Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1998-1999

Vesselin Petkov et Maciej Zworski

Variation de la phase de diffusion et distribution des résonances

Séminaire É. D. P. (1998-1999), Exposé n° XII, 12 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1998-1999____A12_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram
Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Variation de la phase de diffusion et distribution des résonances

Vesselin Petkov et Maciej Zworski

1 Introduction

Dans cet exposé on se propose d'examiner la variation de la phase de diffusion associée à l'opérateur de diffusion

$$S(\lambda) : L^2(S^{n-1}) \longrightarrow L^2(S^{n-1}),\ \ \lambda \in \mathbb{R},$$

dans le cas d'une perturbation compacte du Laplacien $-\Delta$. Sous des hypothèses assez générales que nous allons préciser dans la section suivante on a

$$S(\lambda) = I + A(\lambda),\ \ \lambda \in \mathbb{R},$$

où $A(\lambda)$ est un opérateur à trace et cela permet d'introduire la *phase de diffusion*

$$s(\lambda) = i \log \det S(\lambda),\ \ s(0) = 0.$$

Le comportement asymptotique de $s(\lambda)$ est similaire au comportement asymptotique de la fonction de comptage des valeurs propres $N(\lambda)$ d'un opérateur elliptique Q ayant un spectre discret et on a l'estimation

$$|s(\lambda) - c_0\lambda^n| \leq C_0\lambda^{n-1},\ \ |\lambda| \to \infty \tag{1}$$

avec $c_0 > 0,\ C_0 > 0$ (cf. [10], [16], [2]).

Dans les expériences physiques on s'intéresse à la variation

$$s(\tau + \delta) - s(\tau - \delta),\ \ \delta > 0$$

et on observe que cette variation change extrêmement vite quand τ est suffisament près de la partie réelle $\Re\lambda_j$ d'une résonance λ_j de $S(\lambda)$. De plus, il y a des exemples (cf. [3], [11]) où pour une suite convenable de résonances λ_j, $|\lambda_j| \to \infty$, nous avons

$$|s'(\Re\lambda_j)| \geq Ce^{\alpha|\Re\lambda_j|},\ \ \alpha > 0.$$

Dans la littérature physique on suppose que si on a une particule instable suivant une loi $\exp(-\Gamma t)$ avec $\Gamma > 0$ assez petit et si $E_0 - i\Gamma$ est une résonance, alors la densité de l'énergie est donnée approximativement par la distribution de Breit-Wigner

$$(2\pi)^{-1}\frac{\Gamma}{\Gamma^2/4 + (E - E_0)^2},\ \ E \in \mathbb{R}.$$

Evidemment, l'existence de plusieurs résonances ayant une grande concentration rend beaucoup plus compliquée l'application des arguments physiques. En analogie avec la distribution de Breit-Wigner introduisons le noyau de Poisson

$$P(z,\lambda) = \frac{1}{\pi}\frac{\Im z}{|\lambda - z|^2},\ \Im z > 0$$

et la *mesure harmonique*

$$\omega_{\mathbf{C}_+}(z,\gamma) = \int_\gamma P(z,\lambda)d\lambda,\ \gamma \subset \mathbb{R} = \partial\mathbf{C}_+,$$

associée au demi-plan $\mathbf{C}_+ = \{z \in \mathbf{C} : \Im z > 0\}$. Dans le cas d'un opérateur Q ayant un spectre discret la fonction de comptage $N(\lambda)$ détermine une mesure $dN(\lambda)$ et

$$N(\tau+\delta) - N(\tau-\delta) = \sum_{|\mu_j - \tau| \le \delta} \delta_{\mu_j}\Big([\tau-\delta, \tau+\delta]\Big),$$

μ_j étant les valeurs propres de Q. En remplacant les mesures de Dirac δ_{μ_j} par des mesures harmoniques $\omega_{\mathbf{C}_+}(\lambda_j, .)$, où $\lambda_j \in \mathbf{C}_+$ sont les résonances de $S(\lambda)$, on pourrait supposer qu'un résultat pareil soit valable. Dans cette direction notre théorème principal justifie l'approximation de Breit-Wigner.

Théorème 1. *Soit $0 < \epsilon < 1$ fixé et soit L un opérateur satisfaisant les hypothèses* (6)-(8) *ci-dessous. Alors pour $0 < \delta \le \epsilon/2$ on a*

$$s(\tau+\delta) - s(\tau-\delta) = 2\pi \sum_{|\lambda_j - \tau| \le \epsilon} \omega_{\mathbf{C}_+}(\lambda_j, [\tau-\delta, \tau+\delta]) + \mathcal{O}_\epsilon(\delta\tau^{n-1}),\ \ \forall\tau \ge 1, \tag{2}$$

où les résonances λ_j sont incluses avec leurs multiplicités.

Il est intéressant d'examiner l'existence de résonances dans des petites "boîtes"

$$\{z \in \mathbf{C} : |\Re z - \tau| \le B\delta,\ \Im z \le \delta\epsilon\},\ B > 0. \tag{3}$$

Dans cette direction nous avons été motivés par le cas examiné dans [3] (cf. aussi [16] pour les perturbations de longue portée). Soit $s_h(\lambda)$ la phase de diffusion relative associée aux opérateurs $L_j(h) = -h^2\Delta + V_j(x),\ j = 1,2,\ h > 0$, où $V_1(x)$ est un potentiel non-captif pour le niveau d'énergie $0 < \lambda_0 = |\xi|^2 + V_1(x)$, tandis que $V_2(x)$ étant un "puits dans un îlot" est un potentiel captif pour le niveau $\lambda_0 = |\xi|^2 + V_2(x)$. Désignons par $\Gamma(h)$ l'ensemble des pôles d'opérateur de diffusion associé à $L_j(h),\ j = 1,2$, et supposons que $\lambda(h) \in \Gamma(h)$ est un pôle simple. Après soit $\delta(h) > 0$ tel que

$$\lim_{h\searrow 0} h^{-n}\delta(h) = 0,\ \lim_{h\searrow 0}\frac{\Im\lambda(h)}{\delta(h)} = 0 \tag{4}$$

et soit $\Omega(h)$ un voisinage complexe de λ_0 tel que

$$\bigcap_{h>0}\Omega(h) = \{\lambda_0\},\ \Re\lambda(h) \pm \delta(h) \in \Omega(h) \cap \mathbb{R},\ 0 < h \le h_0,$$

$$\mathrm{dist}\Big(\Gamma(h),\ \partial\Omega(h)\Big) \ge c_\epsilon e^{-\epsilon/h},\ \forall\epsilon > 0.$$

De plus, supposons que $\lambda(h)$ est le seul pôle dans $\Omega(h)$. Sous ces hypothèses Gérard, Martinez et Robert [3] (cf. aussi [16]) prouvent que

$$\lim_{h\searrow 0}\Big[s(\Re\lambda(h) \pm \delta(h)) - s(\Re\lambda(h))\Big] = \pm\pi. \tag{5}$$

2 Hypothèses et résultats

On va rappeler les hypothéses de "black box" scattering (cf. [21], [23]). Soit $\mathcal{H}$ un espace Hilbertien complexe ayant la décomposition orthogonale

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{R_0} \oplus L^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0, R_0)), \ \ n \geq 2.$$

Soit L un opérateur auto-adjoint avec domaine $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ tel que

$$\mathbf{1}|_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R_0)} \mathcal{D} = H^2(\mathbb{R}^n \setminus B(0, R_0)), \tag{6}$$

$$\mathbf{1}|_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R_0)} L = -\Delta|_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R_0)}, \tag{7}$$

$$\sigma_{\mathrm{pp}}(L) \cap [0, \infty) = \emptyset\,, \quad L \geq -C\,, \quad C > 0\,.$$

On suppose aussi que L est *elliptique* dans le sens suivant: soit $L^\sharp$ l'opérateur de référence de L obtenu en considérant L sur $\mathcal{H}^\sharp = \mathcal{H}_{R_0} \oplus L^2((\mathbb{R}^n/R\mathbf{Z}^n) \setminus B(0, R_0))$, $R \gg R_0$ dans le sens naturel. Alors on suppose que

$$\sharp\{\lambda \ : \ \lambda^2 \in \sigma(L^\sharp)\,, \ |\lambda| \leq r\} = C(L) r^n + \mathcal{O}(r^{n-1}), \ \ r \longrightarrow \infty. \tag{8}$$

Autrement dit l'opérateur de référence $L^\sharp$ admet une asymptotique de Weyl avec un reste comme dans le cas classique des opérateurs elliptiques. De plus, (8) implique les propriétés nécessaires pour que la formule de Poisson soit valable (cf. [23], [20]).

Un exemple typique où les hypothèses (6)-(8) sont satisfaites est une *perturbation métrique* de $-\Delta$ dans un domaine extérieure $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$ avec L de la forme

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_j} \left(a_{i,j}(x) \partial_{x_i} \right), \ \text{sur } \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O},$$

où $\partial \mathcal{O}$ est régulier, $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}$ est connexe et on considère des conditions de Dirichlet ou Neumann sur le bord. Les coefficients $a_{i,j}(x)$ sont à valeurs réelles et les conditions suivantes sont satisfaites:

$$a_{i,j}(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \ \ a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x), \ \ 1 \leq i, j \leq n,$$

$$\sum_{i,j}^{n} a_{i,j}(x) \xi_i \, \xi_j \geq \delta_0 |\xi|^2, \ \ \delta_0 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$\text{il existe } R_0 > 0 \text{ tel que } a_{i,j}(x) = \delta_{i,j} \text{ pour } |x| \geq R_0.$$

Dans ce cas L est un opérateur elliptique positif dans $L^2(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O})$, de domaine $H^2(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}) \cap H^1_0(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O})$.

On a montré dans [21] que la résolvante

$$R(\lambda) = (L - \lambda^2)^{-1} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{D}\,, \ \Im\lambda < 0\,, \ \lambda^2 \notin \sigma_{\mathrm{pp}}(L)$$

admet un prolongement méromorphe dans $\mathbf{C}$ comme un opérateur $R(\lambda) : \mathcal{H}_{\mathrm{comp}} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathrm{loc}}$ si n est impair et sur le plan logarithmique, Λ, si n est pair et les pôles, λ_j, $\Im\lambda_j > 0$, sont de multiplicité finie. L'opérateur de diffusion $S(\lambda) : L^2(S^{n-1}) \longrightarrow L^2(S^{n-1})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, admet un prolongement méromorphe dans $\mathbf{C}$ pour n impair et dans Λ pour n pair. Les pôles de $S(\lambda)$

coïncident avec les pôles de $R(\lambda)$ et ils sont de multiplicité $m_S(\lambda) = m_R(\lambda) - m_R(-\lambda)$, $m_R(\lambda)$ étant les multiplicités des pôles de la résolvante (cf. [32] et les références citées). Dans la suite les pôles λ_j seront appelés *résonances.*

Sous les hypothèses ci-dessus la fonction de comptage des résonances admet des estimations polynôminales pour n impair obtenues suivant la généralité dans [9], [31],[21], [26]

$$\sharp\{\lambda_j : |\lambda_j| \leq r\} \leq A_0 r^n, \ \ r \geq A_1 \, . \tag{9}$$

Pour n pair on a une estimation similaire

$$\sharp\{\lambda_j : |\lambda_j| \leq r, \ \ |\arg \lambda_j| \leq \rho\} \leq \ A_\rho r^n, \ \ r \geq A_1 \, , \tag{10}$$

(cf. [21] pour une preuve concernant $\rho < \pi/2$ et [28], [29] pour le cas général et la dépendance de A_ρ de ρ). Finalement notons que l'asymptotique (1) est valable pour des opérateurs satisfaisant (8) (cf. [2]).

Dans la suite de l'exposé on suppose que L satisfait les hypothèses (6)-(8). Les résultats ci-dessous concernent les bornes inférieures et supérieures de la variation de la phase de diffusion.

Proposition 1. *Soient $C_1 > 1$, $C = 2(1 - C_1^{-1})^{-1}$ deux constantes fixées. Alors pour tout $0 < \epsilon \leq 1, \ \ \delta > 0$ et $\tau \geq 1$ on a*

$$s(\tau + \delta) - s(\tau) \geq (\pi - C\epsilon) \, \sharp \, \{\lambda_j : \tau \leq \Re \lambda_j \leq \tau + \frac{\delta}{C_1}, \, \Im \lambda_j \leq \epsilon\delta\} + \mathcal{O}(\delta \tau^{n-1}) \, , \tag{11}$$

$$s(\tau) - s(\tau - \delta) \geq (\pi - C\epsilon) \, \sharp \, \{\lambda_j : \tau - \frac{\delta}{C_1} \leq \Re \lambda_j \leq \tau, \ \ \Im \lambda_j \leq \epsilon\delta\} + \mathcal{O}(\delta \tau^{n-1}) \, , \tag{12}$$

où $\mathcal{O}(\delta \tau^{n-1})$ est indépendant de ϵ.

Remarque. La constante $\pi - C\epsilon$ dans la partie droite de (11) correspond à π dans le résultat semi-classique (5). En effet, supposons qu'il existe des résonances λ_m telles que

$$\Im \lambda_m \leq C(\Re \lambda_m)^{-n}, \ \ 0 < \Re \lambda_m \longrightarrow +\infty \, , \ m \longrightarrow \infty \, , \ C > 1.$$

Soit

$$0 < \nu < 1, \ \delta_m = C(\Re \lambda_m)^{-n+\nu}, \ \ \epsilon_m = (\Re \lambda_m)^{-\nu}, \ \tau_m = \Re \lambda_m.$$

On déduit de la Proposition 1 que

$$\lim_{m \to \infty} \Big(s(\tau_m + \delta_m) - s(\tau_m) \Big) \geq \pi. \tag{13}$$

On peut choisir $\delta_m \, , \ \ \epsilon_m$ convenablement pour que λ_m soit la seule résonance dans

$$\{z \in \mathbf{C} : |\Re z - \tau_m| \leq \frac{\delta_m}{C}, \, \Im z \leq \delta_m \epsilon_m\} \, .$$

De plus, si cette résonance est simple, on peut montrer qu'on a une égalité dans (13).

La Proposition 1 permet d'obtenir une estimation pour le nombre de résonances

$$\sharp \, \{\lambda_j : \tau \leq \Re \lambda_j \leq \tau + 1 \, , \ \ \Im \lambda_j \leq 2\epsilon\} \, .$$

En effet, choisissant $C_1 = 2$, $C = 4$, $\delta = 2$ et $0 < \epsilon \leq (2\pi - 1)/8$, on conclut que

$$\sharp \left\{\lambda_j : \tau \leq \Re\lambda_j \leq \tau + 1,\ \Im\lambda_j \leq 2\epsilon\right\} \leq 2\Big[s(\tau+1) - s(\tau)\Big] + A_1\tau^{n-1}.$$

La différence $s(\tau+1) - s(\tau)$ peut être estimée par (1) et on obtient

$$s(\tau+1) - s(\tau) \leq c_0((\tau+1)^n - \tau^n) + 2C_0\tau^{n-1} \leq A_2\tau^{n-1},\ \tau \geq 1,$$

où $c_0 > 0$, $C_0 > 0$ et $A_2 > 0$ sont indépendants de τ. De telle façon on a les propositions suivantes:

Proposition 2. *Pour $0 < \epsilon \leq (2\pi - 1)/8$ il existe une constante $A > 0$ indépendante de τ telle que*

$$\sharp \left\{\lambda_j : \tau \leq \Re\lambda_j \leq \tau + 1,\ \Im\lambda_j \leq 2\epsilon\right\} \leq A\tau^{n-1},\ \tau \geq 1\,. \tag{14}$$

Proposition 3. *Pour tout $\epsilon > 0$, $0 < \gamma_2 < \gamma_1 < 1$ et $0 < \delta \leq \delta(\gamma_1)$, $\tau \geq \tau_0$ on a*

$$|s(\tau - \delta) - s(\tau + \delta)| \leq 2\pi\, \sharp \left\{\lambda_j\ :\ |\Re\lambda_j - \tau| \leq \delta^{1-\gamma_1}\,,\ \Im\lambda_j < \epsilon\delta^{1-\gamma_2}\right\} + C_\epsilon\delta^{\min(\gamma_1-\gamma_2,\gamma_2)}\tau^{n-1}\,.$$

avec une constante $C_\epsilon > 0$ indépendante de γ_1, γ_2.

Dans les applications concernant les perturbations métriques que nous allons exposer dans la section suivante on prend $\gamma_1 = 2/3$, $\gamma_2 = 1/3$ et on obtient un reste $C_\epsilon\delta^{1/3}\tau^{n-1}$.

Comme conséquence immédiate du Théorème 1 on déduit une estimation pour la dérivée de la phase de diffusion qui semble nouvelle même dans le cas de diffusion sur un obstacle.

Proposition 4. *Supposons qu'il existe une fonction continue $F(\lambda) > 0$ telle que $F(\lambda+\delta) < CF(\lambda)$ pour $0 < \delta \leq 1$ et qu'on n'ait pas de résonances dans le domaine*

$$\{\lambda \in \mathbf{C} : \Re\lambda > \tau_0 > 0, \Im\lambda < C_0(F(\Re\lambda))^{-1}\}.$$

Alors

$$\left|\frac{ds}{d\lambda}(\tau)\right| \leq C_1F(|\tau|)|\tau|^{n-1}\,, |\tau| \geq 1\,.$$

Pour la preuve remarquons que la démonstration du Théorème 1 implique la représentation

$$s'(\lambda) = 2\pi \sum_{|\lambda-\lambda_j|<1} P(\lambda_j, \lambda) + \mathcal{O}(\lambda^{n-1}),\ \lambda > \tau_0 > 1.$$

Alors l'inégalité $P(\lambda_j, \lambda) \leq \pi^{-1}(\Im\lambda_j)^{-1}$ combinée avec les hypothèses donne le résultat. Dans le cas d'une perturbation métrique de $-\Delta$ hors d'un obstacle le résultat récent de Burq [1] permet de conclure que $|s'(\lambda)|$ admet une estimation exponentielle.

3 Distribution des résonances près de l'axe réel

Dans cette section nous allons appliquer nos résultats dans le cas d'une perturbation métrique du Laplacien en supposant que L est de la forme

$$L = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_j}\Big(a_{i,j}(x)\partial_{x_i}\Big)$$

décrite dans Section 1. Soit $l(x,\xi)$ le symbole principal de L et soit

$$\Sigma = \{(x,\xi) \in T^*(\mathbb{R}^n) : \, l(x,\xi) = 1\}.$$

Posons $r(x,\xi) = \sqrt{l(x,\xi)}$ et désignons par $\Phi^t = \exp(tH_r)$ le flot Hamiltonien de r sur Σ. On dit qu'un point $\nu \in \Sigma$ est *périodique* avec période $T > 0$ si

$$\exp(TH_r)\nu = \nu. \tag{15}$$

On note par $T(\nu) > 0$ le minimal $T > 0$ pour lequel (15) a lieu. L'ensemble des points périodiques dans Σ sera noté par Π. Pour $\nu \in \Pi$ fixé, soit

$$\gamma(\nu) = \{(x(\sigma),\, \xi(\sigma)) \in T^*(\mathbb{R}^n) : 0 \leq \sigma \leq T(\nu)\}$$

la trajectoire périodique passant par ν au temps $\sigma = 0$. Introduisons l'indice de Maslov $m(\nu) \in \mathbf{Z}_4$ (cf. Sect.21.6 dans [7]) associée à $\gamma(\nu)$ et la variété Lagrangienne

$$C = \{(t,x,y,\tau,\xi,\eta) \in T^*\Big(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}\Big) : \tau + r(x,\xi) = 0,\ (x,\xi) = \exp(tH_r)(y,\eta)\}$$

et posons $q(\nu) = \frac{\pi}{2} m(\nu)$. On dira que $\nu \in \Pi$ est *absolument périodique* avec période $T(\nu) > 0$ si dans des coordonnées locales z au voisinage de ν avec $z(\nu) = 0$ on a

$$\partial_z^\alpha \Big(\Phi^T(z) - z\Big)|_{z=0} = 0, \ \ \forall \alpha.$$

Finalement on désigne par $\Pi_a(T)$ l'ensemble des points absolument périodiques $\nu \in \Pi$ ayant période T et on pose $\Pi_a = \cup_{t>0}\Pi_a(t)$. Notons que $\mu(\Pi) = \mu(\Pi_a)$ (cf. [18]), où ici et dans la suite μ est la mesure de Liouville sur Σ.

Considérons la fonction

$$Q(\lambda) = (2\pi)^{-n} \int_{\Pi_a} [\pi - \lambda T(\nu) - q(\nu)]_{2\pi} T^{-1}(\nu) d\nu$$

introduite dans [5], [17], où on choisit le résidu $-\pi < [z]_{2\pi} \leq \pi$ de telle façon que $z = [z]_{2\pi} + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$. La fonction $Q(\lambda)$ est continue à droite et

$$Q(\lambda + 0) - Q(\lambda - 0) = (2\pi)^{-n+1} \int_{\Omega_\lambda} T^{-1}(\nu) d\nu,$$

où

$$\Omega_\lambda = \{\nu \in \Pi_a : \lambda T(\nu) + q(\nu) \equiv 0 \mod (2\pi)\}.$$

Dans [11] l'un des auteurs a obtenu pour n impair l'estimation

$$\Big[Q(\tau + \frac{\delta}{2}) - Q(\tau - \frac{\delta}{2})\Big] \tau^{n-1} - C_0 \delta \tau^{n-1} - o_\delta(\tau^{n-1}) \leq s(\tau + \delta) - s(\tau - \delta) \tag{16}$$

$$\leq \Big[Q(\tau + \frac{3\delta}{2}) - Q(\tau - \frac{3\delta}{2})\Big] \tau^{n-1} + C_0 \delta \tau^{n-1} + o_\delta(\tau^{n-1})$$

avec $C_0 > 0$ indépendante de τ et δ, tandis que $o_\delta(\tau^{n-1})$ désigne que pour $\delta > 0$ fixé nous avons

$$\frac{o_\delta(\tau^{n-1})}{\tau^{n-1}} \longrightarrow_{\tau \to \infty} 0.$$

On généralise facilement l'argument de [11] dans le cas de dimension paire.

Supposons qu'il existe $T_0 > 0$ tel que $\mu(\Pi_a(T_0)) > 0$. L'indice $m(\nu)$ prend des valeurs dans $\mathbf{Z}_4$ et sans perte de généralité on peut supposer qu'il existe $\Pi_0 \subset \Pi_a(T_0)$ avec $\mu(\Pi_0) \geq \frac{1}{4}\mu(\Pi_a(T_0))$ ayant la propriété $T(\nu) = T_0$, $q(\nu) = q_0$, $\forall \nu \in \Pi_0$. Posons $\tau_m = (2m\pi - q_0)/T_0$, $m \in \mathbb{N}$ et observons que

$$Q(\tau_m + 0) - Q(\tau_m - 0) \geq (2\pi)^{-n+1} T_0^{-1} \mu(\Pi_0) = \eta_0 > 0.$$

En appliquant la Proposition 3 avec $\gamma_1 = 2/3$, $\gamma_2 = 1/3$ on prouve l'existence de résonances avec des parties imaginaires arbitrairement petites.

Proposition 5. *Supposons qu'il existe un ensemble $\Pi_0 \subset \Pi_a$ avec $\mu(\Pi_0) > 0$ tel que $T(\nu) = T_0$, $q(\nu) = q_0$, $\forall \nu \in \Pi_0$. Alors pour tout $\epsilon > 0$ fixé il existe $\tau_\epsilon > 0$ tel qu'on a*

$$\sharp \left\{\lambda_j : |\Re\lambda_j - \tau_m| \leq \epsilon,\ \Im\lambda_j \leq \epsilon^2\right\} \geq \frac{(2\pi)^{-n}}{2T_0}\mu(\Pi_0)\tau_m^{n-1},\ \ \tau_m \geq \tau_\epsilon \tag{17}$$

De plus, pour tout $\epsilon > 0$ fixé nous avons

$$\sharp\{\lambda_j : |\Re\lambda_j| \leq r,\ \Im\lambda_j \leq \epsilon^2\} \geq \frac{(2\pi)^{-n-1}}{n}\mu(\Pi_0) r^n \left(1 - O_\epsilon(\frac{1}{r})\right)\ ,\ \ r \longrightarrow +\infty. \tag{18}$$

Ce résultat est analogue aux propriétés de concentration de valeurs propres établies dans [5], [17], [19] puisque la constante $(2\pi)^{-n}(2T_0)^{-1}\mu(\Pi_0) > 0$ est indépendante de $\epsilon > 0$. D'autre part, la Proposition 5 est plus précise que les résultats dans [22], [12] et [14]. La constante dans (18) est indépendante de T_0 et elle coïncide modulo le facteur $(2\pi)^{-1}$ avec celle dans [14]. Notons qu'une constante pareille apparaît dans les bornes inférieures avec facteur r^n obtenues par Stefanov [24]. Finalement, l'hypothèse $\mu(\Pi_a) > 0$ est nécessaire pour la concentration de résonances et on a la proposition suivante:

Proposition 6. *Supposons qu'il existe des constantes $\kappa > 0$ et $B > 0$ et des suites $\epsilon_m \searrow 0$, $\tau_m \nearrow +\infty$ telles que*

$$\sharp\{\lambda_j : |\Re\lambda_j - \tau_m| \leq B\epsilon_m,\ \Im\lambda_j \leq \epsilon_m^2\} \geq \kappa\tau_m^{n-1},\ \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$2(2\pi)^{-n}\int_{\Pi_a} T^{-1}(\nu)d\nu \geq \kappa. \tag{19}$$

4 Idée de la démonstration du Théorème 1

Pour simplifier l'exposé nous allons traiter seulement le cas de dimension impaire et dans la suite on suppose que n est impair. On renvoie à [13] pour les détails concernant le cas n pair. Pour l'étude de la variation de $s(\lambda)$ nous avons besoin d'une représenattion de $s'(\lambda)$. Nos hypothèses permettent de définir la distribution

$$u(t) = 2\ \mathrm{tr}\ \left(\cos(t\sqrt{L}) - \mathbf{1}|_{\mathbf{R}^n\setminus B(0,R_0)}\cos(t\sqrt{\Delta})\mathbf{1}|_{\mathbf{R}^n\setminus B(0,R_0)}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})\,.$$

La liaison entre $u(t)$ et la phase de diffusion est donnée par la formule de *Birman-Krein*:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\frac{ds}{d\lambda}}(t) + 2\sum_{\substack{\lambda_j^2 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(L)\\ \Im\lambda_j < 0}} \cos(\lambda_j t)\ ,\ \ t \neq 0$$

(cf. [2] et les références citées). D'autre part, on a la *formule de Poisson*

$$u(t) = \sum_j e^{i\lambda_j |t|}, \quad t \neq 0 \tag{20}$$

au sens de distributions sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, où la somme est prise sur toutes les résonances λ_j incluses avec leurs multiplicités. Cette formule a été établie en suivant la généralité par Bardos-Guillot-Ralston, Melrose et Sjöstrand-Zworski (cf. [20] et les références citées). Rappelons l'idée de Melrose [10] pour la régularisation de $s(\lambda)$ qui donne une justification générale de l'approximation de Breit-Wigner.

Soit $\chi(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ une fonction telle que $0 \leq \chi(t) \leq 1$, $\chi(t) = 1$ pour $5/6 \leq t \leq 7/6$, $\chi(t) = 0$ pour $t \geq 4/3$ et pour $t \leq 2/3$. Introduisons

$$\frac{d}{d\lambda} s_{\mathrm{norm}}(\lambda) = 2\pi \sum_{\lambda_j \in \Lambda_\rho} \chi\Big(\frac{|\lambda_j|}{\lambda}\Big) P(\lambda_j, \lambda)\,, \quad s_{\mathrm{norm}}(0) = 0\,, \tag{21}$$

où $P(z, \lambda)$ est déterminé en Section 1, et posons $s_{\mathrm{reg}}(\lambda) = s(\lambda) - s_{\mathrm{norm}}(\lambda)$. Melrose a prouvé que $s_{\mathrm{reg}}(\lambda) \in S^n(\mathbb{R})$ est un symbole d'ordre n. Par conséquence nous devrons examiner seulement l'intégrale

$$\int_{\tau-\delta}^{\tau+\delta} s'_{\mathrm{norm}}(\lambda) d\lambda.$$

En utilisant (21) on prouve les Propositions 1 et 2 et pour que (2) soit valable on doit montrer que

$$\sum_{\epsilon < |\lambda_j - \tau| < 2\tau} P(\lambda_j, \lambda) = \mathcal{O}_\epsilon(\tau^{n-1})\,, \quad |\lambda - \tau| \ll 1 \tag{22}$$

puisque l'intégration sur $[\tau - \delta, \tau + \delta]$ donne le facteur δ.

La somme des noyaux de Poisson, $P(\lambda_j, \lambda)$, apparaît naturellement dans l'estimation de Carleman (cf. [25], 3.7 et 3.71). Soit $h(z)$ une fonction holomorphe dans $\Im z \geq 0$ ayant des zéros λ_j qui n'appartiennent pas aux demi-cercles $|z - \lambda_j| = \rho$ et $|z - \lambda_j| = 2r$. Alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\sum_{\rho < |\lambda - \lambda_j| < r} \frac{\Im \lambda_j}{|\lambda - \lambda_j|^2} \leq \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{2\pi r}\int_0^\pi \log|h(\lambda + 2re^{i\theta})| \sin\theta d\theta - \frac{1}{\pi\rho}\int_0^\pi \log|h(\lambda + \rho e^{i\theta})| \sin\theta d\theta \tag{23}$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_\rho^{2r} \Big(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{4r^2}\Big) \log|h(\lambda + y) h(\lambda - y)| dy\Big)\,.$$

Dans le problème qui nous intéresse il est naturel de choisir comme fonction h le déterminant de la matrice de diffusion multiplié par un polynôme:

$$h(\lambda) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \prod_{\substack{\lambda_j^2 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(L) \\ \Im \lambda_j < 0}} (\lambda + \lambda_j) \det S(-\lambda)\,.$$

Notons que pour $\Im \lambda \leq 0$, $S(\lambda)$ est méromorphe avec un nombre fini de pôles $\lambda_j \neq 0$ pour lesquels $\lambda_j^2 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(L)$ et des zéros en $-\lambda_j$, où λ_j sont des résonances. De plus, $S(\lambda)$ est unitaire pour λ réel et $|\det S(\lambda)| = 1$ sur l'axe réel.

Afin de traiter le premier terme dans la partie droite de (23) nous allons démontrer une estimation qui généralise le résultat de la Proposition 2 et (14) de [31]:

Lemme 1. *Soit L un opérateur qui satisfait les conditions dans Section 1 mais avec* (8) *remplacée par une condition plus faible*

$$\sharp\{\lambda \,:\, \lambda^2 \in \sigma(L^\sharp)\,, \lambda \leq r\} \leq C(L) r^m\,, \quad m \geq n\,. \tag{24}$$

Alors pour $\Im\lambda \geq 0$, $|\lambda - \tilde{\lambda}| > \epsilon$, $\tilde{\lambda}^2 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(L)$ *on a*

$$|\det S(-\lambda)| \leq C_\epsilon \exp(C_\epsilon \Im\lambda |\lambda|^{n-1})\,.$$

Preuve. Soit $\Im\lambda > C_0 \gg 1$. On désigne par C différentes constantes indépendantes de λ. On va profiter de la représentation de $S(-\lambda) = I + A(-\lambda)$ obtenue dans la démonstation du Théorème 4 dans [33]:

$$A(-\lambda) = -c_n \lambda^{n-2} \mathbf{E}^{\phi_1}(\lambda)[\Delta, \chi_2] R(-\lambda)[\Delta, \chi]^t \mathbf{E}^{\phi_2}(\lambda)\,,$$

où $\mathbf{E}^\phi(\lambda) \,:\, L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(S^{n-1})$ a pour noyau $K(\theta, x) = \exp(i\lambda\langle x, \theta\rangle)\phi(x)$, et $\phi_j, \chi_2, \chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, sont spécialement choisies et égales à 1 près de $B(0, R_0)$. On a pour $\Im\lambda > C_0$

$$\|R(-\lambda)\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}} \leq \frac{C}{|\lambda|},$$

et on obtient facilement

$$\|[\Delta, \chi_2] R(-\lambda)[\Delta, \chi]\|_{L^2(\mathbf{R}^n)\to L^2(\mathbf{R}^n)} \leq C|\lambda|\,, \quad \Im\lambda > C_0\,.$$

On en déduit

$$|A(-\lambda)(\theta, \omega)| \leq C|\lambda|^{n-1} e^{C\Im\lambda}\,, \quad \Im\lambda > C_0$$

et l'analyticité du noyau $A(-\lambda)(\theta, \omega)$ de $A(-\lambda)$ par rapport à θ. Alors les estimations de Cauchy impliquent

$$|\Delta_\theta^m A(\theta, \omega)| \leq C^m (2m)! e^{C|\lambda|}\,, \quad \Im\lambda > C_0$$

et en suivant [9],[31] on estime les valeurs caractéristiques de $A(-\lambda)$:

$$\mu_j(A(-\lambda)) \leq C e^{C|\lambda| - j^{\frac{1}{n-1}}/C}\,, j \in \mathbb{N}.$$

En appliquant les inégalités de Weyl (cf.[31]) on conclut que

$$|\det S(-\lambda)| \leq \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \mu_j(A(-\lambda))) \leq C e^{C(\Im\lambda + (n-1)\log|\lambda|)|\lambda|^{n-1}}\,, \quad \Im\lambda > C_0.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $|\det S(-\lambda)| = 1$, tandis que pour $|\lambda - \tilde{\lambda}| = \epsilon$, $\tilde{\lambda}^2 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(L)$, $|\det S(-\lambda)| \leq C_\epsilon$. De plus, comme dans [4], [32] on peut estimer $\det S(-\lambda)$ globalement hors des petits disques autour des résonances:

$$|\det S(-\lambda)| \leq C e^{C|\lambda|^{mn+\epsilon}}\,, \quad -\lambda \notin \bigcup_{\lambda_j \neq 0} D(\lambda_j, |\lambda_j|^{-m-\epsilon})\,, \; |\lambda| > 1\,.$$

En combinant cela avec l'estimation sur l'axe réel et le principe du maximum on obtient $|\det S(-\lambda)| \leq \exp(C|\lambda|^N)$ pour $\Im\lambda \geq 0$, $|\lambda - \tilde{\lambda}| > \epsilon$, $\tilde{\lambda}^2 \in \sigma_{\mathrm{pp}}(L)$, N étant un entier fixé.

Afin d'appliquer le principe de Phragmén-Lindelöf considérons la fonction

$$g(\lambda) = e^{iB\lambda^n} \det S(-\lambda)\,, \quad \Im\lambda \geq 0\,,\ |\Re\lambda| > C_2 > 0,$$

où la constante $B > 0$ sera choisie ci-dessous. Sur la courbe

$$\gamma = \{\lambda \in \mathbf{C} : \Im\lambda = \log|\lambda| > C_0\,,\ \Re\lambda \geq C_2 > 0\}$$

on a

$$1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} C_{j+1}^n \Big(\frac{\Im\lambda}{\Re\lambda}\Big)^j \geq 1/2,$$

en supposant que $C_2 > 0$ est assez large. Cela implique

$$|e^{iB\lambda^n}| \leq \exp\Big(-\frac{nB}{2}\Im\lambda(\Re\lambda)^{n-1}\Big)\,, \quad \lambda \in \gamma.$$

Combinant cette inégalité avec l'estimaiton pour $|\det S(-\lambda)|$, on déduit $|g(\lambda)| \leq C,\ \ \lambda \in \gamma$ si on prend $B = 2CC_3^{n-1}$, où $|\lambda|/\Re\lambda \leq C_3$ sur γ. D'autre part, $|g(\lambda)| = 1$ pour $\Im\lambda = 0$ et le principe de Phragmén-Lindelöf donne le résultat pour $\Re\lambda > C_2$. On traite de la même manière le cas $\Re\lambda < -C_2$ et avec le principe du maximum on achève la démonstration.

La difficulté dans l'application de l'estimation de Carleman (23) est liée avec l'analyse de l'intégrale sur le ρ-demi-cercle uniformément par rapport à $\lambda \sim \tau$. Pour cet objectif nous avons besoin d'une borne inférieure de $\log|h(\lambda + \rho e^{i\theta})|$.

Lemme 2. *Pour tout $0 < \rho < 1/2$ fixé et pour $\tau \gg 1$ il existe $\rho/2 < \rho(\tau) < \rho$ tel que*

$$\log|\det S(-\tau - \rho(\tau)e^{i\theta})| \geq -A_\rho \tau^{n-1}\,, \quad 0 \leq \theta \leq \pi\,, \tag{25}$$

où $A_\rho > 0$ est indépendante de τ.

Preuve. Soient λ_j, $1 \leq j \leq J(\tau)$, les résonances dans $|\lambda + \tau| < 1$ avec $J(\tau) \leq C\tau^{n-1}$ selon la Proposition 2. On écrit

$$H(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det S(-\lambda) = e^{g_\tau(\lambda)} \frac{\overline{P_\tau(\bar\lambda)}}{P_\tau(\lambda)},\ \ |\lambda - \tau| < 1\,,\ \ P_\tau(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{j=1}^{J(\tau)} (\lambda + \lambda_j)\,, \tag{26}$$

où g_τ est holomorphe dans $|\lambda - \tau| \leq 3/4$ et satisfait l'égalité $g_\tau(\bar\lambda) = -\overline{g_\tau(\lambda)}$. En particulier, $\Re g_\tau(\lambda) = 0$ pour λ réel. Pour $|\lambda - \tau| \leq 3/4$ on trouve

$$|P_\tau(\lambda)| \leq C\exp(C|\tau|^{n-1}).$$

Le lemme de Cartan (cf. [6], Lemma 6.17) implique que hors de l'union de disques ayant rayons r_j, $\sum_j r_j \leq \epsilon$, on a

$$|P_\tau(\lambda)| \geq \Big(\frac{\epsilon}{2e}\Big)^{J(\tau)} > \exp\Big(-C\log\frac{1}{\epsilon}\tau^{n-1}\Big).$$

Si $\epsilon \ll 1$ nous pourrons choisir $\rho/2 < \rho(\tau) < \rho$ de telle façon que pour $|\tau - \lambda| = \rho(\tau)$,

$$|P_\tau(\lambda)| > \exp\Big(-C\tau^{n-1}\Big)\,. \tag{27}$$

En combinant cela avec l'estimation du Lemme 1 et le principe du maximum on conclut que

$$\Re g_\tau(\lambda) \leq C_1\tau^{n-1}\,, \quad \Im\lambda \geq 0\,, \quad |\lambda - \tau| \leq 3/4\,.$$

Après on considère la fonction harmonique positive $G(\lambda) = 2C_1\tau^{n-1} - \Re g_\tau(\lambda)$ et on applique l'inégalité de Harnack dans les disques $D(\tilde{\lambda}, r) \subset D(\hat{\lambda}, 3r)$, $\Im\hat{\lambda} > 3r$. En comparant le maximun et le minimum de $G(\lambda)$ sur $D(\tilde{\lambda}, r)$ on montre que

$$-3C_1\tau^{n-1} \leq \Re g_\tau(\lambda) \leq C_1\tau^{n-1}\,, \quad \Im\lambda \geq 0\,, \quad |\lambda - \tau| \leq 3/4\,.$$

La borne inférieure (27) et l'estimaition de $\Re g_\tau$ impliquent

$$\log|H(\lambda)| \geq -C_2\tau^{n-1}\,, \quad |\lambda - \tau| = \rho(\tau)\,, \quad \Im\lambda \geq 0$$

et la preuve est complète.

En appliquant les Lemmes 1 et 2 on obtient immédiatement l'assertation du Théorème 1.

References

[1] N. Burq *Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel,* Acta Math. **180** (1998), 1–29.

[2] T. Christiansen, *Spectral asymptotics for general compactly supported perturbations of the Laplacian on* $\mathbb{R}^n$, Comm. P.D.E. **23**(1998), 933-947.

[3] C.Gérard, A. Martinez and D. Robert, *Breit-Wigner formulas for the scattering poles and total scattering cross-section in the semi-classical limit*, Comm. Math. Phys. **121** (1989) 323-336.

[4] L. Guillopé and M. Zworski, *Scattering asymptotics for Riemann surfaces,* Ann. of Math. **129**(1997), 597-660.

[5] T.E.Guriev and Yu.S.Safarov, *Precise asymptotics of the spectrum for the Laplace operator on manifolds with periodic geodesics*, Trudy Matem. Inst. Steklov, **179** (1988) (in Russian); English translation in Proc. Steklov Institute of Mathematics, **179** (1989), 35-53.

[6] W.K. Hayman, *Subharmonic Functions,* vol.II, Academic Press, London, 1989.

[7] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Vol. III, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[8] R.B.Melrose, *Polynomial bounds on the number of the scattering poles*, J. Funct. Anal.,**53** (1983), 287-303.

[9] R.B.Melrose, *Polynomial bounds on the distribution of poles in scattering by an obstacle*, Journées EDP, Saint-Jean-de-Monts, 1984.

[10] R.B.Melrose, *Weyl asymptotics for the phase in obstacle scattring*, Comm. P.D.E., **13** (1988), 1431-1439.

[11] V. Petkov, *Weyl asymptotic of the scattering phase for metric perturbations*, Asymptotic Analysis, **10** (1995), 245-261.

[12] V. Petkov and G. Vodev, *Upper bounds on the number of scattering poles and the Lax-Phillips conjecture*, Asymptotic Analysis, **7** (1993), 97-104.

[13] V. Petkov and M. Zworski, *Breit-Wigner approximation and the distribution of resonances*, Comm. Math. Physics, (to appear).

[14] G. Popov, *On the contribution of degenerate periodic trajectories to the wave trace*, Comm. Math. Physics, **196** (1998), 363-383.

[15] D. Robert, *Asymptotique de la phase de diffusion à haute énergie pour des perturbations du seconde ordre du Laplacien*, Ann. Sci. Ecole Norm.Sup. Sér. **25** (1992), 107-134.

[16] D. Robert, *Relative time-delay for perturbations of elliptic operators and semiclassical asymptotics*, J. Funct. Anal. **126** (1994), 36-82.

[17] Yu. Safarov, *Asymptotics of the spectrum of pseudodifferential operators with periodic characteristics*, Zap. Nauchn. sem. Leningrad. Otdel Mat. Inst. Steklov, **152** (1986), 94-104 (in Russian); English translation in J. Soviet Math. **40** (1988), 645-652.

[18] Yu. Safarov and D. Vassiliev, *Branching Hamiltonian billiards*, Dokl. AN SSSR, **301** (1988), 271-274; English tranlsation in Sov. Math. Dokl. **38** (1989), 64-68.

[19] Yu. Safarov and D. Vassiliev, *The asymptotic distribution of eigenvalues of partial differential equations*, Translations of mathematical monographs, AMS, vol. **155**, 1996.

[20] J. Sjöstrand, *A trace formula and review of some estimates for resonances*, in *Microlocal analysis and spectral theory (Lucca, 1996),* 377–437, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 490, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.

[21] J. Sjöstrand and M. Zworski, *Complex scaling and the distribution of scattering poles*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 729-769.

[22] J. Sjöstrand and M. Zworski. *Lower bounds on the number of scattering poles*, Comm. P.D.E., **18** (1993), 847-857.

[23] J. Sjöstrand and M. Zworski. *Lower bounds on the number of scattering poles*, II, J. Funct. Anal. **123** (1994), 336-367.

[24] P. Stefanov, *Quasimodes and resonances: fine lower bounds*, to appear in Duke Math. J.

[25] E.C.Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford University, Oxford, 1968.

[26] G. Vodev, *Sharp bounds on the number of scattering poles for perturbations of the Laplacian*, Comm. Math. Phys. **146** (1992), 205-216.

[27] G. Vodev, *On the distribution of scattering poles for perturbations of the Laplacian*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **42** (1992), 625-635.

[28] G. Vodev, *Sharp bounds on the number of scattering poles in even-dimensional spaces*, Duke Math. J. **74** (1994), 1-17.

[29] G. Vodev, *Sharp bounds on the number of scattering poles in two dimensional case*, Math. Nachr. **170** (1994), 287-297.

[30] M. Zworski, *Distribution of poles for scattering on the real line,*J. Funct. Anal. **73** (1987), 277–296.

[31] M. Zworski, *Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles*, Duke Math. J. **59** (1989), 311-323.

[32] M. Zworski, *Poisson formulae for resonaces*, Séminaire E.D.P., Ecole Polytechnique, Exposé XIII, 1996-1997.

[33] M. Zworski, *Poisson formula for resonances in even dimensions.* Asian J. Math. **2** (1998), 615-624.

Département de Mathématiques Appliquées, Université de Bordeaux I,
351, Cours de la Libération, 33405 Talence, FRANCE
petkov@math.u-bordeaux.fr

Mathematics Department, University of California,
Evans Hall, Berkeley, CA 94720, USA
zworski@math.berkeley.edu