SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1997-1998

Benoît Desjardins

Sur la Régularité des Solutions faibles des Equations de Navier-Stokes isentropiques en dimension deux

Séminaire É. D. P. (1997-1998), Exposé n° III, 12 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1997-1998____A3_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Sur la Régularité des Solutions faibles des Equations de Navier-Stokes Isentropiques en dimension deux

B. Desjardins
D.M.I., École Normale Supérieure, France
desjardi@dmi.ens.fr

Comme il est mentionné dans de nombreux travaux sur les équations de la mécanique des fluides compressibles [8] [9] [13] [14] [16] la formation de régions d'annulation de la densité est une des difficultés apparaissant dans l'étude de l'existence de solutions classiques globales en temps pour les équations de Navier-Stokes compressibles isentropiques. En effet, l'existence locale en temps de solutions régulières peut être obtenue par des méthodes classiques [14] pour des données initiales bornées inférieurement par une constante strictement positive. Des exemples à symétrie sphérique [15] montrent montrent que la densité peut exploser en temps fini en norme L^∞. On s'intéresse ici au cas où la densité initiale peut s'annuler et l'on montre pour des conditions aux limites périodiques en dimension $d = 2$ que les solutions faibles des équations de Navier Stokes construites dans [10] [12] restent régulières tant que la densité est bornée dans L^∞.

1 Résultats d'existence

Les équations de Navier-Stokes compressibles pour des fluides isentropiques s'écrivent dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) comme suit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}\ (\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \mathrm{div}\ (\rho u \otimes u) - \mu \Delta u - (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div}\ u + \nabla p(\rho) = \rho f, \\ p(s) = a s^\gamma, \quad \text{où} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad \gamma > 1. \end{cases} \tag{1}$$

Les inconnues $\rho \geq 0$ et $u \in \mathbb{R}^d$ désignent respectivement la densité et le champ des vitesses du fluide. Les coefficients de viscosité λ, μ sont supposés tels que $\mu > 0$ et $\lambda + 2\mu > 0$. Enfin, f représente le champ de forces volumiques exercé sur le fluide. On complète ce système avec des conditions aux limites de Dirichlet $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et des conditions initiales

$$\rho_{|t=0} = \rho_0 \geq 0, \quad \rho_0 \in L^\gamma(\Omega) \quad \text{et} \quad \rho u_{|t=0} = m_0 \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \frac{m_0^2}{\rho_0} \in L^1(\Omega), \tag{2}$$

où l'on convient que $m_0 = 0$ sur $\{x \;/\; \rho_0(x) = 0\}$. Les bornes d'énergie naturelles s'obtiennent en multipliant l'équation de conservation de la quantité de mouvement par u

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\rho u^2 + a\frac{\rho^\gamma}{\gamma-1}\right)(t,x)dx + \int_0^t \int_\Omega \left(\mu|\nabla u|^2 + (\lambda+2\mu)(\mathrm{div}\ u)^2\right) dxds$$

$$\leq \int_\Omega \left(\frac{m_0^2}{2\rho_0} + a\frac{\rho_0^\gamma}{\gamma-1}\right)(x)dx + \int_0^t \int_\Omega \rho f.udxds \qquad (3)$$

L'existence de solutions faibles globales en temps "à la Leray" a été obtenue par P.L. Lions [10] [11] [12] dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$, Ω borné ou pour des conditions aux limites périodiques $\Omega = \mathbb{T}^d$. Sous l'hypothèse (2) sur les conditions initiales et $\gamma \geq 3/2$ si $d = 2$, $\gamma \geq 9/5$ si $d = 3$, $\gamma > d/2$ si $d \geq 4$, il obtient le résultat suivant

Théorème 1.1 *Il existe* $(\rho, u) \in L^\infty(0,\infty; L^\gamma(\mathbb{T}^d)) \times L^2(0,\infty; H^1(\mathbb{T}^d))^d$ *solution faible de* (1) *telle que* $\rho \in C([0,\infty); L^p(\mathbb{T}^d))$ *pour tout* $1 \leq p < \gamma$, $\rho|u|^2 \in L^\infty(0,\infty; L^1(\mathbb{T}^d))$, $\rho \in L^q_{loc}([0,\infty); L^q(\mathbb{T}^d))$ *pour* $1 \leq q \leq \gamma - 1 + 2\gamma/d$. *En outre, l'inégalité d'énergie* (3) *est valable pour presque tout* $t > 0$.

On s'intéresse dans ce qui suit à la régularité de ces solutions faibles sans restrictions sur les données initiales. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ et $q > d$. Etant donnés une loi de pression $s \mapsto p(s)$ de classe C^2, un champ de forces volumiques

$$f \in L^q((0,T) \times \Omega)^d \qquad (4)$$

et des données initiales

$$\rho_0 \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad 0 < m \leq \rho_0 \leq M < +\infty, \quad \text{et} \quad u_0 \in W^{2-2/q,q}(\Omega)^d, \qquad (5)$$

Solonnikov montre dans [14]

Théorème 1.2 *Il existe un temps* $T_* \in (0,\infty]$ *et une unique solution* $(\rho, u) \in \mathcal{D}'((0,T_*) \times \Omega)^{d+1}$ *telle que pour tout* $T < T*$

$$\rho \in L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(\Omega)), \quad \partial_t\rho \in L^q((0,T)\times\Omega),$$

$$0 < m(t) \leq \rho(t,.) \leq M(t) < +\infty,$$

$$u \in L^q(0,T; W^{2,q}(\Omega))^d, \quad et \quad \partial_t u \in L^q((0,T)\times\mathbb{T}^d)^d.$$

Un exemple à symétrie sphérique dû à Vaigant [15] montre qu'en général, $T_* < +\infty$. En effet, il existe des données initiales (ρ_0, u_0) et des forces extérieures f vérifiant les hypothèses $(4, 5)$ du théorème 1.2 pour un $q > d$ telles qu'il existe $T_0 < +\infty$ satisfaisant

$$\lim_{t \to T_0^-} |\rho(t, .)|_{L^\infty(B(0,1))} = +\infty.$$

Inversement se pose la question de savoir si (ρ, u) est régulier si ρ reste borné dans $L^\infty((0,T) \times \Omega)$. D'autre part, le résultat d'existence de solutions régulières ci-dessus nécessite des bornes inférieures sur la densité. Il est alors intéressant d'étudier les effets du vide dans la formation des singularités.

Dans tout ce qui suit, on considère des densités initiales $\rho_0 \geq 0$ pouvant éventuellement s'annuler. On se place dans le cas de conditions aux limites périodiques en dimension $d = 2$. Par souci de simplicité, on prendra $f \equiv 0$. On suppose par ailleurs que $\gamma > 1$ et que les données initiales vérifient

$$\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{T}^d), \quad \rho_0 \geq 0, \quad \text{et} \quad u_0 \in H^1(\mathbb{T}^d)^d. \tag{6}$$

On se propose de montrer le théorème suivant

Théorème 1.3 *(i) Il existe* $T_0 \in (0, \infty]$ *et une solution* (ρ, u) *des équations de Navier-Stokes sur* $(0, T_0)$ *telle que pour tout* $T < T_0$

$$\rho \in L^\infty((0,T) \times \mathbb{T}^2) \cap C([0,T]; L^q(\mathbb{T}^2)) \quad \textit{pour tout} \quad q \in [1, \infty), \tag{7}$$

$$\sqrt{\rho}\partial_t u \quad \textit{et} \quad D^2 P u \in L^2((0,T) \times \mathbb{T}^2)^2, \quad \nabla u \in L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{T}^2))^4,$$
$$\textit{et} \quad G = (\lambda + 2\mu) \textit{div}\ u - p(\rho) \in L^2(0,T; H^1(\mathbb{T}^2)), \tag{8}$$

où P *designe la projection sur l'espace des champs de vecteurs à divergence nulle.*
(ii) Les propriétés de régularité (7) *et* (8) *sont valables tant que*

$$\textit{sup}\ _{t \in [0,T]} |\rho(t, .)|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} < +\infty.$$

Un des principaux arguments de la preuve de (ii) repose sur une estimation a priori utilisée dans [4] dans le cadre de l'étude de la frontière des poches de vide dans un fluide incompressible. Ce lemme est une estimation de type Gagliardo-Nirenberg sur u à poids dépendant de ρ, sans informations sur les dérivées de ρ

Lemme 1 *Il existe $C_0 > 0$ telle que pour tout $p > 1$ et (ρ, u) tels que $u \in H^1(\mathbb{T}^2)^2$, $\int_{\mathbb{T}^2} u dx = 0$, $\rho \in L^\gamma(\mathbb{T}^2)$ pour un $\gamma > 1$, on a*

$$\left|\rho^{\frac{1}{2p}} u\right|_{L^{2p}(\mathbb{T}^2)} \leq C_0 \, |\sqrt{\rho} u|^{\frac{1}{p}}_{L^2(\mathbb{T}^2)} \, |\nabla u|^{1-\frac{1}{p}}_{L^2(\mathbb{T}^2)} \sqrt{\frac{p\gamma}{\gamma - 1}}$$

$$\times \left\{ log \left(2 + \frac{|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} |\rho|_{L^\gamma(\mathbb{T}^2)}}{|\sqrt{\rho} u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}} \right) \right\}^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \tag{9}$$

Ces solutions, plus régulières que les solutions faibles construites par P.-L. Lions, vérifient une propriété d'unicité "fort-faible", i.e. tant qu'il existe des solutions (ρ_1, u_1) très régulières, on a $(\rho, u) = (\rho_1, u_1)$. Enfin, il est possible pour ces solutions de revenir au point de vue Lagrangien en résolvant

$$\frac{d}{dt} X(t, s, x) = u(t, X(t, s, x)) \quad \text{et} \quad X_{|t=s} = x \in \mathbb{T}^2. \tag{10}$$

Bien que le champ des vitesses u ne soit pas à divergence bornée comme dans [6] [7], il est possible de définir un flot généralisé X. Plus précisément, il s'agit d'intégrer des champs de vecteurs $u \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{T}^2))$ tels qu'il existe $\alpha \in L^2_{loc}(0, T)$ satisfaisant

$$\exp\left(\frac{|\text{div } u(t,x)|^2}{\alpha(t)^2} \right) \in L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{T}^2)). \tag{11}$$

On peut alors montrer comme dans [1] l'existence d'un flot généralisé pour le champ u.

2 Preuve du lemme 1

Ce lemme repose sur l'inégalité de Trudinger pour les fonctions H^1 en dimension 2: il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour toute f dans $H^1(\mathbb{T}^2)$ telle que $\int_{\mathbb{T}^2} f dx = 0$, on a

$$\int_{\mathbb{T}^2} \exp\Big(\alpha_0 \frac{|f(x)|^2}{|\nabla f|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}} \Big) \leq \frac{1}{\alpha_0}. \tag{12}$$

Tout d'abord, on écrit

$$|\rho^{\frac{1}{2p}} u|^p_{L^{2p}(\mathbb{T}^2)} = |\sqrt{\rho}|u||u|^{p-1}|_{L^2(\mathbb{T}^2)}$$

$$\leq 2^{p-1} \left(|\sqrt{\rho} u|_{L^2(\mathbb{T}^2)} |u_n|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} + |\rho^{\frac{1}{2p}} u|_{L^{2p}(\mathbb{T}^2)} |\rho|^{\frac{p-1}{2p}}_{L^\gamma(\mathbb{T}^2)} |u - u_n|^{p-1}_{L^{\frac{2p\gamma}{\gamma-1}}(\mathbb{T}^2)} \right)$$

$$\leq C^p|\sqrt{\rho}u|_{L^2(\mathbb{T}^2)}|u_n|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} + C^p|\rho|^{\frac{1}{2}}_{L^\gamma(\mathbb{T}^2)}|u-u_n|^p_{L^{\frac{2p\gamma}{\gamma-1}}(\mathbb{T}^2)}, \tag{13}$$

où u_n est définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n(t,x) = \int_{\mathbb{T}^2} n^2\phi(ny)u(t,x-y)dy$, ϕ désignant une fonction positive $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ telle que $\int_{\mathbb{T}^2}\phi dx = 1$. En appliquant l'inégalité de convexité

$$AB \leq \frac{C}{\alpha_0}\left(\exp(\alpha_0 A^2) + B\sqrt{\log_+ B}\right) \quad \text{pour tout } (A,B) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{14}$$

au cas $A = u(s,x-y)/|\nabla u(s,.)|_{L^2(\mathbb{T}^2)}$ et $B = n^2\Phi_n(ny)$, on obtient

$$\begin{aligned} |u_n(s,.)|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} &\leq \int_{\mathbb{T}^2} |u(s,x-y)|n^2\Phi(ny)dy, \\ &\leq C|\nabla u(s,.)|_{L^2(\mathbb{T}^2)}\left(1 + \int_{\mathbb{T}^2}\Phi(y)\sqrt{\log_+(n^2\Phi(y))}dy\right), \\ &\leq C|\nabla u(s)|_{L^2(\mathbb{T}^2)}\left(1+\sqrt{\log_+ n}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

D'autre part, en utilisant le fait que

$$|u-u_n|_{L^q(\mathbb{T}^2)} \leq C\sqrt{q}n^{-\frac{2}{q}}|\nabla u|_{L^2(\mathbb{T}^2)}, \tag{16}$$

on déduit que

$$\begin{aligned} |\rho^{\frac{1}{2p}}u|^p_{L^{2p}(\mathbb{T}^2)} &\leq C^p|\sqrt{\rho}u|_{L^2(\mathbb{T}^2)}|\nabla u|^{p-1}_{L^2(\mathbb{T}^2)}\left(1+(\log_+ n)^{\frac{p-1}{2}}\right) \\ &+C^p\left(\frac{2p\gamma}{\gamma-1}\right)^{\frac{p}{2}} n^{\frac{1-\gamma}{p\gamma}}|\rho|^{\frac{1}{2}}_{L^\gamma(\mathbb{T}^2)}|\nabla u|^p_{L^2(\mathbb{T}^2)}, \end{aligned}$$

ce qui permet de montrer (9) en prenant

$$n = \left[\left(\frac{|\rho|_{L^\gamma(\mathbb{T}^2)}|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}}{|\sqrt{\rho}u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}}\right)^{\frac{p\gamma}{2(\gamma-1)}}\right] + 1.$$

□

Remarquons enfin que l'on peut utiliser la croissance en p de l'estimation (9) pour montrer une inégalité de type Trudinger

Proposition 1 *Il existe α_1 telle que pour tout $\gamma > 1$, $\rho \in L^\gamma(\mathbb{T}^2)$ et $u \in H^1(\mathbb{T}^2)$, on a*

$$\int_{\mathbb{T}^2}\rho\exp\left(\frac{\alpha_1(\gamma-1)}{\gamma}\frac{|u(x)|^2}{|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}}\right)dx < \frac{1}{\alpha_1}\frac{|\sqrt{\rho}u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}}{|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}}. \tag{17}$$

3 Preuves du théorème 1.3

Soit M_q défini pour $q \geq 1$ par

$$M_q = \fint_{\mathbb{T}^2} \rho^q dx.$$

Les bornes a priori intervenant dans la preuve du théorème 1.3 mettent en évidence deux quantités

$$F = (\lambda + 2\mu)\text{div } u - a\rho^\gamma + aM_\gamma,$$

appelée pression effective et

$$G = (\lambda + 2\mu)\log\frac{\rho}{M_1} + \Delta^{-1}\text{div }(\rho u),$$

qui s'avèrent être plus régulières que les termes qui les composent. Ces deux expressions ont été notamment introduites par D. Hoff [8] pour l'étude de la régularité globale en temps des solutions de Navier Stokes compressibles pour des données proches de l'équilibre et par P.L. Lions [10] [12] pour la preuve d'existence globale et de stabilité des solutions faibles. En premier lieu, l'inégalité d'énergie fournit les bornes a priori suivantes

$$|\sqrt{\rho}u|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\mathbb{T}^2))} + |\nabla u|_{L^2((0,\infty)\times\mathbb{T}^2)} + |\rho|_{L^\infty(0,\infty;L^\gamma(\mathbb{T}^2))} \leq C. \tag{18}$$

3.1 Bornes a priori sur la densité

En prenant dans (1) la divergence de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on obtient

$$(\partial_t + u.\nabla)\,\Delta^{-1}\text{div }(\rho u) - (\lambda+2\mu)\text{div } u + a\rho^\gamma - aM_\gamma = [u_i, R_iR_j](\rho u_j), \tag{19}$$

ce qui, combiné à

$$(\partial_t + u.\nabla)\log\rho + \text{div } u = 0,$$

permet d'écrire

$$(\partial_t + u.\nabla)\,G + a\rho^\gamma - aM_\gamma = [u_i, R_iR_j](\rho u_j). \tag{20}$$

Commencons par montrer une estimation sur le champ moyenné en espace $\overline{u} = \fint_{\mathbb{T}^2} u dx$

Lemme 2

$$|\overline{u}(t)| \leq C\left(1 + |\nabla u|_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right). \tag{21}$$

Ce lemme est une consequence directe de ce que

$$M_1\overline{u}(t) = \int_{\mathbb{T}^2} \rho(\overline{u} - u)dx + \int_{\mathbb{T}^2} m_0 dx.$$

$\square$

Un résultat de R. Coifman et Y. Meyer [5] montre que le commutateur au membre de droite de (20) est un opérateur régularisant

Théorème 3.1 *Soient (p, q, r) tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} < 1$. Alors, l'application $(a, b) \mapsto [a_i, R_iR_j]b$ est continue de $W^{1,p}(\mathbb{T}^2)^2 \times L^q(\mathbb{T}^2)$ dans $W^{1,r}(\mathbb{T}^2)^2$.*

En prenant par exemple $p = 4$, $q = 12$ et $r = 3$, on en déduit les bornes supérieures suivantes sur G

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^2} G(t, x) \leq \sup_{x\in\mathbb{T}^2} G_0(x) + Ct + C\int_0^t \left(\frac{|\Delta Pu|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + |\nabla F|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}}{|\rho|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}} \right) ds$$

$$+C\int_0^t \left(1 + |\rho|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\right)^k \left(1 + |\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right) ds.$$

pour un entier $k > 0$. D'autre part, en utilisant le fait que $\gamma > 1$ on a

$$|\Delta^{-1}\text{div } (\rho u)|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \leq |\overline{u}(t)||\Delta^{-1}\nabla\rho|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} + |\rho(u - \overline{u})|_{L^{\gamma+1}(\mathbb{T}^2)},$$

$$\leq C\left(1 + |\rho^\gamma|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + |\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right).$$

Sachant que

$$|\Delta^{-1}\text{div } (\rho_0 u_0)|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \leq C|\rho_0|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}|u_0|_{H^1(\mathbb{T}^2)},$$

on conclut que

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^2} \log\rho(t, x) \leq C + Ct + C\int_0^t \left(1 + |\rho|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\right)^k \left(1 + |\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right) ds$$

$$+C\left(|\rho^\gamma|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + |\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right) + C\int_0^t \left(\frac{|\Delta Pu|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + |\nabla F|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}}{|\rho|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}} \right) ds. \quad (22)$$

3.2 Bornes sur la vitesse

Les bornes a priori sur la vitesse s'obtiennent en multipliant l'équation de conservation de la quantité de mouvement par $\partial_t u$. Le terme impliquant la pression devient

$$\int_{\mathbb{T}^2} u_t.\nabla\left(a\rho^\gamma - (\lambda+2\mu)\text{div }u\right) = \frac{1}{2(\lambda+2\mu)}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}^2} F^2 dx$$

$$+\frac{a^2(\gamma-1)}{(2\gamma-1)(\lambda+2\mu)}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}^2}\rho^{2\gamma}dx + \frac{a}{\lambda+2\mu}\int_{\mathbb{T}^2}\rho^\gamma u.\nabla F$$

$$-\frac{a(\gamma-1)}{(\lambda+2\mu)^2}\int_{\mathbb{T}^2}\rho^\gamma F^2 dx + \frac{a^3(\gamma-1)}{(\lambda+2\mu)^2}\int_{\mathbb{T}^2}\rho^{3\gamma}dx.$$

Remarquons par ailleurs que

$$|\nabla F|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + |\Delta P u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} \le C|\rho|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\left(|\sqrt{\rho}\partial_t u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + |\sqrt{\rho}u.\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right). \tag{23}$$

En multipliant l'équation de conservation de la quantité de mouvement par $\partial_t u$, on obtient après intégrations par parties

$$\int_0^t \left(|\sqrt{\rho}\partial_t u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + |\rho|^{3\gamma}_{L^{3\gamma}(\mathbb{T}^2)}\right)ds + \left(|\nabla u(t,.)|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + |\rho^\gamma(t,.)|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right)$$

$$\le C\left(|\nabla u_0|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + |\rho_0^\gamma|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right) + C\left|\int_0^t\int_{\mathbb{T}^2}\rho^\gamma u.\nabla F dx ds\right|$$

$$+C\left|\int_0^t\int_{\mathbb{T}^2}\rho^\gamma F^2 dx ds\right| + C\int_0^t |\sqrt{\rho}u.\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}ds. \tag{24}$$

L'inégalité de Cauchy Schwarz entraîne

$$\left|\int_0^t\int_{\mathbb{T}^2}\rho^\gamma u.\nabla F dx ds\right| + \left|\int_0^t\int_{\mathbb{T}^2}\rho^\gamma F^2 dx ds\right| \le \varepsilon\int_0^t \frac{|\nabla F|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}}{|\rho|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}}ds$$

$$+C_\varepsilon\int_0^t\left(1+|\rho|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\right)^k\left(1+|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right). \tag{25}$$

D'autre part,

$$\int_0^t |\sqrt{\rho}u|^2_{L^4(\mathbb{T}^2)}|\nabla u|^2_{L^4(\mathbb{T}^2)}ds \le C\int_0^t |\sqrt{\rho}u|^2_{L^4(\mathbb{T}^2)}\left(|\nabla P u|^2_{L^4(\mathbb{T}^2)} + |F|^2_{L^4(\mathbb{T}^2)}\right)ds$$

$$+C\int_0^t |\rho|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\left(1+|\rho|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\right)^k\left(1+|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right), \tag{26}$$

$$\leq C \int_0^t \left(1+|\rho|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\right)^k \left(1+|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right) ds$$

$$+\varepsilon \int_0^t \left(\frac{|\Delta P u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + |\nabla F|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}}{|\rho|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}} \right) ds$$

$$+C_\varepsilon \int_0^t \left(1+|\rho|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\right)^2 |\rho^{\frac{1}{4}} u|^4_{L^4(\mathbb{T}^2)} \left(|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + |\rho^\gamma|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right) ds. \tag{27}$$

il suffit alors d'utiliser (23) et d'appliquer le lemme 1 avec $p = 4$ pour conclure que

$$\int_0^t \left(|\sqrt{\rho}\partial_t u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right) ds + \left(|\nabla u(t,.)|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + |\rho^\gamma(t,.)|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right) \leq C$$

$$+C \int_0^t |\rho|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \left(1+|\rho|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\right)^k \left(1+|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right) ds + C \int_0^t \left(1+|\rho|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\right)^2$$

$$\times \left(1+|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + |\rho^\gamma|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right) \left(1+|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right) \log\left(2+|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right) ds. \tag{28}$$

De (22), (23) et (28), on déduit que

$$\log|\rho(t,.)|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} + \beta(t) \leq C + Ct$$

$$+C \int_0^t \left(1+|\rho|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\right)^k \left(1+|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right) \beta(s) \log \beta(s) ds. \tag{29}$$

où l'on a posé

$$\beta(t) = 1 + |\nabla u(t,.)|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} + |\rho^\gamma(t,.)|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}.$$

En appliquant le lemme de Gronwall à β, on obtient finalement

$$\log|\rho(t,.)|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} + \beta(t)$$

$$\leq \exp\left(\log(C+Ct) \exp\left(C \int_0^t \left(1+|\rho|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}\right)^k \left(1+|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}\right) ds\right)\right), \tag{30}$$

puis en l'appliquant à $t \mapsto |\rho(t,.)|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}$, on conclut que pour $t \leq 1$

$$\log|\rho(t,.)|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} + \beta(t) \leq C\left(1 - C\int_0^t \left(1+|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)} ds\right)\right)^{-1}, \tag{31}$$

ce qui montre que ρ est borné dans $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ en temps petit, et que les bornes sur (ρ, u) sont valables tant que ρ est borné dans $L^\infty((0,T)\times\mathbb{T}^2)$.

4 Conclusion

Les paragraphes 2 et 3 fournissent des bornes a priori sur les solutions de (1). Pour montrer l'existence de telles solutions, on utilise le théorème 1.2 dû à Solonnikov pour construire des solutions (ρ_n, u_n) correspondant à des conditions initiales régularisées et à une densité initiale bornée inférieurement par n^{-1}. D'après le paragraphe 3, il existe $T_0 < \infty$ tel que les bornes du théorème 1.3 sont valables sur $(0, T_0)$ pour (ρ_n, u_n) indépendemment de n. Soient ρ et u des limites faibles de ρ_n et u_n. La compacité en temps de ρ_n et de $\rho_n u_n$ permet alors de montrer que

$$\rho_n u_n \rightharpoonup \rho u, \quad \text{et} \quad \rho_n u_n \otimes u_n \rightharpoonup \rho u \otimes u.$$

En particulier, on a

$$\partial_t \rho + \text{div } (\rho u) = 0, \tag{32}$$

et en utilisant le lemme de régularisation de [6] et la propriété que $(\rho, u) \in L^\infty((0, T_0) \times \mathbb{T}^2) \times L^2((0, T) \times \mathbb{T}^2)$

$$\partial_t f(\rho) + \text{div } (f(\rho) u) + (\rho f'(\rho) - f(\rho)) \,\text{div } u = 0, \tag{33}$$

pour toute fonction f régulière. De la même facon, en notant $\overline{f(\rho)}$ une limite faible de $f(\rho_n)$ pour f regulière, on a en utilisant (19)

$$(\lambda + 2\mu)\text{div } u - a\overline{\rho^\gamma} + a \fint_{\mathbb{T}^2} \overline{\rho^\gamma} dx = \partial_t \left(\Delta^{-1} \text{div } (\rho u)\right) + R_i R_j (\rho u_i u_j), \tag{34}$$

d'où en multipliant par ρ, et en utilisant le fait que $\partial_t \rho + \text{div } (\rho u) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)\rho \text{div } u - a\rho\overline{\rho^\gamma} + a\rho \fint_{\mathbb{T}^2} \overline{\rho^\gamma} dx &= \partial_t \left(\rho \Delta^{-1} \text{div } (\rho u)\right) \\ &+ \text{div } \left(\rho u \Delta^{-1} \text{div } (\rho u)\right) + \rho [u_i, R_i R_j](\rho u_j). \end{aligned} \tag{35}$$

D'autre part, après multiplication par ρ_n de (19) considéré pour (ρ_n, u_n), on déduit à une extraction de sous-suite près

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)\overline{\rho \text{div } u} - a\overline{\rho^{\gamma+1}} + a\rho \fint_{\mathbb{T}^2} \overline{\rho^\gamma} dx &= \partial_t \left(\rho \Delta^{-1} \text{div } (\rho u)\right) \\ &+ \text{div } \left(\rho u \Delta^{-1} \text{div } (\rho u)\right) + \rho [u_i, R_i R_j](\rho u_j), \end{aligned} \tag{36}$$

en utilisant la régularité $L^1(0, T_0; W^{1,2}(\mathbb{T}^2))$ de $[u_i, R_i R_j](\rho u_j)$ résultant des bornes a priori du théorème 3.1. Par différence entre (35) et (36), on obtient

$$(\lambda + 2\mu) \left(\overline{\rho \text{div } u} - \rho \text{div } u\right) = a \left(\overline{\rho^{\gamma+1}} - \rho\overline{\rho^\gamma}\right). \tag{37}$$

Il en résulte qu'en posant $\delta = \overline{\rho \log \rho} - \rho \log \rho$, on a

$$\partial_t \delta + \text{div } (u\delta) + \frac{a}{\lambda + 2\mu} \left(\overline{\rho^{\gamma+1}} - \rho \overline{\rho^\gamma} \right) = 0.$$

Or, par convexité on a

$$\overline{\rho^{\gamma+1}} \geq \rho \overline{\rho^\gamma}.$$

On en déduit que

$$\partial_t \delta + \text{div } (u\delta) \leq 0, \quad \text{et} \quad \delta_{|t=0} \equiv 0, \tag{38}$$

d'où $\delta \equiv 0$ en utilisant [6], ce qui permet d'obtenir la convergence forte de ρ_n vers ρ dans $C([0, T_0]; L^p(\mathbb{T}^2))$ pour tout $p < +\infty$.

References

[1] B. Desjardins, A few remarks on ordinary differential equations, *C.P.D.E.* (1996) no 11-12 **21** p. 1667-1703.

[2] B. Desjardins, Linear transport equations with values in Sobolev spaces and application to the Navier-Stokes equations, *Diff. and Int. Equ* no 3 **10** (1997) p. 577-586.

[3] B. Desjardins, Global existence results for the incompressible density dependant Navier-Stokes equations in the whole space, *Diff. and Int. Equ* (1997) no 3 **10** p. 587-598.

[4] B. Desjardins, Regularity results for two dimensional viscous flows, *Arch. for Rat. Mech. Anal.* (1997) **137** p. 135-158.

[5] R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer, S. Semmes, Compensated compactness and Hardy spaces, *J. Math. Pures Appl.*, **72** (1993), p.247-286.

[6] R.J. Di Perna, P.L. Lions, Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, *Invent. Math.* **98** (1989), p. 511-547.

[7] R.J. Di Perna, P.L. Lions, in preparation see also in *Séminaire EDP 1988-1989*, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1989.

[8] D. Hoff, Global well-posedness of the Cauchy problem for nonisentropic gas dynamics with discontinuous data, *J. Diff. Eq.*, **95** (1992), p.33-73.

[9] A.V. Kazhikov, V.V. Shelukhin, Unique global solution with respect to time of the initial boundary value problems for one dimensional equations of a viscous gas, *J. Appl. Math. Mech.*, **41** (1977), p. 273-282.

[10] P.L. Lions, Existence globale pour les equations de Navier-Stokes compressibles isentropiques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **316** (1993), p. 1335-1340.

[11] P.L. Lions, Compacité des solutions des équations de Navier-Stokes compressibles isentropiques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **317** (1993),p. 115-120.

[12] P.L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Mechanics, *Oxford University Press* (1996).

[13] D. Serre, Solutions faibles globales des equations de Navier-Stokes pour un fluide compressible, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **303** (1986), p. 629-642.

[14] V.A. Solonnikov, Solvability of the initial boundary value problem fpr the equation of a viscous compressible fluid, *J. Sov. Math.*, **14** (1980), p.1120-1133.

[15] V.A. Vaigant, An example of the nonexistence with respect to time of the global solution of Navier-Stokes equations for a compressible viscous barotropic fluid. *Dokl. Akad. Nauk* **339** (1994), no. 2, p. 155-156.

[16] A. Valli, W.M. Zajaczkowski, Navier-Stokes equations for compressible fluids : global existence and qualitative properties of the solutions in the general case, *Comm. Math. Phys.* **103** (1986), p. 259-296.