Hajer Bahouri et Jean-Yves Chemin

Inégalités de Strichartz et équations d'ondes quasilinéaires

Séminaire É. D. P. (1997-1998), Exposé n° XXIII, 15 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1997-1998____A23_0>

Inégalités de Strichartz et équations d'ondes quasilinéaires

Hajer BAHOURI
Département de Mathématiques
Faculté de Sciences de Tunis
1060 Tunis, Tunisie
Télécopie: (216) 1 885 350
Adresse éléctronique: hajer.Bahouri@fst.rnu.tn

Jean-Yves CHEMIN
Analyse Numérique, Case 187
Université Pierre et Marie CURIE, 4 Place Jussieu
75230 Paris Cedex 05, France
Télécopie: (33) 01 44 27 72 00
Adresse éléctronique: chemin@ann.jussieu.fr

Résumé *Dans ce texte, notre but est de résoudre des équations d'ondes quasilinéaires pour des données initiales moins régulières que ce qu'impose les méthodes d'énergie. Ceci impose de démontrer des estimées de type Strichartz pour des opérateurs d'ondes à coefficients seulement lipschitziens.*

Absract *In this text, our aim is the proof of local wellposedness for quasilinear wave equations for initial data less regular than what is required by energy method. This implies to prove Strichartz type estimates for wave operators whose coefficients are only lipschitz.*

Introduction et énoncé du théorème

Dans toute la suite, G désignera une fonction indéfiniment différentiable, nulle en 0, bornée ainsi que toutes ses dérivées de $\mathbf{R}$ dans l'ensemble des matrices symétriques sur $\mathbf{R}^d$. On supposera de plus que G prend ses valeurs dans un compact K (dont on notera par M_K le maximum de la distance à l'origine) tel que $\mathrm{Id} + K$ soit inclus dans le cône des matrices symétriques définies positives. On considère une fonction F indéfiniment différentiable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On considère dans tout ce texte l'équation des ondes quasilinéaire suivante où Q désigne une forme quadratique sur $\mathbf{R}^{1+d}$.

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t^2 u - \Delta u - \partial\cdot(G(u)\cdot\partial u) & = & Q(\nabla u, \nabla u)F(u) \\ (u, \partial_t u)_{|t=0} & = & (u_0, u_1) \end{array}\right.$$

en ayant posé

$$\partial\cdot(G\cdot\partial u) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{1\leq j,k\leq d} \partial_j(G^{j,k}\partial_k u).$$

Il est important de penser aux invariances d'une telle équation par changement d'échelle. Il est immédiat de vérifier que, si u est solution de l'équation (E), alors la fonction u_λ définie par $u_\lambda(t,x) = u(\lambda t, \lambda x)$ est aussi solution de (E). Une vaste série de travaux s'est attaché à résoudre des équations d'ondes non linéaires en essayant de descendre l'indice de régularité minimale des données initiales aussi bas que possible vers un espace de données initiales qui soit invariant par le changement d'échelle ci-dessus, par exemple dans l'échelle des espaces de Sobolev l'espace $H^{\frac{d}{2}}$. Lorsque $G = 0$, c'est-à-dire dans le cas dit semi-linéaire, des progrès très importants ont été faits. G. Ponce et T. Sideris ont démontré dans [12] le théorème suivant.

Théorème 0.1 *Définissons l'indice $\underline{s}_d$ par*

$$\underline{s}_d \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d}{2} + \frac{1}{2} \quad si \quad d \geq 3 \quad et \quad \underline{s}_2 = \frac{7}{4}\cdot$$

Soit (u_0, u_1) une donnée initiale dans $H^s \times H^{s-1}$ avec $s > \underline{s}_d$ il existe alors un temps T strictement positif tel qu'il existe une solution u telle que

$$u \in L^\infty([0,T]; H^s) \cap Lip([0,T]; H^{s-1}) \quad et \quad \nabla u \in L^2([0,T]; L^\infty).$$

Ce théorème a été démontré dans le cas de la dimension trois par G. Ponce et T. Sideris dans [12]. Dans [10], H. Linblad montre que, pour $d = 3$, le résultat ci-dessus est optimal, c'est-à-dire que le problème (E) avec $G \equiv 0$ est mal posé dans H^2.

Si l'on impose à la forme quadratique Q de vérifier des conditions de structure dite condition nulle, on peut, comme l'ont démontré S. Klainermann et M. Machedon dans [7] et [8], grandement améliorer l'indice et atteindre presque l'indice $\frac{d}{2}\cdot$

Dans ce texte, nous voulons démontrer l'analogue du théorème de G. Ponce et T. Sideris lorsque l'équation (E) est quasilinéaire. Voici son énoncé.

Théorème 0.2 *Définissons l'indice s_d par*

$$s_d \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d}{2} + \frac{3}{4} \quad si \quad d \geq 3 \quad et \quad s_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{15}{8}\cdot$$

Soit (u_0, u_1) une donnée initiale dans $H^s \times H^{s-1}$ avec $s > s_d$, il existe alors un temps T strictement positif tel qu'il existe une solution u telle que

$$u \in L^\infty([0,T]; H^s) \cap Lip([0,T]; H^{s-1}) \quad et \quad \nabla u \in L^2([0,T]; L^\infty).$$

Remarquons tout de suite que cette solution est bien sûr unique puisque étant telle que $\nabla u \in L^1([0,T]; L^\infty)$.

Remerciements Les auteurs remercient J. Sjöstrand pour ses explications si éclairantes sur les équations d'Hamilton-Jacobi ainsi que que J.-M. Bony et G. Lebeau pour leurs remarques sur une version préliminaire de ce travail. Enfin, les discussions stimulantes que nous avons eues avec S. Klainermann ont été décisives dans l'élaboration de ce travail.

1 Structure de la démonstration

La démonstration utilise les techniques de localisation dans l'espace des fréquences et la théorie de Littewood-Paley. L'énoncé démontré est en fait un peu plus précis que celui donné ci-dessus lorsque la dimension est différente de trois.

Définition 1.1 *Soit s un nombre réel, on désigne par B^s l'espace des fonctions dont la transformée de Fourier est localement dans L^2 et telle que*

$$\sum_{q\geq 0} 2^{qs}\|\mathbf{1}_{\{2^q\leq|\xi|\leq 2^{q+1}\}}\widehat{u}\|_{L^2} < \infty.$$

Cet espace n'est autre que l'espace $B^s_{2,1}$ non homogène. Il est de plus clair que cet espace est strictement inclus dans H^s et contient strictement l'intersection de tous les espaces de Sobolev d'indice strictement plus petit. Le théorème suivant précise le théorème 0.2 ci-dessus.

Théorème 1.1 *Définissons l'indice s_d par*

$$s_d \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d}{2}+\frac{3}{4} \quad si \quad d\geq 3 \quad et \quad s_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{15}{8}.$$

Soit (u_0,u_1) une donnée initiale dans $B^{s_d}_{2,1}\times B^{s_d-1}_{2,1}$ si $d\geq 4$ ou $d=2$, dans $H^s\times H^{s-1}$ avec $s>s_3$ si $d=3$, il existe alors un temps T strictement positif tel qu'il existe une solution u telle que

$$u\in L^\infty([0,T];B^{s_d}_{2,1})\cap Lip([0,T];B^{s_d-1}_{2,1}) \quad et \quad \nabla u\in L^2([0,T];L^\infty) \quad si \quad d\neq 3$$

et que telle que

$$u\in L^\infty([0,T];H^s)\cap Lip([0,T];H^{s-1}) \quad et \quad \nabla u\in L^2([0,T];L^\infty) \quad si \quad d=3.$$

De manière classique, on régularise la donnée initiale et l'on démontre une estimation a priori sur les solutions associées à la suite de données initiales régularisées. Avant d'énoncer cette estimation, précisons les (semi-)normes qui joueront un rôle dans la preuve.

Définition 1.2 *Si (u_0,u_1) est un couple de données initiales appartenant à l'espace B^s pour un réel positif s, on pose*

$$\gamma \stackrel{\text{déf}}{=} (\partial u_0,u_1) \quad et \quad \|\gamma\|_s \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{q\in\mathbf{Z}} 2^{q(s-1)}\|\mathbf{1}_{\{2^q\leq|\xi|\leq 2^{q+1}\}}\widehat{\gamma}\|_{L^2}.$$

La norme $\|\gamma\|_s$ est la norme de l'espace de Besov homogène $\dot B^s_{2,1}$. Voici l'énoncé de l'estimation a priori.

Théorème 1.2 *Si $d\neq 3$, il existe une constante c telle que, si u est une solution régulière de (E) et si*

$$T^{\frac12}\|\gamma\|_{\frac{d}{2}+\frac12}+T^{\frac34}\|\gamma\|_{\frac{d}{2}+\frac34}\leq c\epsilon, \tag{1}$$

alors on a

$$\|\nabla u\|_{L^2_T(L^\infty)}\leq \epsilon\|\gamma\|_{\frac{d}{2}+\frac12}. \tag{2}$$

Si $d=3$, pour tout réel strictement positif α, il existe une constante c telle que, si u est une solution régulière de (E) et si

$$T^{\frac12+\alpha}\|\gamma\|_{2+\alpha}+T^{\frac34+\alpha}\|\gamma\|_{2+\frac14+\alpha}\leq c\epsilon, \tag{3}$$

alors on a

$$\|\nabla u\|_{L^2_T(L^\infty)}\leq \epsilon T^\alpha\|\gamma\|_{2+\alpha}. \tag{4}$$

Pour simplifier la démonstration, on supposera dans toute la suite que $F\equiv 0$ et l'on écrira la démonstration que pour $d\neq 3$.Nous renvoyons le lecteur à [1] pour les détails omis.

Le fait que le théorème 1.1 se déduise du théorème ci-dessus est un exercice de routine des équations d'évolution non linéaires. La suite de ce texte est donc consacrée à la preuve du théorème 1.2.

Le plan du texte est le suivant:
Rappel sur la théorie de Littlewood-Payley
Paralinéarisation et microlocalisation de l'équation (E)
L'estimation de Strichartz microlocale et le recollement des estimations.
Preuve de l'estimation de Strichartz microlocale

2 Rappel sur la théorie de Littlewood-Payley

Dans cette section, nous allons rappeller les bases de la théorie de Littlewood-Paley, définir les espaces fonctionnels dans lesquels nous allons travailler et fixer les notations que nous utiliserons dans toute la suite de ce texte.

Nous désignerons par $\mathcal{C}$ la couronne de centre 0, de petit rayon 3/4 et de grand rayon 8/3. On fixe deux fonctions positives radiales χ et φ appartenant respectivement à $\mathcal{D}(B(0,4/3))$ et à $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ telles que :

$$\chi(\xi)+\sum_{q\in\mathbf{N}}\varphi(2^{-q}\xi)=\sum_{q\in\mathbf{Z}}\varphi(2^{-q}\xi)=1, \tag{5}$$

$$|p-q|\geq 2 \Rightarrow \text{Supp }\ \varphi(2^{-q}\cdot)\cap \text{Supp }\ \varphi(2^{-p}\cdot)=\emptyset, \tag{6}$$

$$q\geq 1 \Rightarrow \text{Supp }\ \chi\cap \text{Supp }\ \varphi(2^{-q}\cdot)=\emptyset, \tag{7}$$

si $\widetilde{\mathcal{C}}=B(0,2/3)+\mathcal{C}$, alors $\widetilde{\mathcal{C}}$ est une couronne et l'on a

$$|p-q|\geq 5 \Rightarrow 2^p\widetilde{\mathcal{C}}\cap 2^q\mathcal{C}=\emptyset. \tag{8}$$

Notations

$$h=\mathcal{F}^{-1}\varphi \quad \text{et} \quad \widetilde{h}=\mathcal{F}^{-1}\chi,$$
$$\Delta_q u=\varphi(2^{-q}D)u=2^{qd}\int h(2^q y)u(x-y)dy,$$
$$S_q u=\sum_{p\leq q-1}\Delta_p u=\chi(2^{-q}D)u=\int \widetilde{h}(2^q y)u(x-y)dy.$$

En l'absence d'ambiguité, nous poserons $u_q \overset{\text{déf}}{=} \Delta_q u$.
Remarque La quantité

$$\sum_{q\in\mathbf{Z}}2^{q(s-1)}\|\Delta_q\partial u_0\|_{L^2}+\sum_{q\in\mathbf{Z}}2^{q(s-1)}\|\Delta_q u_1\|_{L^2}$$

est une semi-norme équivalente à la quantité $\|\gamma\|_s$ de la définition 1.2.

Définissons maintenant les espaces fonctionnels dans lesquels nous allons travailler ou plus précisément les (semi-)normes que nous allons estimer.

Définition 2.1 *Soit s un réel et T un réel strictement positif. Étant donné une fonction u sur $[0,T]\times\mathbf{R}^d$, on pose*

$$\widetilde{\|}u\|_{T,s}\overset{\text{déf}}{=}\sum_{q\in\mathbf{Z}}2^{qs}\|\Delta_q u\|_{L^\infty(L^2)} \quad et \quad \|u\|_{T,s}\overset{\text{déf}}{=}\sum_{q\in\mathbf{Z}}2^{q(s-1)}\|\Delta_q\nabla u\|_{L^\infty(L^2)}.$$

Remarques Ces espaces sont adaptés à la méthode suivante, qui sera utilisée systématiquement dans ce travail: pour démontrer des estimations sur les solutions d'une équation aux dérivées partielles, on localise en fréquences, c'est-à-dire que l'on fait agir un opérateur Δ_q, et ensuite on applique les techniques classiques telle l'estimation d'énergie. Ce genre de technique a été utilisé par exemple dans [3] pour l'équation de Navier-Stokes. Cela donne des estimations de semi-normes du type de celle de la définition ci-dessus où l'on prend les normes en temps avant de sommer.

Pour fixer les idées, observons que

$$\|u\|_{L^\infty_T(B^s)} \leq \widetilde{\|}u\|_{T,s}.$$

Le lemme technique suivant, est une adaptation facile au cadre décrit ci-dessus, de résultats très classiques (voir par exemple [11]).

Lemme 2.1 *Pour toute fonction $G \in \mathcal{D}$ nulle en 0 et pour tout réel strictement positif s, on a*

$$\widetilde{\|}G(u)\|_{T,s} \leq C_u \widetilde{\|}u\|_{T,s} \quad \textit{avec} \quad C_u \stackrel{\text{déf}}{=} C(1 + \|u\|_{L^\infty_T(L^\infty)})^{[s]+1},$$

où C est une constante ne dépendant que de G et de s.

Notation Dans toute la suite de ce texte, C_u désignera une quantité de la forme

$$C_u \stackrel{\text{déf}}{=} C(1 + \|u\|_{L^\infty_T(L^\infty)})^{[s]+1}$$

où C est une constante ne dépendant que de s, de G, et de la dimension d.

Le calcul paradifférentiel (voir [2] et [4]) permet alors, grâce à l'estimation d'énergie et grâce à l'estimation de Strichartz pour le D'Alembertien, de démontrer la proposition suivante, relative aux basses fréquences.

Proposition 2.1 *Il existe une constante C telle que si $2^q T \leq \Lambda_0^2$, et si u est une solution régulière de l'équation (E), alors*

$$\|\nabla u_q\|_{L^2_T(L^\infty)} \leq C 2^{q(\frac{d}{2}-\frac{1}{2})} \|\gamma_q\|_{L^2} + c_q C_u \Lambda_0 (T^{\frac{1}{2}} \|u\|_{T,\frac{d}{2}+\frac{1}{2}} + \Lambda_0) \|u\|_{T,\frac{d}{2}+\frac{1}{2}}.$$

De plus, si s est un réel strictement supérieur à $1/2$, il existe alors une constante C telle que l'on ait

$$\|\nabla u_q\|_{L^\infty_T(L^2)} \leq \|\gamma_q\|_{L^2} + c_q C \Lambda_0 2^{-q(s-1)} (C_u T^{\frac{1}{2}} \|u\|_{T,\frac{d}{2}+\frac{1}{2}} + \Lambda_0) \|u\|_{T,s}.$$

Remarque Dans toute la suite de ce texte, c_q désignera, comme dans la proposition ci-dessus, le terme général d'une série positive sur $\mathbf{Z}$ dont la somme vaut 1, cette série ne dépendant que de la fonction u sur l'intervalle $[0,T]$. En fait, la série $(c_q)_{q\in\mathbf{Z}}$ sera toujours du type

$$c_q = \frac{1}{\|u\|_{T,s}} 2^{qs} \|\Delta_q u\|_{L^\infty_T(L^2)}.$$

3 Paralinéarisation et microlocalisation de l'équation (E)

Nous allons maintenant nous concentrer sur les hautes fréquences, c'est-à-dire sur les fonctions u_q pour $2^q T \geq \Lambda_0^2$.

La première étape consiste à démontrer le lemme suivant.

Lemme 3.1 *Soit s un réel strictement supérieur à 1, il existe une constante C vérifiant la propriété suivante. Si u est une solution régulière de (E), alors u_q est une solution de*

$$(EP_q)\begin{cases} \partial_t^2 u_q - \Delta u_q - \partial\cdot(S_q(G(u))\cdot\partial u_q) &= \widetilde{R}_q(u)\\ \nabla u_{q|t=0} &= \gamma_q, \end{cases}$$

l'opérateur $\widetilde{R}_q$ vérifiant les propriétés suivantes.

Pour tout réel s strictement supérieur à 1, il existe une constante C telle que, pour toute fonction u, il existe une suite $(c_q)_{q\in\mathbf{Z}}$ telle que, pour tout sous-intervalle I de $[0,T]$, on ait,

$$\|\widetilde{R}_q(u)\|_{L^1_I(L^2)} \leq c_q C_u |I|^{\frac12} 2^{-q(s-1)}\|u\|_{T,s}\|\nabla u\|_{L^2_I(L^\infty)} \quad et \quad \sum_q c_q = 1. \tag{9}$$

La démonstration de ce lemme est une application de la version du calcul paradifférentiel de J.-M. Bony (voir [2]) construite par P. Gérard et J. Rauch dans [4], démonstration que nous omettons. De ce lemme le corollaire suivant.

Corollaire 3.1 *Il existe un réel C_K (ne dépendant que du compact K défini ci-dessus) tel que si*

$$\Lambda_0^2 + \left(\Lambda_0 + \frac{1}{\Lambda_0}\right) C_u T^{\frac12}\|u\|_{T,\frac d2+\frac12} + C_u T^{\frac12}\|\nabla u\|_{L^2_T(L^\infty)} \leq \frac{1}{C_K} \tag{10}$$

et si s est un réel de l'intervalle $\left]1, \frac d2 + 1\right[$, il existe un constante C telle que l'on ait

$$\|u\|_{T,s} \leq C\|\gamma\|_s.$$

La condition (10) et l'hypothèse $2^q T \geq \Lambda_0^2$ permettent de démontrer ce corollaire par estimation d'énergie dans l'équation (EP_q).

Le point clef est la majoration du terme $\|\nabla u_q\|_{L^2_T(L^\infty)}$ en grandes fréquences, c'est-à-dire lorsque $2^q T \geq \Lambda_0^2$. Il faut microlocaliser le lemme 3.1, c'est-à-dire travailler sur un intervalle de temps dont la longueur est ajustée à la taille de la fréquence où l'on travaille, ici 2^q.

Lemme 3.2 *Il existe une constante C vérifiant les proriétés suivantes. Si u est une solution régulière de l'équation (E), si $2^q T \geq \Lambda_0^2$, si N_0 est un entier positif et si $I_q \overset{\text{déf}}{=} [t_q^-, t_q^+]$ est un intervalle de longueur inférieure ou égale à $T(2^q T)^{-\frac12}$, alors u_q est solution de l'équation*

$$(EPM_q)\begin{cases} \partial_t^2 u_q - \Delta u_q - \partial\cdot(S_q^T(G(u(t_q^-)))\cdot\partial u_q) &= R_q(u)\\ \nabla u_{q|t=0} &= \gamma_q \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} S_q^T b &\overset{\text{déf}}{=} S_{\frac q2 - \log_2 T - N_0} b \quad et\\ \|R_q(u)\|_{L^1_{I_q}(L^2)} &\leq c_q C 2^{N_0}\left(1+\frac{1}{\Lambda_0}\right) T^{\frac12} 2^{-q(s-1)}(2^q T)^{\frac14}\|u\|_{T,s}\|\nabla u\|_{L^2_{I_q}(L^\infty)}. \end{aligned}$$

L'idée de tronquer les fréquences de $G(u)$ jusqu'à des fréquences de type $2^{q/2}$ se trouve un article de G. Lebeau sur l'équations des ondes, voir [9]. Pour démontrer ce lemme, on part du lemme 3.1 et l'on écrit que

$$
\begin{aligned}
\square_u^q u_q &\stackrel{\text{déf}}{=} \partial_t^2 u_q - \Delta u_q - \sum_{1\leq j,k\leq d} \partial_j (S_q^T g^{j,k}(t_q^-,\cdot)\partial_k u_q)\\
&= \widetilde{R}_q(u) + \widetilde{R}_{q,T}^{(1)}(u) + \widetilde{R}_{q,T}^{(2)}(u) \quad \text{avec}\\
\widetilde{R}_{q,T}^{(1)}(u) &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{1\leq j,k\leq d} \partial_j\Big((S_q^T g^{j,k}(t,\cdot) - S_q^T g^{j,k}(t_q^-,\cdot))\partial_k u_q\Big) \quad \text{et}\\
\widetilde{R}_{q,T}^{(2)}(u) &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{1\leq j,k\leq d} \partial_j\Big((S_q g^{j,k}(t,\cdot) - S_q^T g^{j,k}(t,\cdot))\partial_k u_q\Big).
\end{aligned}
$$

Majorons $\widetilde{R}_{q,T}^{(1)}(u)$. On a

$$
\begin{aligned}
\|S_q^T g^{j,k}(t,\cdot) - S_q^T g^{j,k}(t_q^-,\cdot)\|_{L^\infty} &\leq \int_{t_q^-}^t \|\partial_t S_q^T G^{j,k}(u)\|_{L^\infty} dt'\\
&\leq C|I_q|^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2_{I_q}(L^\infty)}.
\end{aligned}
$$

Par intégration, on en déduit que

$$
\|\widetilde{R}_{q,T}^{(1)}(u)\|_{L^1_{I_q}(L^2)} \leq |I_q|^{\frac{3}{2}} \|\nabla u\|_{L^2_{I_q}(L^\infty)} \|\nabla u_q\|_{L^\infty_T(L^2)}.
$$

Comme $|I_q| \leq T(2^q T)^{-\frac{1}{2}}$, on a

$$
\|\widetilde{R}_{q,T}^{(1)}(u)\|_{L^1_{I_q}(L^2)} \leq T^{\frac{1}{2}} (2^q T)^{\frac{1}{4}} \|\nabla u\|_{L^2_{I_q}(L^\infty)} \|\nabla u_q\|_{L^\infty_T(L^2)}.
$$

D'où l'inégalité

$$
\|\widetilde{R}_{q,T}^{(1)}(u)\|_{L^1_{I_q}(L^2)} \leq c_q C 2^{-q(s-1)} T^{\frac{1}{2}} (2^q T)^{\frac{1}{4}} \|\nabla u\|_{L^2_{I_q}(L^\infty)} \|u\|_{T,s}. \tag{11}
$$

Majorons $\widetilde{R}_{q,T}^{(2)}(u)$. On peut écrire

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{R}_{q,T}^{(2)}(u)(t)\|_{L^2} &\leq 2^q \|\nabla u_q\|_{L^\infty_T(L^2)} \sum_{p\geq \frac{q}{2} - \log_2 T - N_0} \|\Delta_p G(u)(t)\|_{L^\infty}\\
&\leq C 2^q \|\nabla u_q\|_{L^\infty_T(L^2)} \|\nabla u(t)\|_{L^\infty} \sum_{p\geq \frac{q}{2} - \log_2 T - N_0} 2^{-p}\\
&\leq C 2^{N_0} (2^q (2^q T)^{-\frac{1}{2}})^{-1} 2^q \|\nabla u_q\|_{L^\infty_T(L^2)} \|\nabla u(t)\|_{L^\infty}.
\end{aligned}
$$

D'où par intégration en temps et en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{R}_{q,T}^{(2)}(u)\|_{L^1_{I_q}(L^2)} &\leq |I_q|^{\frac{1}{2}} C 2^{N_0} 2^q (2^q (2^q T)^{-\frac{1}{2}})^{-1} \|\nabla u\|_{L^2_{I_q}(L^\infty)} 2^q \|\nabla u_q\|_{L^\infty_T(L^2)}\\
&\leq C 2^{N_0} T^{\frac{1}{2}} (2^q T)^{\frac{1}{4}} \|\nabla u\|_{L^2_{I_q}(L^\infty)} \|\nabla u_q\|_{L^\infty_T(L^2)}\\
&\leq c_q C 2^{N_0} 2^{-q(s-1)} (2^q T)^{\frac{1}{4}} T^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2_{I_q}(L^\infty)} \|u\|_{T,s}.
\end{aligned}
$$

Jointe à l'inégalité (11), ceci démontre le lemme 3.2.

4 L'estimation de Strichartz microlocale et le recollement des estimations.

L'objet de la section 5 est la démonstration du théorème suivant, que nous admettrons momentanemment

Théorème 4.1 *Il existe une constante C (ne dépendant que de la norme L^∞ de G) telle que, si N_0 est assez grand et si v_q est, sur $I_q \stackrel{\text{déf}}{=} [t_q^-, t_q^+]$, I_q étant de longueur inférieur ou égale à $T(2^qT)^{-\frac{1}{2}}$, une solution de*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t^2 v_q - \Delta v_q - \partial\widetilde{\varphi}(2^{-q}D)\cdot(S_q^T(G(u(t_q^-,\cdot)))\cdot\widetilde{\varphi}(2^{-q}D)\partial v_q) & = & F_q \\ \nabla v_{q|t=t_q^-} & = & \gamma_q, \end{array}\right.$$

on ait les estimations suivantes:

$$\begin{array}{rcll} \|\nabla v_q\|_{L^2_{I_q}(L^\infty)} & \leq & C2^{q\frac{d-1}{2}}(\|\gamma_q\|_{L^2} + \|F_q\|_{L^1_{I_q}(L^2)}) & \text{si} \quad d\geq 4, \\ \|\nabla v_q\|_{L^2_{I_q}(L^\infty)} & \leq & C_\epsilon 2^{q+\epsilon}(\|\gamma_q\|_{L^2} + \|F_q\|_{L^1_{I_q}(L^2)}) & \text{si} \quad d=3 \quad \text{et} \\ \|\nabla v_q\|_{L^4_{I_q}(L^\infty)} & \leq & C2^{q\frac{3}{4}}(\|\gamma_q\|_{L^2} + \|F_q\|_{L^1_{I_q}(L^2)}) & \text{si} \quad d=2. \end{array}$$

Ce théorème doit être compris comme une estimation de Strichartz microlocale, c'est-à-dire sur une estimation de Strichartz valable pour des fonctions ayant des fréquences de taille fixée 2^q, et sur un intervalle de temps dont la longueur est inversement proportionnelle à la racine carrée de la taille de la fréquence.

Nous allons admettre momentanément ce théorème. L'objet de la présente section est de déduire de ce théorème l'inégalité (2), c'est-à-dire de recoller les estimations ci-dessus. Il s'agit essentiellement de démontrer la proposition suivante.

Proposition 4.1 *Si la condition (10) est satisfaite, alors on a, pour $2^qT \geq \Lambda_0^2$, les estimations qui suivent. Si $d \geq 4$,*

$$\|\nabla u_q\|_{L^2_T(L^\infty)} \leq c_q T^{\frac{1}{4}}\|u\|_{T,\frac{d}{2}+\frac{3}{4}}(\Lambda_0^{-\frac{1}{2}} + T^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{L^2_T(L^\infty)}).$$

Si d=3, pour tout $\epsilon > 0$, il existe C_ϵ tel que

$$\|\nabla u_q\|_{L^2_T(L^\infty)} \leq c_q T^{\frac{1}{4}+\epsilon}\|u\|_{T,\frac{d}{2}+\frac{3}{4}+\epsilon}(\Lambda_0^{-\frac{1}{2}} + T^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{L^2_T(L^\infty)}).$$

Enfin, si $d = 2$, on a

$$\|\nabla u_q\|_{L^2_T(L^\infty)} \leq c_q T^{\frac{3}{8}}\|u\|_{T,\frac{15}{8}}(\Lambda_0^{-\frac{1}{2}} + T^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{L^2_T(L^\infty)}).$$

Ces estimations sot des estimations de type Strichartz (voir par exemple [5]) pour des operateurs à coefficients non seulement variables comme dans [6], mais aussi très peu réguliers, c'est-à-dire dont la gradient est L^2 en temps à valeurs L^∞.

Commençons par faire la démonstration pour $d \geq 4$. L'application conjointe du lemme 3.2 et du théorème 4.1 implique que, pour tout intervalle I_q inclus dans $[0, T]$ et de longueur plus petite que $T(2^qT)^{-\frac{1}{2}}$, on a

$$\|\nabla u_q\|_{L^2_{I_q}(L^\infty)} \leq C\Big(2^{q\frac{d-1}{2}}\|\gamma_q\|_{L^2} + c_q T^{\frac{3}{4}} 2^{-q\left(s-1-\frac{1}{4}-\frac{d}{2}+\frac{1}{2}\right)}\|u\|_{T,s}\|\nabla u\|_{L^2_{I_q}(L^\infty)}\Big).$$

D'où en posant $s = \dfrac{d}{2} + \dfrac{3}{4}$ dans l'inégalité ci-dessus, il vient, après élévation au carré,

$$\|\nabla u_q\|^2_{L^2_{I_q}(L^\infty)} \leq C 2^{q(d-1)} \|\gamma_q\|^2_{L^2} + c_q^2 C T^{\frac{3}{2}} \|u\|^2_{T,\frac{d}{2}+\frac{3}{4}} \|\nabla u\|^2_{L^2_{I_q}(L^\infty)}. \tag{12}$$

Comme $2^q T \geq \Lambda_0^2$, on peut découper l'intervalle $[0,T]$ en une partition $\mathcal{I}$ d'au plus $[2(2^q T)^{\frac{1}{2}} \Lambda_0^{-1}]$ intervalles I_q de longueur plus petite que $T(2^q T)^{-\frac{1}{2}}$. L'inégalité (12) ci-dessus permet d'écrire que

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_q\|^2_{L^2_T(L^\infty)} &= \sum_{I_q \in \mathcal{I}} \|\nabla u_q\|^2_{L^2_{I_q}(L^\infty)} \\
&\leq \sum_{I_q \in \mathcal{I}} \left\{ C 2^{q(d-1)} \|\gamma_q\|^2_{L^2} + c_q^2 C T^{\frac{3}{2}} \|u\|^2_{T,\frac{d}{2}+\frac{3}{4}} \|\nabla u\|^2_{L^2_{I_q}(L^\infty)} \right\}
\end{aligned}$$

Les intervalles I_q étant disjoints, on a

$$\sum_{I_q \in \mathcal{I}} \|\nabla u\|^2_{L^2_{I_q}(L^\infty)} = \|\nabla u\|^2_{L^2_T(L^\infty)}.$$

Comme les éléments de la partition $\mathcal{I}$ sont en nombre au plus $(2^q T)^{\frac{1}{2}} \Lambda_0^{-1}$, il vient

$$\sum_{I_q \in \mathcal{I}} 2^{q(d-1)} \|\gamma_q\|^2_{L^2} \leq \frac{T^{\frac{1}{2}}}{\Lambda_0} 2^{q\left(d-1+\frac{1}{2}\right)} \|\gamma_q\|^2_{L^2}.$$

D'où il résulte que

$$\|\nabla u_q\|^2_{L^2_T(L^\infty)} \leq \frac{C}{\Lambda_0} 2^{q\left(d-1+\frac{1}{2}\right)} T^{\frac{1}{2}} \|\gamma_q\|^2_{L^2} + c_q^2 C T^{\frac{3}{2}} \|u\|^2_{T,\frac{d}{2}+\frac{3}{4}} \|\nabla u\|^2_{L^2_T(L^\infty)}.$$

d'où la proposition lorsque $d \geq 4$. Les cas $d = 3$ ou $d = 2$ se traitent de manière analogue.

La démonstration de l'inégalité (2) est maintenant assez classique. On choisit Λ_0 assez petit pour que l'on ait $\Lambda_0^2 \leq (2C_K)^{-1}$. Tant que l'inégalité (10) est satisfaite, on a, en appliquant le corrolaire 3.1 avec $s = \dfrac{d}{2}$,

$$\|u\|_{T,\frac{d}{2}} \leq C \|\gamma\|_{\frac{d}{2}}.$$

Mais, comme le support de la transformée de Fourier de u_q est inclus dans la couronne $2^q \mathcal{C}$, on sait que

$$\begin{aligned}
\|u_q\|_{L^\infty_T(L^\infty)} &\leq 2^{-q} \|\nabla u_q\|_{L^\infty_T(L^\infty)} \\
&\leq 2^{q\left(\frac{d}{2}-1\right)} \|\nabla u_q\|_{L^\infty_T(L^2)} \\
&\leq c_q \|u\|_{T,\frac{d}{2}}.
\end{aligned}$$

Donc, tant que la condition (10) est vérifiée, on a

$$C_u \leq C \|\gamma\|_{\frac{d}{2}} (1 + \|\gamma\|_{\frac{d}{2}})^{[s]+1} \stackrel{\text{déf}}{=} C_\gamma.$$

Mais alors, tant que

$$\Lambda_0^2 + C_\gamma \left(\Lambda_0 + \frac{1}{\Lambda_0} \right) T^{\frac{1}{2}} \|u\|_{T,\frac{d}{2}+\frac{1}{2}} + T^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{L^2_T(L^\infty)} \leq \frac{1}{C_K},$$

on a

$$\|u\|_{T,\frac{d}{2}+\frac{1}{2}} \leq C \|\gamma\|_{\frac{d}{2}+\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|u\|_{T,\frac{d}{2}+\frac{3}{4}} \leq C \|\gamma\|_{\frac{d}{2}+\frac{3}{4}}$$

D'où l'inégalité (2).

5 Démonstration de l'inégalité de Strichartz microlocale.

Dans toute la suite, on considère une famille $\mathcal{G} = (g_\Lambda)_{\Lambda \geq \Lambda_0}$ telle que la fonction g_Λ soit indéfiniment différentiable sur $\mathbf{R}^d$ à valeurs dans K et telle que, pour tout $k \geq 0$ les quantités $\|\mathcal{G}\|_k$ définies par

$$\|\mathcal{G}\|_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\Lambda \geq \Lambda_0} \|g_\Lambda\|_{L^\infty} \quad \text{et} \quad \|\mathcal{G}\|_k \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\Lambda \geq \Lambda_0} \Lambda^k \|\partial^k g_\Lambda\|_{L^\infty}$$

soient finies. On désigne alors par P_Λ l'opérateur défini par

$$P_\Lambda v \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_t^2 v - \Delta v - \widetilde{\varphi}(D) \sum_{j,k} \partial_j (g_\Lambda^{j,k} \widetilde{\varphi}(D) \partial_k v),$$

où $\widetilde{\varphi}$ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathcal{C})$.

Remarque Lorsque $g_\Lambda(y) = (\chi(2^{-q}\Lambda 2^{N_0} D)G)(2^{-q}y)$, ce qui est exactement le cas qui nous préoccupe ici, on a bien sûr

$$\|g_\Lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R}^{1+d})} \leq C\|G\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}. \tag{13}$$

De plus, d'après les inégalités de Bernstein, on a

$$\begin{aligned} \|\partial^2 g_\Lambda\|_{L^\infty} &\leq 2^{-2q} \|\partial^2 \chi(2^{-q}\Lambda 2^{N_0} D) g_\Lambda\|_{L^\infty} \\ &\leq \Lambda^{-2} 2^{-2N_0} \|G\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\|\mathcal{G}\|_0^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{G}\|_2^{\frac{1}{2}} \leq \|G\|_{L^\infty} 2^{-N_0}. \tag{14}$$

Pour les applications que nous avons en vue ici, on doit penser que $\Lambda = (2^q T)^{\frac{1}{2}}$. Par le changement de variable $(\tau, y) = 2^q(t, x)$, le théorème suivant implique immédiatement le théorème 4.1.

Théorème 5.1 *Si $\|\mathcal{G}\|_0 \|\mathcal{G}\|_2$ est assez petit, il existe une constante C ne dépendant que d'un nombre fini de $\|\mathcal{G}\|_j$ telle que l'on ait les inégalités suivantes, où v_Λ désigne une solution de*

$$(E_\Lambda) \left\{ \begin{array}{rcl} P_\Lambda v_\Lambda &=& f_\Lambda \\ \nabla v_{\Lambda|t=0} &=& \gamma_\Lambda. \end{array} \right.$$

où γ_Λ et f_Λ ont des transformées de Fourier supportées dans $\mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} \|\nabla v_\Lambda\|_{L^2_\Lambda(L^\infty)} &\leq C(\|\gamma_\Lambda\|_{L^2} + \|f_\Lambda\|_{L^1_\Lambda(L^2)}) \quad \text{si} \quad d \geq 4 \\ \|\nabla v_\Lambda\|_{L^2_\Lambda(L^\infty)} &\leq C_\epsilon \Lambda^\epsilon (\|\gamma_\Lambda\|_{L^2} + \|f_\Lambda\|_{L^1_\Lambda(L^2)}) \quad \text{si} \quad d = 3 \\ \|\nabla v_\Lambda\|_{L^4_\Lambda(L^\infty)} &\leq C(\|\gamma_\Lambda\|_{L^2} + \|f_\Lambda\|_{L^1_\Lambda(L^2)}) \quad \text{si} \quad d = 2 \end{aligned}$$

Pour démontrer ce théorème, on construit une paramétrice approchée pour le problème de Cauchy suivant la méthode d'Hadamard. La construction ne pourra fonctionner que sur l'intervalle $I_\Lambda \stackrel{\text{déf}}{=} [0, \Lambda]$.

Nous suivons la méthode classique en commençant par résoudre l'équation eikonale sur l'intervalle I_Λ.

Théorème 5.2 *Soit F une fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^N)$ à valeurs réelles; pour tout réel strictement positif ϵ, il existe un réel strictement positif α tel que, si $\|\mathcal{G}\|_0\|\mathcal{G}\|_2 \leq \alpha$, alors, pour tout $\Lambda \geq \Lambda_0$, pour tout $\eta \in \mathcal{C}$, il existe alors une solution Φ_Λ de l'équation*

$$(\widetilde{HJ_\Lambda}) \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_\tau \Phi_\Lambda & = & F(\partial_x \Phi_\Lambda, g_\Lambda) \\ \Phi_\Lambda(0,y,\eta) & = & (y|\eta). \end{array} \right.$$

Cette solution est définie et indéfiniment différentiable sur $I_\Lambda \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{C}$. De plus, la famille définie par $\Phi \stackrel{\text{déf}}{=} (\Phi_\Lambda)_{\Lambda \geq \Lambda_0}$ satisfait les propriétés suivantes:

- *Pour tout $(\tau, y, \eta) \in I_\Lambda \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{C}$, on a*

$$\frac{1}{2C_1} \leq |\partial_y \Phi_\Lambda(\tau, y, \eta)| \leq 2C_1. \tag{15}$$

- *Pour tout couple d'entiers (k, ℓ), il existe une constante C_ℓ telle que*

$$\sup_{\Lambda \geq \Lambda_0} \|\partial_\eta^\ell \nabla \Phi_\Lambda\|_{L^\infty(I_\Lambda \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{C})} < \infty, \tag{16}$$

$$\sup_{\Lambda \geq \Lambda_0} \Lambda \|\nabla^2 \Phi_\Lambda\|_{L^\infty(I_\Lambda \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{C})} \leq \epsilon \quad \text{et} \tag{17}$$

$$\sup_{\Lambda \geq \Lambda_0} \Lambda^k \|\partial_\eta^\ell \nabla^{1+k} \Phi_\Lambda\|_{L^\infty(I_\Lambda \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{C})} < \infty. \tag{18}$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit de contrôler, sur l'intervalle I_Λ, les dérivées secondes. Soit C_Φ une constante à choisir; désignons par τ_Λ le temps maximal d'existence de la solution de $(\widetilde{HJ_\Lambda})$ et définissons alors τ'_Λ la borne supérieure des temps τ inférieurs à $\min\{\tau_\Lambda, \Lambda\}$ tel que, pour tout $\tau' \leq \tau'_\Lambda$, on ait

$$\|\partial_y^2 \Phi_\Lambda\|_{L^\infty([0,\tau'] \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{C})} \leq C_\Phi \Lambda^{-1}. \tag{19}$$

En différentiant deux fois l'équation, il est facile de voir que l'on a, pour tout j et k compris entre 1 et d,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_\tau \partial_j \partial_k \Phi_\Lambda + Z_\Lambda(\tau, y, D) \partial_j \partial_k \Phi_\Lambda & = & R_{j,k,\Lambda} \\ \partial_j \partial_k \Phi_\Lambda(0, y, \eta) & = & 0 \end{array} \right. \tag{20}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} Z_\Lambda(\tau, y, D) & \stackrel{\text{déf}}{=} & -\displaystyle\sum_1^d \partial_{p_\ell} F \frac{\partial}{\partial_{y_\ell}} \quad \text{et} \\ R_{j,k,\Lambda} & \leq & C_\Phi \Lambda^{-1} C_F \|\mathcal{G}\|_0^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{G}\|_2^{\frac{1}{2}}. \end{array}$$

En utilisant que $\|\mathcal{G}\|_1 \leq C\|\mathcal{G}\|_0^{\frac{1}{2}}\|\mathcal{G}\|_2^{\frac{1}{2}}$ et en choisissant $C_\Phi = \|\mathcal{G}\|_0^{\frac{1}{2}}\|\mathcal{G}\|_2^{\frac{1}{2}}$, on trouve que

$$\Big\| \sum_{j=1}^4 R_{j,k,\Lambda}^{(i)} \Big\|_{L^1_{\tau'_\Lambda}(L^\infty)} \leq C_\Phi \Lambda^{-1} C_F \|\mathcal{G}\|_0^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{G}\|_2^{\frac{1}{2}}.$$

Pour démontrer (15), il suffit d'observer que, pour tout $(\tau, y, \eta) \in I_\Lambda \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{C}$, on a

$$\begin{array}{rcl} |\partial_y \Phi_\Lambda(\tau) - \eta| & \leq & \Lambda \|\nabla^2 \Phi_\Lambda\|_{L^\infty} \\ & \leq & \|\mathcal{G}\|_0^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{G}\|_2^{\frac{1}{2}}. \end{array}$$

D'où les estimations (15)–(17), car, pour les dérivées en η, il suffit de différentier l'équation $(\widetilde{HJ_\Lambda})$ par rapport à η.

Pour démontrer l'inégalité (18), il suffit de dériver l'équation.

Il s'agit maintenant de résoudre les équations de transport. Une approximation "hautes fréquences, c'est-à-dire "Λ grand", des solutions de l'équation (E_Λ) nécessite la définition de classes de symboles.

Définition 5.1 *On désigne par S^{-N} l'ensemble des familles de fonctions $\sigma = (\sigma_\Lambda)_{\Lambda\geq\Lambda_0}$ telles que*

- *la fonction σ_Λ est indéfiniment différentiable de $I_\lambda \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{C}$ dans $\mathbf{C}$;*
- *pour tout entier k, la quantité définie par*

$$q_k^{(N)}(\sigma) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{j+j'\leq k \\ \Lambda\geq\Lambda_0}} \Lambda^{N+j} \|\partial_\eta^{j'} \nabla^j \sigma_\Lambda\|_{L^\infty(I_\Lambda\times\mathbf{R}^d\times\mathcal{C})}$$

  est finie.
- *On appelle symbole d'ordre $-N$ un élément de S^{-N}.*

Remarques Les quantités ci-dessus définies sont des semi-normes qui munissent S^{-N} d'une structure d'espace de Fréchet. De plus, il est clair que l'opérateur ∇^k envoie continûment S^{-N} dans S^{-N-k}, le produit numérique envoie continûment $S^{-N_1} \times S^{-N_2}$ dans $S^{-N_1-N_2}$ et si ϕ est une fonction de $\mathcal{S}$, alors $\phi(D)$ envoie continûment S^{-N} dans S^{-N}. Enfin, si F est une fonction de $\mathcal{D}$ et si $\sigma \in S^0$, alors $f\circ\sigma \stackrel{\text{déf}}{=} (f(\sigma_\Lambda))_{\Lambda\geq\Lambda_0} \in S^0$ et

$$\forall k\,,\ \exists C \,/\, q_k^{(0)}(f\circ\sigma) \leq C q_k^{(0)}(\sigma).$$

Les inégalités (18) se traduisent par l'appartenance de la famille $(\nabla\Phi_\Lambda)_{\Lambda\geq\Lambda_0}$ à S^0.

Dans toute la suite, on désignera par $\Phi_\Lambda^\pm$ les fonctions solutions de l'équation (HJ_Λ)

$$(HJ_\Lambda)\left\{\begin{array}{rcl} \partial_\tau\Phi_\Lambda^\pm &=& \pm\left((\partial\Phi_\Lambda^\pm)^2 + \widetilde{\varphi}^2(\partial\Phi_\Lambda)\displaystyle\sum_{1\leq j,k\leq d} g_\Lambda^{j,k}\partial_j\Phi_\Lambda^\pm\partial_k\Phi_\Lambda^\pm\right)^{\frac{1}{2}} \\ \Phi_\Lambda^\pm(0,y,\eta) &=& (y|\eta). \end{array}\right. \tag{21}$$

Il s'agit maintenant de démontrer le résultat d'approximation suivant.

Proposition 5.1 *On considère $(v_\Lambda)_{\Lambda\geq\Lambda_0}$ la famille de fonctions telles que v_Λ soit solution de E_Λ avec $f_\Lambda = 0$. On suppose que $\|\mathcal{G}\|_0\|\mathcal{G}\|_2$ est assez petit (au sens du théorème 5.2). Pour tout entier N, il existe alors deux symboles $\sigma^\pm$, une constante C_N et une suite $(C_{N,k})_{k\in\mathbf{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes.*

Pour tout entier k, il existe un entier ℓ tel que

$$q_k^{(0)}(\sigma) \leq C_{N,k} \sup_{m\leq\ell} \|\mathcal{G}\|_m. \tag{22}$$

De plus, si l'on pose

$$\mathcal{I}_\Lambda^\pm(\gamma) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}^d} e^{i\Phi_\Lambda(\tau,y,\eta)}\sigma_\Lambda^\pm(\tau,y,\eta)\cdot\widehat{\gamma}(\eta)d\eta, \tag{23}$$

alors, on a

$$\|v_\Lambda - \mathcal{I}_\Lambda^+(\gamma_\Lambda) - \mathcal{I}_\Lambda^-(\gamma_\Lambda)\|_{L_\Lambda^\infty(L^\infty)} \leq C_N \sup_{m\leq\ell}\|\mathcal{G}\|_m \Lambda^{-N}\|\gamma_\Lambda\|_{L^1}. \tag{24}$$

Pour ce faire, le lemme clef est le suivant, qui décrit en fait l'action de l'opérateur P_Λ sur $\mathcal{I}^{\pm}_{\Lambda}$. Sa démonstration est analogue à la démonstration classique dans le cadre de l'optique géométrique telle que l'on peut lire lire dans le livre de M. Taylor (voir [13]); aussi l'omettrons nous.

Lemme 5.1 *Il existe des opérateurs $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$ opérant sur les classes de symboles ($\mathcal{L}$ étant à valeurs dans les familles de fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}^{1+d}$) et vérifiant les propriétés suivantes.*

- *Pour tout entier N, l'opérateur $\mathcal{R}$ est continu de S^{-N} dans S^{-N-2}.*
- *Pour tout couple d'entiers (N,k), il existe une constante C et un entier ℓ tels que si $\Phi = (\Phi_\Lambda)_{\Lambda\geq\Lambda_0}$ est une famille de fonctions réelles sur $I_\Lambda \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{C}$ telle que la famille $\nabla\Phi \stackrel{\text{déf}}{=} (\nabla\Phi_\Lambda)_{\Lambda\geq\Lambda_0}$ appartienne à S^0. Alors, on a*
$$q_k^{(0)}(\mathcal{L}(\Phi)) + q_k^{(-1)}(\mathcal{A}(\Phi)) \leq C q_\ell^{(0)}(\nabla\Phi). \tag{25}$$
- *Il existe une constante strictement positive c telle que la première composante de $\mathcal{L}$ vérifie*
$$\forall\Lambda \geq \Lambda_0\,,\ \forall(\tau,y,\eta)\in I_\Lambda\times\mathbf{R}^d\times\mathcal{C}\,,\ |\mathcal{L}_\Lambda(\tau,y,\eta)|\geq c. \tag{26}$$
- *Enfin, si, pour tout Λ, la fonction Φ_Λ est solution de (HJ_Λ) sur $I_\Lambda\times\mathbf{R}^d\times\mathcal{C}$, alors, pour tout $\sigma\in S^{-N}$, pour tout $\Lambda\geq\Lambda_0$, on a*
$$e^{-i\Phi_\Lambda}P_\Lambda(e^{i\Phi_\Lambda}\sigma_\Lambda) = \mathcal{L}_\Lambda\cdot\nabla\sigma_\Lambda + \mathcal{A}_\Lambda\sigma_\Lambda + \mathcal{R}(\sigma)_\Lambda. \tag{27}$$

Le lemme suivant, admis car de démonstration très facile, décrit le résultat de résolution pour les équations de transport.

Lemme 5.2 *Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$ les opérateurs du lemme 5.1. Soit ρ un élément de S^{-N-1}, on considère σ_Λ la solution du problème linéaire*
$$(T_\Lambda)\left\{\begin{array}{rcl}\mathcal{L}_\Lambda\cdot\nabla\sigma_\Lambda + \mathcal{A}_\Lambda\sigma_\Lambda &=& \rho_\Lambda\\ \sigma_{\Lambda|\tau=0} &=& \sigma_\Lambda^{(0)}\end{array}\right.$$
avec $(\sigma_\Lambda^{(0)})_{\Lambda\geq\Lambda_0}$ dans S^{-N}. Alors la famille $(\sigma_\Lambda)_{\Lambda\geq\Lambda_0}$ appartient à S^{-N} et pour tout entier k, il existe une constante C telle que
$$q_k^{(N+1)}(\sigma)\leq C(q_k^{(N)}(\sigma^{(0)}) + q_k^{(N+1)}(\rho)). \tag{28}$$

Concluons la démonstration de la proposition 5.1. On suit la méthode classiques de résolution des équations de transport. Définissons par récurrence une suite de symboles $(\sigma_n^{\pm})_{n\in\mathbf{N}}$ de la manière suivante.

Soient $\sigma_0^{\pm}$ les deux symboles définis par
$$(T_\Lambda)\left\{\begin{array}{rcl}\mathcal{L}_\Lambda\cdot\nabla\sigma_\Lambda^{\pm} + \mathcal{A}_\Lambda\sigma_\Lambda^{\pm} &=& 0\\ \sigma^{\pm}_{\Lambda\,|\tau=0} &=& \sigma_{0,\Lambda}^{\pm,i}\end{array}\right.$$
avec
$$\sigma_{0,\Lambda}^{\pm,i} = 1 \quad\text{si}\quad \partial_\tau v_{\Lambda|\tau=0} = 0 \quad\text{et}\quad \sigma_{0,\Lambda}^{\pm,i} = \pm\frac{1}{2i(|\eta|^2 + g_\Lambda(0,y)(\eta,\eta))^{\frac12}} \quad\text{si}\quad v_{\Lambda|\tau=0} = 0. \tag{29}$$

D'après le lemme 5.2, on sait que $\sigma_0^\pm \in S^0$. Supposons l'exisntence de $\sigma_0, \ldots, \sigma_n^\pm$ tels que, pour tout $j \leq n$, on ait $\sigma_j^\pm \in S^{-j}$ et pour tout $k \in N$, il existe $C_{k,j}$ et N_k tel que

$$\begin{aligned} q_k^{(j)}(\sigma_j) &\leq C_{k,j}(1 + q_k(\nabla\Phi))^k \quad \text{et} \\ q_k^{(n+1)}(R_{n+1}^\pm) &\leq C_{k,j}(1 + q_k(\nabla\Phi))^k \quad \text{avec} \\ R_{n+1,\Lambda}^\pm &\stackrel{\text{déf}}{=} e^{i\Phi_\Lambda} P_\Lambda\Big(\sum_{j=0}^n \sigma_{j,\Lambda}^\pm\Big) \end{aligned}$$

Considérons maintenant les deux symboles $\sigma_{n+1}^\pm$ définis par

$$(T_\Lambda)\begin{cases} \mathcal{L}_\Lambda \cdot \nabla\sigma_{n+1,\Lambda}^\pm + \mathcal{A}_{n+1,\Lambda}\sigma_{n+1,\Lambda}^\pm = -R_{n+1,\Lambda}^\pm \\ \sigma_{n+1,\Lambda|\tau=0}^\pm = 0 \end{cases}$$

D'après les lemme 5.1 et 5.2, on a les estimations ci-dessus au cran $n+1$. Ainsi donc, il existe une suite $(\sigma_n^\pm)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que l'on ait, pour tout k et tout n l'existence d'une constante $C_{k,n}$ telle que

$$q_k^{(j)}(\sigma_j) \leq C_{k,j}(1 + q_k(\nabla\Phi))^k \quad \text{et} \tag{30}$$

$$q_k^{(n+1)}(R_{n+1}^\pm) \leq C_{k,j}(1 + q_k(\nabla\Phi))^k \quad \text{avec} \tag{31}$$

$$R_{n+1,\Lambda}^\pm \stackrel{\text{déf}}{=} e^{i\Phi_\Lambda} P_\Lambda\Big(\sum_{j=0}^n \sigma_{j,\Lambda}^\pm\Big) \tag{32}$$

Il s'agit maintenant de conclure la démonstration du théorème 5.1. En suivant la méthode d'analyse fonctionelle exposée dans l'artice [5] de J. Ginibre et G. Velo, qui est une version de l'argument dit $TT^\star$, il suffit de démontrer que, si v_Λ est une solution de (E_Λ) avec $f_\Lambda = 0$, alors, il existe une constante C ne dépendant que d'un nombre fini de $\|\mathcal{G}\|_j$ tel que

$$\|v_\Lambda(\tau)\|_{L^\infty_\Lambda(L^\infty)} \leq \frac{C}{\tau^{\frac{d-1}{2}}}\|\gamma_\Lambda\|_{L^1}. \tag{33}$$

Comme $\tau \leq \Lambda$, on sait que $\Lambda^{-1} \leq \tau^{-1}$. Donc, d'après la proposition 5.1, on a

$$\|v_\Lambda(\tau) - \mathcal{I}_\Lambda^+(\tau) - \mathcal{I}_\Lambda^-(\tau)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\tau^{\frac{d-1}{2}}}\|\gamma_\Lambda\|_{L^1}.$$

La démonstration du théorème 5.1 se ramène alors à la démonstration de

$$\|\mathcal{I}_\Lambda^\pm(\tau)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\tau^{\frac{d-1}{2}}}\|\gamma_\Lambda\|_{L^1}\,,$$

ce qui résulte d'une méthode de type "phase stationnaire".

Références

[1] H. Bahouri et J.-Y. Chemin, Équations d'ondes quasilinéaires et estimation de Strichartz, *Prépublication du Laboratoire d'Analyse Numérique.*

[2] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Annales de l'École Normale Supérieure*, **14**, 1981, pages 209–246.

[3] J.-Y. Chemin et N. Lerner, Flot de champs de vecteurs non-lipschitziens et équations de Navier-Stokes, *Journal of Differential Equations*, **121**, 1995, pages 314–328.

[4] P. Gérard et J. Rauch, Propagation de la régularité locale de solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires, *Annales de l'Institut Fourier*, **37**, 1987, pages 65–84.

[5] J. Ginibre et G. Velo, Generalized Strichartz inequalities for the wave equation, *Journal of Functional Analysis*, **133**, 1995, page 50–68.

[6] L. Kapitanski, Some generalization of the Strichartz-Brenner inequality, *Leningrad Mathematical Journal*, **1**, 1990, pages 693–721.

[7] S. Klainerman et M. Machedon, Space-time estimates for null forms and the local existence theorem, *Communications in Pure and Applied Mathematics*, **46**, 1993, pages 1221–1268.

[8] S. Klainerman et M. Machedon, Estimates for null forms and the spaces $H_{s,\delta}$, *prépublication.*

[9] G. Lebeau, Singularités de solutions d'équations d'ondes semi-linéaires, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **25**, 1992, pages 201–231.

[10] H. Lindblad, A sharp couternexample to local existence existence of low regularity solutions to non linear wave equations, *Duke Mathematical Journal*, **72**, 1993, pages 503–539.

[11] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs tome 3*, 1991, Herman.

[12] G. Ponce et T. Sideris, Local regularity of non linear wave equations in three space dimensions, *Communications in Partial Differential Equations*, **18**, 1993, pages 169–177.

[13] M. Taylor, *Pseudodifferential operators*, Princeton Mathematical Series, **34**, Princeton University Press, 1981.