \pm w_3 = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \\ w(t=0) = w^0. \end{array} \right. \tag{5}$$

Nous montrons dans [27] le théorème suivant

Théorème 2.1 *Soit $s > 5/2$ et*

$$w^0 \in H^s(\Omega)^3, \quad \nabla . w^0 = 0, \quad w^0.n = 0 \ \ sur \ \ \partial\Omega.$$

On suppose que $u^n(0)$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers w^0 et que $\nu, \eta, \nu/\eta$ tendent vers 0, alors toute suite de solutions faibles (à la Leray) u^n de (1- 4) satisfaisant l'inégalité d'énergie converge vers w :

$$u^n - w \to 0 \quad dans \quad L^\infty(0, T^*, L^2(\Omega)),$$

$$\sqrt{\eta}\nabla_{x,y}u^n, \sqrt{\nu}\partial_z u^n \to 0 \ \textit{dans} \ L^2(0,T^*,L^2(\Omega)),$$

où w est l'unique solution de (5) dans $L^\infty(0,T^*;H^s(\Omega)^3)$.

Nous donnons ci-dessous une idée de la preuve de ce résultat (voir [27]). L'existence de solutions faibles globales pour $(NS_{\nu,\eta})$, satisfaisant l'inégalité d'énergie est due à J. Leray

$$\frac{1}{2}\|u^n(t)\|_{L^2}^2 + \nu\int_0^t \|\partial_z u^n\|_{L^2}^2 ds + \eta\int_0^t \|\partial_x u^n\|_{L^2}^2 + \|\partial_y u^n\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|u_o^n\|_{L^2}^2 \quad (6)$$

Cette estimation ne montre pas que u^n est borné dans $L^2(0,T;H^1)$ et par suite si on prend une sous suite (encore notée u^n) convergeant faiblement vers u dans $L^\infty(0,T;L^2)$, on ne peut pas déduire que $u^n\otimes u^n$ converge faiblement vers $w\otimes w$. Si on essaie d'utiliser des estimations d'énergie pour montrer que $u^n - w$ reste petit, on voit que les intégrations par parties introduisent des termes de bords qu'on ne peut pas contrôler (car $u^n - w$ ne s'annule pas sur le bord). Donc, on est amené à construire une couche limite qui nous permet de retrouver les conditions de Dirichlet : $\mathcal{B}$ sera un correcteur de petite norme L^2 et localisé prés de $\partial\Omega$ (on se restreint ici à la partie près de $z=0$).

$$\begin{cases} \mathcal{B}^n(z=0) + w(z=0) = 0, \quad \mathcal{B}^n(z=\infty) = 0, \\ div(\mathcal{B}^n) = 0, \quad \mathcal{B}^n \to 0 \quad \text{dans} \quad L^\infty(0,T^*;L^2) \end{cases}$$

Bien sur, cette couche doit satisfaire les meilleures estimations possibles sur son gradient. Un choix possible est de prendre $\mathcal{B}$ de la forme

$$\mathcal{B} = -w(z=0)e^{-\frac{z}{\sqrt{\nu\zeta}}} + ...$$

où ζ est un paramètre libre qu'on choisira à la fin. Nous passons maintenant à l'idée de la preuve. Au lieu d'utiliser une estimation d'énergie sur $u^n - w$, on va travailler avec $v^n = u^n - (w + \mathcal{B}^n)$. L'équation satisfaite par $w^{\mathcal{B}} = w + \mathcal{B}^n$ est

$$\begin{aligned} \partial_t w^{\mathcal{B}} + w^{\mathcal{B}}.\nabla w^{\mathcal{B}} - \nu\partial_z^2 w^{\mathcal{B}} - \eta\Delta_{x,y}w^{\mathcal{B}} = \\ \partial_t\mathcal{B} + \mathcal{B}.\nabla w^{\mathcal{B}} + w.\nabla\mathcal{B} - \nu\partial_z^2 w^{\mathcal{B}} - \eta\Delta_{x,y}w^{\mathcal{B}} - \nabla p \end{aligned} \quad (7)$$

qui donne cette égalité d'énergie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|w^{\mathcal{B}}(t)\|_{L^2}^2 + \nu\int_0^t \|\partial_z w^{\mathcal{B}}(s)\|_{L^2}^2\, ds + \eta\int_0^t \|\partial_x w^{\mathcal{B}}\|_{L^2}^2 + \|\partial_y w^{\mathcal{B}}\|_{L^2}^2 = \\ \frac{1}{2}\|w^{\mathcal{B}}(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t w^{\mathcal{B}}.[\partial_t\mathcal{B} + w.\nabla\mathcal{B} - \nu\partial_z^2 w^{\mathcal{B}} - \eta\Delta_{x,y}w^{\mathcal{B}}] \end{aligned} \quad (8)$$

En utilisant la formulation faible de (1), nous obtenons pour presque tout t

$$\int_\Omega u^n.w^{\mathcal{B}}(t) + \nu \int_0^t \int_\Omega \partial_z w^{\mathcal{B}} \partial_z u^n + \eta \int_0^t \int_\Omega \partial_x w^{\mathcal{B}} \partial_x u^n + \partial_y w^{\mathcal{B}} \partial_y u^n =$$

$$\int_\Omega u^n.w^{\mathcal{B}}(0) + \int_0^t \int_\Omega u^n.\nabla w^{\mathcal{B}} u^n + u^n.[\partial_t \mathcal{B} - w.\nabla w - \nu \partial_z^2 w^{\mathcal{B}} - \eta \Delta_{x,y} w^{\mathcal{B}}] \quad (9)$$

En rajoutant (6),(8) et retranchant (9), on obtient

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\partial_z v\|_{L^2}^2 ds + \eta \int_0^t \|\partial_x v\|_{L^2}^2 + \|\partial_y u^n\|_{L^2}^2 \le \frac{1}{2}\|v_o\|_{L^2}^2 +$$

$$\int_0^t \int_\Omega v.[\partial_t \mathcal{B} - \nu \partial_z^2 w^{\mathcal{B}} - \eta \Delta_{x,y} w^{\mathcal{B}}] + w.\nabla \mathcal{B} w^{\mathcal{B}} - u^n.\nabla w^{\mathcal{B}} u^n + w.\nabla w u^n \quad (10)$$

Finalement, en utilisant que $\int (u.\nabla q)q = 0$, on obtient

$$\int_\Omega w.\nabla \mathcal{B} w^{\mathcal{B}} - u^n.\nabla w^{\mathcal{B}} u^n + w.\nabla w u^n = \int_\Omega -w^{\mathcal{B}}.\nabla \mathcal{B} v - \mathcal{B}.\nabla w v - v.\nabla w^{\mathcal{B}} v$$

Maintenant, on veut utiliser un lemme de Granwall pour déduire que $\|v(t)\|_{L^2}^2$ reste petit. Par l'étude de deux termes du second membre de (10), nous voulons montrer pourquoi nous avons besoin de l'hypothèse $\nu/\eta \to 0$. En effet

$$\begin{aligned}
\left|\int v_3 \partial_z \mathcal{B} v\right| &\le \int \frac{v_3}{z} \quad z^2 \partial_z \mathcal{B} \quad \frac{v}{z} \\
&\le C\|\partial_z v_3\|_{L^2} \sqrt{\nu\zeta} \|w\|_{L^\infty} \|\partial_z v\|_{L^2} \\
&\le C\zeta \|\partial_z v_3\|_{L^2}^2 \|w\|_{L^\infty}^2 + \frac{\nu}{4}\|\partial_z v\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

où, nous avons utilisé la condition de divergence nulle $\partial_z v_3 = -\partial_x v_1 - \partial_y v_2$. On voit alors qu'on a besoin de la condition $C\zeta\|w\|_{L^\infty}^2 \le \eta$ pour absorber le second terme par le terme de viscosité dans (10). D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\left|\nu \int \partial_z^2 \mathcal{B} v\right| &\le \nu \|\partial_z v\|_{L^2} \|\partial_z \mathcal{B}\|_{L^2} \\
&\le \frac{\nu}{4}\|\partial_z v\|_{L^2}^2 + \nu \|\partial_z \mathcal{B}\|_{L^2}^2 \\
&\le \frac{\nu}{4}\|\partial_z v\|_{L^2}^2 + \nu \|w\|_{L^\infty}^2 \frac{1}{\sqrt{\nu\zeta}}
\end{aligned}$$

Le second terme du membre de droite doit tendre vers zéro, ceci est le cas si nous supposons que $\nu/\zeta \to 0$. Finalement, on voit que

$$\text{Si } \frac{\nu}{\eta} \to 0 \text{ alors } \zeta = \frac{\eta}{C\|w\|_{L^\infty}^2}$$

est un choix possible.

On ne sait toujours pas si des instabilités peuvent vraiment apparaître dans le cas où la viscosité est isotrope ($A_V = A_H$) et quel système on peut récupérer à la limite. Ceci reste l'un des importants problèmes mathématiques ouverts de la mécanique des fluides.

3 Fluides tournants et couches d'Ekman

On modélise l'atmosphère et l'océan par des fluides tournants à grande vitesse [21]. Ceci entraîne l'apparition d'un terme de force supplémentaire dans l'équation de Navier-Stokes (la force de Coriolis $\varepsilon^{-1}(e_3 \times u)$). Plusieurs types de développements asymptotiques sont faits par les physiciens dans ce cadre là, on peut par exemple consulter les livres de Pedlovsky [29], ou de Greenspan [15] ; et plusieurs problèmes mathématiques se posent pour justifier ces développements. On peut citer les travaux de T. Beale et A. Bourgeois [5], J.-Y. Chemin [8], E. Grenier [16], P. Embid et A. Majda [12]... Dans ces travaux on se place dans le tore et on applique une méthode de groupe pour filtrer les oscillations temporelles en suivant une idée introduite par S. Schochet [31]. Cette méthode ne s'applique pas aux cas où le domaine a un bord (sauf dans des cas particuliers où il n'y a pas de couche limite, ou si celle-ci peut-être éliminée par symétrie [5]). Dans le cadre de domaines avec bords (et plus particulièrement dans $\Omega = \mathbb{T}^2\times]0,1[$), on est amené à remplacer le Laplacien dans l'équation de Navier-Stokes par un terme de viscosité anisotrope ($\nu\partial^2_{zz}+\eta\Delta_{x,y}$), qui est justifié par des modèles de turbulence et est souvent utilisé par les météorologistes (c'est la même hypothèse que nous avons utilisée dans le cadre de la limite de Navier-Stokes vers Euler). On peut citer T. Colin et P. Fabrie [9] pour le cas d'un fluide entraîné par le vent dans un domaine $\Omega = \mathbb{T}^2\times]0,1[$. Le résultat démontré dans [9] concerne des données initiales bien préparées (indépendantes de z) c'est-à-dire qui n'entraînent pas d'oscillations temporelles.

Dans [17] avec E. Grenier et dans [27], nous étudions le cas des conditions de Dirichlet, toujours avec des données bien préparées, ceci revient à prendre des données initiales 2-D. Du à la présence du bord, on est amené à construire une couche limite (appelée couche d'Ekman) qui permet de retrouver la condition de Dirichlet. Cette couche limite crée un second flot d'ordre $\sqrt{\varepsilon\nu}$ (pompage d'Ekman) qui est responsable du terme de freinage supplémentaire dans l'équation limite. Dans [28], nous combinons les deux difficultés : les oscillations temporelles et le bord ($\Omega = \mathbb{T}^2 \times]0,1[$). Nous sommes alors amené à construire une superposition d'une infinité de couches d'Ekman, en plus d'une autre couche limite (visqueuse, du même type que celle que nous avons déjà construite dans le paragraphe précédent). Nous utilisons aussi la méthode du groupe (avec un groupe différent du groupe du cas périodique) pour filtrer les oscillations en temps. La combinaison des couches d'Ekman avec les oscillations crée un terme de frottement supplémentaire dans l'équation limite. Ce terme (qui s'exprime bien en Fourier) montre que le frottement est d'autant plus faible que la fréquence d'oscillation est proche de la fréquence de rotation ($1/\varepsilon$). Nous observons aussi que la limite faible (le flot quasigéostrophique = la partie 2-D) n'est pas affectée par les oscillations et que donc le système limite peut se découpler. Ceci à été observé dans le cas du tore par A. Babin, A. Mahalov, B. Nicolaenko [2]. Nous traitons aussi, toujours dans le cadre des données initiales générales, un cas un peu plus réaliste (qui peut modéliser l'océan) et qui consiste en un fond non horizontal avec du vent en surface ; il y a alors des couches limites supplémentaires qui créent des termes supplémentaires dans l'équation limite.

Le système d'équations considéré est

$$\partial_t u^{\mathbf{n}} + \nabla(u^{\mathbf{n}} \otimes u^{\mathbf{n}}) - \nu \partial_z^2 u^{\mathbf{n}} - \eta \Delta_{x,y} u^{\mathbf{n}} + \frac{e_3 \ \times \ u^{\mathbf{n}}}{\varepsilon} = -\frac{\nabla p}{\varepsilon} \text{ dans } \quad \Omega \tag{11}$$

$$\nabla . u^{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{12}$$

$$u^{\mathbf{n}}(0) = u_0^{\mathbf{n}} \quad \text{avec} \quad \nabla . u_0^{\mathbf{n}} = 0 \tag{13}$$

$$u^{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{14}$$

où $\Omega = \mathbb{T}^2 \times]0, h[$, ν et η sont respectivement les viscosités verticale et horizontale et ε est le nombre de Rossby. Ce système décrit le mouvement d'un fluide tournant (voir Pedlovsky [29], et Greenspan [15]). Il peut modéliser l'océan, l'atmosphère, ou un fluide tournant dans un récipient.

Pour étudier le système, nous sommes amenés à introduire de nouveaux espaces qui sont plus adaptés à l'opérateur L définit par $Lu = -P(e_3 \times u)$, où P est la projection sur les vecteurs de divergence nulle et qui ont une vitesse normale nulle. Nous utilisons l'espace V_{sym}^s qui est un sous espace de

H^s (prenant en compte certaines conditions aux bords) et tel que L induise une isometrie sur V^s_{sym}. Nous définissons aussi le groupe $\mathcal{L}(\tau) = e^{\tau L}$. Soit w la solution du système suivant

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t w + \overline{Q}(w,w) - \Delta_{x,y} w + \gamma \overline{S}(w) = -\nabla p \text{ dans } \quad \Omega, \\ \nabla . w = 0 \text{ dans } \quad \Omega, \\ w.n = \pm w_3 = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \\ w(t=0) = w^0. \end{array} \right. \tag{15}$$

où $\overline{Q}(w,w)$, $\overline{S}(w)$ sont respectivement des opérateurs bilinéaire et linéaire de w, donnés par

$$\overline{Q}(w,w) = \sum_{\substack{l,m,k \\ k \in \mathcal{A}(l,m) \\ \lambda(l)+\lambda(m)=\lambda(k)}} b(t,l) b(t,m) \alpha_{lmk} N^k(X) \tag{16}$$

où $w = \sum_k b(t,k) N^k(X)$, les N^k sont les vecteurs propres de L et $i\lambda(k)$ les valeurs propres associées, α_{lmk} sont des constantes (provenant de certaines projections) et $\mathcal{A}(l,m) = \{l+m,\ Sl+m,\ l+Sm,\ Sl+Sm\}$, $(Sl = (l_1, l_2, -l_3))$ est l'ensemble des résonances possibles. l'opérateur bilinéaire $\overline{Q}$ est du au fait que uniquement les termes résonnants dans le produit $w.\nabla w$ sont présents dans l'équation limite.

$$\overline{S}(w) = \sum_k \frac{1}{h} (D(k) + iI(k)) b(t,k) N^k(X)$$

où

$$D(k) = \sqrt{2} \left\{ (1 - \lambda(k)^2)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad I(k) = \sqrt{2} \left\{ \lambda(k)(1 - \lambda(k)^2)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Il est à noter que $\overline{S}(w)$ est un terme de freinage qui dépend de la fréquence d'oscillation $\lambda(k)$, puisque $D(k) \geq 0$. Il est du à la couche limite qui crée un second flot d'ordre $\sqrt{\varepsilon\nu}$ responsable de ce terme de freinage (appelé pompage d'Ekman).

Théorème 3.1 *Soit $s > 5/2$, et $w^0 \in V^s_{sym}(\Omega)^3$, $\quad \nabla . w^0 = 0$. On suppose que u^n_0 converge dans $L^2(\Omega)$ vers w^0, $\eta = 1$ et ε, ν tendent vers 0 tel que $\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \to \gamma$. Alors toute suite de solutions faibles (à la Leray) u^n de (11- 14) satisfaisant l'inégalité d'énergie satisfait*

$$u^n - \mathcal{L}(\frac{t}{\varepsilon}) w \to 0 \quad dans \quad L^\infty(0, T^*, L^2(\Omega)),$$

$$\nabla_{x,y}(u^n - \mathcal{L}(\frac{t}{\varepsilon})w), \sqrt{\nu}\partial_z u^n \to 0 \ \ dans \ L^2(0,T^*,L^2(\Omega))$$

où w est la solution de (15) dans $L^\infty(0,T^*,V^s_{sym})$

Ce théorème donne une description précise de toutes les oscillations. Nous montrons aussi que les termes oscillants n'affectent pas le flot moyen (le flot quasigeostrophique). En effet la limite faible $\overline{w}$ de u^n satisfait un système fermé qui est le système de Navier-Stokes $2-D$ avec un terme de freinage

Théorème 3.2 *$\overline{w}$ satisfait le système suivant*

$$\begin{cases} \partial_t\overline{w} + \overline{w}.\nabla\overline{w} - \Delta_{x,y}\overline{w} + \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}\frac{\sqrt{2}}{h}\overline{w} = -\nabla p \ \ dans \quad \mathbb{T}^2, \\ \nabla.\overline{w} = 0 \ \ dans \quad \mathbb{T}^2, \\ \overline{w}(t=0) = \mathcal{S}(w^0) = \overline{w}^0, \end{cases} \tag{17}$$

où $\mathcal{S}$ est la projection sur les modes lents, c'est à dire ceux qui dépendent pas de z, $\overline{w}(t,x,y) = \mathcal{S}(w) = (1/h)\int_0^h w(t,x,y,z)dz$.

Ce résultat se démontre par une étude fine (comme celle de Babin, Mahalov, et Nicolaenko [2]) de l'opérateur Q. Plus précisément on montre que si $k \in \mathcal{A}(l,m)$ avec $k_3 = 0$ et $l_3 m_3 \neq 0$ alors $\alpha_{lmk} + \alpha_{mlk} = 0$.

Plusieurs variantes du théorème 3.1 sont données dans [28] : Nous traitons le cas d'une viscosité horizontale qui tend vers zéro (avec certaines conditions qui permettent la stabilité des couches d'Ekman ainsi que la couche visqueuse). En effet nous montrons sous les mêmes hypothèses du théorème 3.1 le résultat suivant

Théorème 3.3 *Si en plus on suppose que η tend vers zéro telle que*

$$\varepsilon < \ C(w)\ \eta \quad et \quad \frac{\nu}{\eta} \to 0$$

alors on a le même résultat de convergence avec w la solution du système (15) sans le terme de viscosité $\Delta_{x,y}$.

l' hypothèse $\frac{\nu}{\eta} \to 0$ est nécessaire pour pouvoir contrôler une couche visqueuse (qui vient se superposer aux couches d'Ekman qui nécessitent la condition $\varepsilon < \ C(w)\ \eta$ comme dans [27]). Cette couche visqueuse est due à la présence de certains modes ($k = (0,0,k_3)$) qui ne subissent pas l'effet de la rotation (pour ces modes $D(k) = I(k) = 0$). Cependant sous certaines hypothèses sur le domaine Ω (hypothèse génériques [2]), nous montrons que si initialement les modes $(0, 0, k_3)$ sont absents (ce que nous appelons données "semis bien préparées") alors ces modes ne seront pas crées par l'opérateur bilinéaire Q et par suite on a le théorème suivant

Théorème 3.4 *Pour des domaines non résonnant on a le même résultat du théorème 3.3 uniquement sous la condition* $\varepsilon < C(w)\ \eta$ *si la donnée initiale satisfait*

$$\int w^0 dx\ dy = 0 \quad \textit{pour tout} \quad z$$

auquel cas cette condition reste vraie pour tout t.

Finalement, nous traitons le cas d'autres conditions au bord en construisant des couches d'Ekman près d'un fond non plat

$$\Omega_\delta = \{(x, y, z), \quad \text{tel que } (x, y) \in \mathbb{T}^2, \quad \text{et} \quad \delta f(x, y) < z < h\},$$

avec des conditions de Dirichlet

$$u(x, y, \delta f(x, y)) = 0.$$

ainsi que dans le cas d'une surface libre

$$u_3^n(z = h) = 0 \quad \partial_z \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{pmatrix}_{|z=h} = \frac{1}{\beta}\sigma(\frac{t}{\varepsilon}, t, x, y) \tag{18}$$

où σ décrit le vent ([29], [9]). Les paramètres δ et β sont censés être petits. On a alors le théorème suivant

Théorème 3.5 *Soit* $s > 5/2$, *et* $w^0 \in V^s_{sym}(\Omega)^3$, $\nabla.w^0 = 0$. *On suppose que* u_0^n *converge dans* $L^2(\Omega)$ *vers* w^0, $\eta = 1$ *et* $\varepsilon, \nu, \delta, \beta$ *tendent vers* 0. *Alors toute suite de solutions faibles (à la Leray)* u^n *de (11- 14) satisfaisant l'inégalité d'énergie satisfait*

$$u^n - \mathcal{L}(\frac{t}{\varepsilon})w \to 0 \quad \textit{dans} \quad L^\infty(0, T^*, L^2(\Omega)),$$

$$\nabla_{x,y}(u^n - \mathcal{L}(\frac{t}{\varepsilon})w), \sqrt{\nu}\partial_z u^n \to 0 \textit{ dans } L^2(0, T^*, L^2(\Omega))$$

où w est la solution du système suivant ($\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}, \frac{\nu}{\beta}, \frac{\delta}{\varepsilon}$ sont en fait la limite de ces rapports lorsque n tend vers l'infini)

$$\begin{cases} \partial_t w + \overline{Q}(w,w) - \Delta_{x,y} w + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}\overline{S}(w) + \frac{\nu}{\beta}\overline{S}_1(\sigma) + \frac{\delta}{\varepsilon}\overline{S}_2(f,w) = -\nabla p \\ \nabla.w = 0 \ in \quad \Omega, \\ w.n = \pm w_3 = 0 \quad on \quad \partial\Omega, \\ w(t=0) = w^0. \end{cases} \tag{19}$$

où $\overline{S}_1(\sigma)$ et $\overline{S}_2(f,w)$ sont des termes de source qui sont respectivement dus au vent et au fond non plat.

La présence des termes supplémentaires dans l'équation limite est due au fait qu'on doit superposer d'autres parties aux couches limites construites dans les cas précédents.

References

[1] L.Amerio, G.Prouse : Almost-periodic functions ans functional equations. *The University Series in Higher Mathematics, Van Nostrand Reinhold Company* 1971

[2] A. Babin, A. Mahalov, B. Nicolaenko : Global splitting, integrability and regularity of 3D Euler and Navier-Stokes equations for uniformly rotating fluids.*European J. Mech. B Fluids* 15 (1996), no. 3, 291–300.

[3] A. Babin, A. Mahalov, B. Nicolaenko : Regularity and integrability of 3D Euler and Navier-Stokes equations for rotating fluids. *Asymptot. Anal.* 15 (1997), no. 2, 103–150.

[4] C. Bardos : Existence et unicité de l'équation l'Euler en dimension deux. *Journal de Math. Pures et Appliquées* 40(1972), 769-790.

[5] T. Beale, A. Bourgeois : Validity of the quasigeostrophic model for large scale flow in the atmosphere and ocean, *SIAM J. Math. Anal.*, 25 (1994), $1023 - 1068$.

[6] H.Bohr : Almost Periodic Functions. *Chelsea Publishing Company* 1947

[7] R.E.Caflisch, M.Sammartino : Zero viscosity limit for analytic solutions of the Navier-Stokes equations on a half-space *preprint* 1996.

[8] J.-Y. Chemin : A propos d'un problème de pénalisation de type anti-symétrique, *J. Math. Pures Appl.* (9) 76 (1997), no. 9, 739–755.

[9] T. Colin, P. Fabrie : Rotating fluid at high Rossby number driven by a surface stress : existence and convergence, *preprint*, 1996.

[10] Colin, P. Fabrie : Équations de Navier-Stokes 3-D avec force de Coriolis et viscosité verticale évanescente. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 324 (1997), no. 3, 275–280.

[11] B. Desjardins, E. Grenier, Derivation of the quasigeostrophic potential vorticity equations. *to appear in Advances in Diff. Equations.*

[12] P. Embid, A. Majda : Averaging over fast gravity waves for geophysical flows with arbitrary potential vorticity, *Comm. Partial Differential Equations*, 21, (1996), 619 – 658.

[13] V.W. Ekman : On the influence of the earth's rotation on ocean currents. *Arkiv. Matem., Astr. Fysik,* Stockholm 2 (11) 1905.

[14] I. Gallagher, Un résultat de stabilité pour les solutions faibles des équations des fluides tournants, *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, (**324**), Série 1, 1996, pages 183–186.

[15] H.P.Greenspan : The theory of rotating fluids, *Cambridge monographs on mechanics and applied mathematics* ,1969

[16] E. Grenier, Oscillatory perturbations of the Navier Stokes equations. *Journal de Maths Pures et Appl.* 9 76 (1997), no. 6, p. 477 – 498.

[17] E. Grenier, N.Masmoudi : Ekman layers of rotating fluids, the case of well prepared initial data, *Comm. Partial Differential Equations* , 22(5-6),(1997) 953-975

[18] T.Kato : Remarks on zero viscosity limit for nonstationary Navier-Stokes flows with boundary.

[19] T.Kato : Non-stationary flows of viscous and ideal fluids in R^3, *J.Functional Analysis* 9 (1972), 296-305.

[20] J. Leray, Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Matematica*, **63**, 1933, pages 193–248.

[21] J.-L. Lions, R. Temam, S. Wang : Modèles et analyse mathématiques du système Océan/Atmosphère

C.R.Acad.Sci.Paris Sér. I Math 316 1993 113 – 119,

C.R.Acad.Sci.Paris Sér. I Math 316 1993 211 – 215

C.R.Acad.Sci.Paris Sér. I Math 318 1994 1165 – 1171.

[22] J.-L. Lions, R. Temam et S. Wang, New formulations of the primitive equations of the atmosphere and applications, *Nonlinearity*, **5**, 1992, pages 237–288.

[23] J.-L. Lions, R. Temam et S. Wang, Geostrophic asympotics of the primitive equations of the atmosphere, *Topological Methods in Non Linear Analysis*, **4**, 1994, pages 1–35.

[24] P.L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Dynamics, Vol. 1 Incompressible Models, *Oxford University Press* 1996.

[25] P.L. Lions, N. Masmoudi, Incompressible limit for a viscous compressible fluid. *J. Math. Pures Appl.* 77 (1998), p. 585-627.

[26] A. Majda, T. Esteban :A two-dimensional model for quasigeostrophic flow: comparison with the two-dimensional Euler flow. Nonlinear phenomena in ocean dynamics (Los Alamos, NM, 1995). *Phys. D* 98 (1996), no. 2-4, 515–522.

[27] N. Masmoudi, The Euler limit of the Navier Stokes equations, and rotating fluids with boundary, *Arch. Rational Mech. Anal* **142** (1998) p. 375 – 394.

[28] N. Masmoudi, Ekman layers of rotating fluids, the case of general initial data, *to appear in Communications in Pure and Applied Mathematics* .

[29] J. Pedlovsky : Geophysical fluid dynamics, *Springer*, 1979.

[30] J. Rauch : Boundary value problems as limits of problems in all space, Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique, exposé n.3,1978.

[31] S. Schochet : Fast singular limits of hyperbolic PDEs. *J. Diff. Equ.* 114 (1994) 476 – 512.

[32] H.Swann, The convergence with vanishing viscosity of non-stationary Navier-Stokes flow to ideal flow in R^3 *Trans. Amer. Math. Soc* 157 (1971), 373-397.