SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1997-1998

Luc Robbiano and Claude Zuily

Effet régularisant microlocal analytique pour l'équation de Schrödinger

Séminaire É. D. P. (1997-1998), Exposé n° XIX, 14 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1997-1998____A19_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Effet régularisant microlocal analytique pour l'équation de Schrödinger

Luc Robbiano
Université de Versailles-St Quentin
45, avenue des États-Unis 78035 Versailles

Claude Zuily
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques Bât. 425
91405 Orsay Cedex France

I Introduction et résultat.

L'objet de ce travail est de montrer, dans le cadre analytique et microlocal, comment la régularité d'une solution d'un problème de Cauchy, pour une équation de Schrödinger à coefficients variables, provient du comportement à l'infini de la donnée. Dans le cadre C^∞ il s'agit d'un résultat de W. Craig - T. Kappeler - W. Strauss [CKS] (voir aussi [C]). Des résultats allant dans le même sens ont été obtenus par L. Kapitanski, Y. Safarov [KS], N.A. Shananin [S], S.I. Doi [D1] [D2] et J. Wunsch [W], (voir [CKS] pour une bibliographie exhaustive).

On considèrera ici le cas où la partie principale de l'équation provient d'un Laplacien sur $\mathbb{R}^n$ muni d'une métrique Riemannienne asymptotiquement plate.

Plus précisément soit P un opérateur du second ordre,

$$(I.1) \qquad P = P(y, D_y) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(y) D_j D_k + \sum_{|\beta| \leq 1} a_\beta(y) D_y^\beta \ , \ D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y_j} \ .$$

On supposera que P est à coefficients analytiques sur $\mathbb{R}^n$ et que son symbole principal p est réel.

On supposera ensuite P uniformément elliptique i.e.

$$(I.2) \qquad \exists \nu > 0 \ ; \ p(y, \eta) \geq \nu |\eta|^2 \ , \ \forall (y, \eta) \in T^*\mathbb{R}^n \ ,$$

et de plus

(I.3)
$$\begin{cases} \text{il existe des constantes positives } C_0, K_0, R_0, \sigma_0 \text{ telles que pour } |y| > R_0 \\ \text{et tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \\ \sum_{j,k=1}^{n} |D_y^\alpha (a_{jk}(y) - \delta_{jk})| + \sum_{|\beta| \leq 1} |D_y^\alpha a_\beta(y)| \leq C_0 K_0^{|\alpha|} \alpha! |y|^{-(1+\sigma_0+|\alpha|)}. \end{cases}$$

où δ_{jk} désigne le symbole de Kronecker.

Cette dernière hypothèse traduit le fait que les coefficients de P se prolongent holomorphiquement à l'ouvert de $\mathbb{C}^n$

$$\Omega = \{y \in \mathbb{C}^n : |\mathrm{Re}\ y| > R_0\ , |\mathrm{Im}\ y| < \frac{1}{K_0} |\mathrm{Re}\ y|\}\ .$$

Considérons la bicaractéristique de p issue d'un point $\rho_0 = (y_0, \eta_0) \in T^*\mathbb{R}^n \backslash 0$.

Elle est obtenue à partir des équations

$$\text{(I.4)} \qquad \begin{cases} \dot{y}(s) = \frac{\partial p}{\partial \eta}(y(s), \eta(s)) \\ \\ \dot{\eta}(s) = -\frac{\partial s}{\partial y}(y(s), \eta(s)) \end{cases} \quad (y(0), \eta(0)) = \rho_0$$

Il est facile de voir que, sous les hypothèses (I.2), (I.3), cette bicaractéristique est définie pour tout s réel.

On notera $\gamma_{\rho_0}^-$ (resp. $\gamma_{\rho_0}^+$) la bicaractéristique passée (resp. future)

$$\text{(I.5)} \qquad \gamma_{\rho_0}^- = \{(y(s), \eta(s)) \text{ solution de (I.4) },\ s \in]-\infty, 0]\}$$

(resp. $s \in [0, +\infty[$).

A $\gamma_{\rho_0}^-$ et $\varepsilon_0 > 0$ on associe l'ensemble

$$\text{(I.6)} \qquad \Gamma_{\varepsilon_0} = \bigcup_{s \leq 0} \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y(s)| < \varepsilon_0 (1 + |s|)\}\ .$$

Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $u(t,x)$ une solution appartenant à $C^0([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(]0, +\infty[, H^{-2}(\mathbb{R}^n))$ du problème de Cauchy

$$\text{(I.7)} \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + i\ P(y, D_y) u = 0\ ,\ t > 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

Le résultat principal de ce travail est le

Théorème 1 *Soit P défini en (I.1) vérifiant (I.2), (I.3). Soit $\rho_0 \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ et $\gamma^-_{\rho_0}$ définie en (I.5). Supposons*

$$\lim_{s\to-\infty} |y(s)| = +\infty \tag{I.8}$$

Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et supposons qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ tels que $e^{\delta_0|x|}u_0 \in L^2(\Gamma_{\varepsilon_0})$. Alors, si u désigne la solution de (I.7) on a $\rho_0 \notin WF_a(u(t,.))$ pour tout $t > 0$. Ici WF_a désigne le front d'onde analytique.

Remarques 1.2 :

i) Ce résultat est l'analogue analytique du théorème 1.1. de [CKS] qui concernait le front d'onde C^∞. Il faut alors supposer que $x^\alpha u_0 \in L^2(\Gamma_{\varepsilon_0})$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Cependant, comme nous le verrons, notre méthode de preuve, basée sur une version globale de la théorie de Sjöstrand [Sj] est entièrement différente de la leur.

ii) Dans le cas où la partie principale de P est le Laplacien, toutes les projections des bicaractéristiques vont à l'infini (i.e. vérifient (I.8)). Le théorème affirme alors que pour tout $t > 0$ la fonction $y \mapsto u(t,y)$ est analytique sur $\mathbb{R}^n$, ce qui est un résultat classique.

iii) Dans l'énoncé ci-dessus on peut, sans changer la conclusion, supposer que $e^{\delta_0|x|}u_0 \in \mathcal{S}'(\Gamma_{\varepsilon_0})$ et $u \in C^0([0,+\infty[,\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$.

iv) Les hypothèses (I.2) et (I.3) peuvent être légèrement affaiblies. En effet, on pourrait, à la place de (I.2), supposer qu'il existe j tel que $|\frac{\partial p}{\partial \eta_j}(y,\eta)| \geq C|\eta|$ pour (y,η) dans $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$. D'autre part, on pourrait, au prix de complications techniques supplémentaires, supposer que, pour $|\beta| \leq 1, |D^\alpha_y a_\beta|$ decroit en $|y|^{-(\sigma_0+|\alpha|)}$.

v) Comme il est plus agréable de travailler avec les bicaractéristiques futures, on remarque que l'énoncé ci-dessus est équivalent au même énoncé où $\gamma^-_{\rho_0}$ et $t > 0$ sont remplacés par $\gamma^+_{\rho_0}$ et $t < 0$. Ceci est dû au fait que si u est solution de (I.7) dans $t > 0$, $v(t,y) = \bar{u}(-t,y)$ est solution de la même équation dans $t < 0$, avec donnée $\bar{u}_0$.

Comme nous l'avons dit, notre méthode de preuve repose de manière essentielle sur la théorie développée par J. Sjöstrand [Sj] de la transformation de FBI (Fourier-Bros-Iagonlitzer). Le point fort de cette théorie réside dans le fait qu'une telle transformation peut servir en même temps à deux choses ; d'abord comme test d'analyticité microlocale, ensuite comme opérateur quantifiant une transformation canonique complexe servant à réduire microlocalement un symbole à une forme plus simple (ici ξ_n). Notre preuve se fait alors en deux temps. On commence par montrer le théorème I.1 pour les points ρ_0 dits "sortants". Ce sont les points $\rho_0 = (y_0,\eta_0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ tels que $|y_0| > R_0$

et $y_0.\eta_0 \geq 0$. Dans ce cas la projection de la bicaractéristique va automatiquement à l'infini et la principale difficulté de la preuve réside dans le fait qu'il faut construire la transformation de FBI globalement le long de cette projection. Ceci nécessite une étude globale précise de cette courbe. On construit alors la phase, comme solution de l'équation eikonale, en utilisant un argument classique de géométrie symplectique, puis l'amplitude comme solution des équations de transport. Il faut noter que la construction globale de l'amplitude comme symbole analytique conduit à des difficultés supplémentaires. Une fois la transformation S construite, la fonction $w(x,t,\lambda) = Su(x,t,\lambda)$, où u est notre solution et λ le paramètre de la transformation, est (essentiellement) solution de l'équation du premier ordre $\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x_n} = 0$, avec $w_{|t=0} = Su_0$. Il en résulte que $w = Su_0((x', x_n - \lambda t), \lambda)$ et dés lors, l'hypothèse à l'infini faite sur u_0 se traduit en une décroissance exponentielle en λ de w ; cette estimation sur w permet, après une localisation, d'avoir l'estimation sur Su qui nous autorise à dire que ρ_0 n'est pas dans le front d'onde analytique de $u(t,.)$, uniformément en t dans un voisinage de $t_0 < 0$.

Dans une deuxième étape, en utilisant à nouveau la théorie de Sjöstrand, mais cette fois locale, on montre que cette information uniforme se propage le long de la bicaractéristique jusqu'au point initial ρ (non nécessairement sortant).

II Rappels sur la transformée de FBI et le front d'onde analytique.

Il y a plusieurs définitions du front d'onde analytique dues à Sato-Kawai-Kashiwara [SKK], Bros-Iagoniltzer [B-I], Hörmander [Ho] Sjöstrand [Sj]. D'après Bony [B] ces définitions coïncident. Nous rappelons dans ce paragraphe celle de Sjöstrand [Sj].

Soient $\rho_0 = (y_0, \eta_0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$, $x_0 \in \mathbb{C}^n$ et φ une fonction holomorphe dans un voisinage de (x_0, y_0) dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ qui vérifie

(II.1) $$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = -\eta_0$$

(II.2) $$Im \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x_0, y_0) \text{ est une matrice définie positive}$$

(II.3) $$\det \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right) \neq 0$$

On considère la fonction

$$\varphi_1(x,y) = -Im[\varphi(x,y)] \ , \ (x,y)\text{voisin de}(x_0,y_0) \ . \tag{II.4}$$

Il résulte des conditions ci-dessus que pour x voisin de x_0, l'application $y \mapsto \varphi_1(x,y)$, pour y réel voisin de y_0, atteint en un unique point réel $y = y(x) \in \mathbb{R}^n$ (tel que $y(x_0) = y_0$) un maximum. On pose

$$\Phi(x) = \varphi_1(x, y(x)) = \max_{\substack{y\in\mathbb{R}^n \\ y\in V_{y_0}}} [-Im\varphi(x,y)] \ . \tag{II.5}$$

Soit $a(x,y,\lambda) = \sum_{k\geq 0} \lambda^{-k} a_k(x,y)$ un symbole analytique d'ordre zéro, elliptique défini dans un voisinage de (x_0,y_0) dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ indépendant de λ. Ceci se traduit par le fait que $a_0(x_0,y_0) \neq 0$ et que a_k vérifie, au voisinage de (x_0,y_0) une estimation du type $|a_k(x,y)| \leq C^{k+1}k^k$. Enfin soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans un voisinage de y_0, $\chi = 1$ près de y_0.

Pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda \geq 1$ on définit la transformation de FBI de u

$$Tu(x,\lambda) = \langle \chi u \ , e^{i\lambda\varphi(x,.)} a(x,.,\lambda) \rangle \tag{II.6}$$

Alors Tu est une fonction holomorphe de x au voisinage de x_0 et on a équivalence entre

$$\left\{ \begin{array}{ll} i) & \rho_0 \notin WF_a(u) \\ ii) & \exists C > 0, \exists \delta > 0, \exists W_{x_0}, \exists \lambda_0 \geq 1 \text{ tels que pour } x \in W_{x_0} \\ & \text{et } \lambda \geq \lambda_0, |Tu(x,\lambda)| \leq Ce^{\lambda\Phi(x) - \delta\lambda} \end{array} \right. \tag{II.7}$$

Si on prend cette équivalence comme définition du front d'onde analytique, un résultat fondamental de la théorie de Sjöstrand est que cette définition est indépendante de (φ, a, χ) vérifiant les conditions ci-dessus.

Supposons que $u(t.\cdot)$ soit une famille de distributions dépendant d'un paramètre réel t.

Définition 2 *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. On dit qu'un point $\rho_0 \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ n'appartient pas à $\widetilde{WF}_a(u(t_0,.))$ si il existe une transformation de FBI T, des constantes positives C, μ, λ_0, η et un voisinage U_{x_0} de x_0 dans $\mathbb{C}^n$ tels que*

$$|Tu(t,x,\lambda)| \leq Ce^{\lambda\Phi(\chi) - \mu\lambda} \ , \ \forall x \in U_{x_0} \ , \ \forall t \in (t_0 - \eta, t_0 + \eta).$$

On a bien sûr $WF_a(u(t_0,.)) \subset \widetilde{WF}_a(u(t_0,.))$.

Rappelons maintenant comment, dans le cas local, cette transformation permet de réduire microlocalement un symbole p à une forme simple. A la phase φ on associe la transformation canonique complexe

$$\mathcal{H} : (x, \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)) \mapsto (y, -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y))$$

d'un voisinage de (x_0, ξ_0) dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ sur un voisinage de $(y_0, \eta_0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ (ici $\xi_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)$).

Si $P(y, D_y)$ est un opérateur de symbole principal p, à coefficients analytiques et T la transformation (II.6) on a $TP \equiv \widetilde{P}T$ où $\widetilde{P}$ est un opérateur dans $\mathbb{C}^n$ de symbole principal $\tilde{p} = p \circ \mathcal{H}$.

Supposons maintenant que la phase φ soit solution de l'équation eikonale

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x, y) = p(y, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)) \tag{II.8}$$

près de (x_0, y_0) alors $\widetilde{p}(x, \xi) = p \circ \mathcal{H}(x, \xi) = p(y, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = \xi_n$ (ici (x, ξ) donnés il existe y unique tel que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \xi$). Ceci montre que le symbole principal de $\widetilde{P}$ est ξ_n.

Le point clef de cette réduction est donc la résolution de (II.8). Pour ce qui nous concerne cette construction devra être globale au voisinage de $\gamma^-_{\rho_0}$.

III Étude des bicaractéristiques sortantes.

Soit $\rho_0 = (y_0, \eta_0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ un point "sortant" i.e. $|y_0| > R_0$ et $y_0\eta_0 \geq 0$. Nous allons étudier dans ce paragraphe la bicaractéristique future issue de ρ_0.

Théorème 3 *Il existe $\varepsilon^*, R^*, \rho > 0$ tels que pour tous $\varepsilon \in]0, \varepsilon^*]$, $R \geq R^*$, tout $(y_0, \eta_0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ tel que $|y_0| > 2R$, $y_0.\eta_0 \geq 0$ et tout $(y, \eta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ tel que $|y - y_0| + |\eta - \eta_0| < \varepsilon$ le problème*

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{Y}}(s) = \frac{\partial p}{\partial \eta}(\widetilde{Y}(s), \widetilde{\Theta}(s)) \ , \ \widetilde{Y}(0) = y \ , \\ \dot{\widetilde{\Theta}}(s) = -\frac{\partial p}{\partial y}(\widetilde{Y}(s), \widetilde{\Theta}(s)) \ , \ \widetilde{\Theta}(0) = \eta \ , \end{cases} \tag{III.1}$$

admet une solution unique $(\widetilde{Y}(s), \widetilde{\Theta}(s))$ holomorphe dans l'ensemble

$$\mathcal{O} = \{(s, y, \eta) \in \mathbb{C}^{3n} : |y - y_0| + |\eta - \eta_0| < \varepsilon \ , \ Re\ s > -\rho \ , \ |Im\ s| < \rho\}$$

de la forme

$$\begin{cases} \widetilde{Y}(s) = y + 2s\eta + \widetilde{Z}(s) \\ \widetilde{\Theta}(s) = \eta + \widetilde{\zeta}(s) \end{cases} \tag{III.2}$$

où

$$\begin{cases} |\tilde{\zeta}(s)| \leq \frac{C(K_0, |\eta_0|)}{R^{1+\sigma_0}} \ , \ |\widetilde{Z}(s)| \leq \frac{C'(K_0, |\eta_0|)}{R^{1+\sigma_0}} \max(1, |s|), \\ |\widetilde{Z}(s) - 2s\tilde{\zeta}(s)| \leq \frac{C''(K_0, |\eta_0|)}{R^{\sigma_0}}. \end{cases} \tag{III.3}$$

idée de la preuve :

On procède en deux étapes. Dans la première on montre le théorème III.1 pour s réel. $s \in [0, +\infty[$. Pour montrer que le système III.1 admet une solution globale $(Y(s), \Theta(s))$ vérifiant (II.2) et (II.3) on examine le système satisfait par $Z(s) = Y(s) - (y + 2s\eta)$, $\zeta(s) = \Theta(s) - \eta$; l'hypothèse (I.3) permet alors de lui appliquer un raisonnement par induction. Ensuite, pour chaque $s_0 \geq 0$ on résout le système d'équations (III.1) pour s complexe avec données $(Y(s_0), \Theta(s_0))$. Un résultat classique nous permet d'affirmer que le domaine d'existence dans $\mathbb{C}$ de la solution est indépendant de s_0. On obtient alors une solution de (III.1) en recollant ces solutions.

IV Construction et propriétés de la phase.

Soit ρ_0 un point sortant. Comme p est elliptique il existe j_0 tel que $\frac{\partial p}{\partial \eta_{j_0}}(\rho_0) \neq 0$. On reidexe les coordonnées pour que $j_0 = n$. Avec ce choix la variable x de $\mathbb{C}^n$ sera notée $x = (x', x_n)$. On introduit la fonction

$$\text{(IV.1)} \quad \varphi_0(x', y) = \frac{i}{2}(x' - y')^2 - \eta_{on} y_n + \frac{i}{2}(y_n - y_{on})^2 \ , x' \in \mathbb{C}^{n-1}, y \in \mathbb{C}^n.$$

On pose ensuite

$$\text{(IV.2)} \qquad x_0 = (x'_0, 0) \text{ où } x'_0 = y'_0 - i\eta'_0 \ .$$

On introduit enfin la

Notation IV.1 :

On note $(\widetilde{Y}(x_n; x', y)\ ,\ \widetilde{\Theta}(x_n; x', y))$ la valeur en $s = x_n \in \mathbb{C}$ de la solution du problème (III.1) avec les données (y, η) où $\eta = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}(x', y)$.

Remarquons que puisque $\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}(x'_0, y_0) = -\eta_0$, l'ensemble $\{\widetilde{Y}(Re x_n; x'_0, y_0), \widetilde{\Theta}(Re x_n; x'_0, y_0)\ ,\ Re x_n \geq 0\}$ est la bicaracteristique future de p issue de ρ_0.

Le résultat principal de ce paragraphe est le

Théorème 4 *Il existe $\varepsilon_1 > 0$ et une fonction holomorphe dans l'ensemble*

$$E = \{(x, z) \in \mathbb{C}^{2n} : |x' - x'_0| < \varepsilon_1\ ,\ Re\, x_n \geq 0\ , |Im\, x_n| < \varepsilon_1\ ,\ |z - \widetilde{Y}(x_n; x'_0, y_0)| < \varepsilon_1(1 + |x_n|)\}$$

telle que

$$\text{(IV.3)} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x, z) = p(z, -\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, z)) \ \ dans\ E\ .$$

(IV.4) $$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_0, y_0) = -\eta_0 \ ,$$

(IV.5) $$Im \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}(x_0, y_0) \ \textit{est une matrice symétrique définie positive}$$

(IV.6) $$\det\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}(x_0, y_0)\right) \neq 0$$

idée de la preuve :

On introduit les ensembles

$$\Omega = \{(x', y) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^n : |x' - x'_0| < \frac{1}{2}\varepsilon^*, |y - y_0| < \frac{1}{2}\varepsilon^*\}$$

où ε^* a été défini au théorème III.1,

$$\Lambda_0 = \{\left(x', 0, y \ ; \ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x'}(x', y), p\left(y, -\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}(x', y)\right), \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}(x', y)\right), (x', y) \in \Omega\}$$

ainsi que le symbole

(IV.7) $$q(x, y, \xi, \eta) = \xi_n - p(y, \eta) \ .$$

Le but est d'étudier la sous variété Lagrangienne de $\mathbb{C}^{4n}$

(IV.8) $$\Lambda = e^{sHq}\Lambda \ , \ Re \ s \geq 0 \ , |Im \ s| < \rho \ ,$$

où H_q est le Hamiltonien du symbole q introduit en (IV.7). Λ est obtenue en résolvant les équations

$$\begin{array}{ll}
\dot{X}'(s) = \frac{\partial q}{\partial \xi'}(\cdots) = 0 \ , & X'(0) = x' \ , \\
\dot{X}'_n(s) = \frac{\partial q}{\partial \xi_n}(\cdots) = 1 \ , & X_n(0) = 0 \ , \\
\dot{\Xi}(s) = \frac{\partial q}{\partial x}(\cdots) = 0 & \Xi(s) = \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x'}(x', y), p(y, -\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}(x', y))\right) \ , \\
\dot{F}(s) = -\frac{\partial p}{\partial \eta}(F(s), G(s)) & F(0) = y \ , \\
\dot{G}(s) = \frac{\partial p}{\partial y}(F(s), G(s)) & G(0) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}(x', y) \ .
\end{array}$$

Il est facile de voir que $X'(s) = x'$, $X_n(s) = s$, $\Xi(s) = \Xi(0), F(s) = \widetilde{Y}(s; x', y), G(s) = -\widetilde{\Theta}(s; x', y)$ où $(\widetilde{Y}, \widetilde{\Theta})$ ont été introduits dans la notation IV.1. Il résulte du théorème III.1 que le problème ci-dessus admet une solution unique, holomorphe dans l'ensemble $\{Re\ s > -\rho\ , |Im\ s| < \rho\ , |y - y_0| < \frac{1}{2}\varepsilon^*, |x' - x'_0| < \frac{1}{2}\varepsilon^*\}$. On prend alors $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tels que $0 < \varepsilon_1 << \varepsilon_2 \leq \frac{1}{2}\varepsilon^*, \varepsilon_1 \leq \rho$ et on pose $s = x_n$. On introduit les ensembles

$$\begin{cases} \mathcal{O} & = \{(x,y) \in \mathbb{C}^{2n}, |x' - x'_0| < \varepsilon_1, |y - y_0| < \varepsilon_2, Re\ x_n \geq 0\ , |Im x_n| < \varepsilon_1\} \\ \Lambda & = \{(x, \widetilde{Y}(x_n; x', y); \Xi(0), -\widetilde{\Theta}(x_n; x', y)), (x,y) \in \mathcal{O}\} \\ E & = \{(x,z) \in \mathbb{C}^{2n} : |x' - x'_0| < \varepsilon_1\ ,\ Re\ x_n \geq 0, |Im x_n| < \varepsilon_1\ , \\ & \quad |z - \widetilde{Y}(x_n; x'_0, y_0)| < \varepsilon_1(1 + |x_n|)\} \end{cases}$$

Lemme 5 *Soit $\pi : \Lambda \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ la projection de Λ sur la base i.e. $\pi(\Lambda) = (x, \widetilde{Y}(x_n; x', y))$. Alors $\pi : \Lambda \to E$ est bijective*

Preuve :

Il suffit de prouver que pour $(x,z) \in E$ il existe $y \in \mathbb{C}^n$ unique, avec $|y - y_0| < \varepsilon_2$, tel que $\widetilde{Y}(x_n; x', y) = z$. Compte tenu de la forme de $\widetilde{Y}$ donnée par (III.2) et comme $\eta = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}(x', y)$ on voit que cette équation est équivalente à l'équation $H(y) = y$ où

$$H(y) = \frac{1}{1 - 2ix_n}\left\{z - \widetilde{Y}(x_n; x'_0, y_0) - 2ix_n \begin{pmatrix} x' - x'_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \widetilde{Z}^0(x_n) - \widetilde{Z}(x_n)\right\} + y_0$$

avec $\widetilde{Z}^0(x_n) = \widetilde{Z}(x_n; x'_0, y_0)\ ,\ \widetilde{Z}(x_n) = \widetilde{Z}(x_n; x', y)$.

On montre alors que si ε_1 est assez petit H est une application contractante de la boule de centre y_0 et de rayon ε_2 dans elle même.

Lemme 6 *L'application $d\pi : T\Lambda \to \mathbb{C}^{2n}$ est surjective*

Preuve : Cela résulte du fait que $|\det \frac{\partial Y}{\partial y}(x_n; x', y)| \geq C(1 + |x_n|)$, $(x,y) \in \mathcal{O}$.

Corollaire 7 *Il existe une fonction φ holomorphe dans E telle que*

$$\Lambda = \{\left(x, z, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,z)\ , \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,z)\right)\ ,\ (x,z) \in E\}$$

Preuve :

Λ est une sous variété Lagrangienne de $\mathbb{C}^{4n}$, sa projection $\pi : \Lambda \to \mathbb{C}^{2n}$ sur la base est propre, a une image simplement connexe et $d\pi$ est surjective.

Preuve du théorème IV.2

Λ est une réunion de bicaractéristiques de $q = \xi_n - p(y, \eta)$, sur lesquelles q est constant. Comme à l'instant initial $\Lambda = \Lambda_0$ et $q = 0$ sur Λ_0 (d'après les conditions initiales) on a $q = 0$ sur Λ. Donc IV.3 résulte du Corollaire IV.5. Les conditions (IV.4), (IV.5) et (IV.6) résultent des propriétés de φ_0 ainsi que de (IV.3).

Propriétés de la phase φ

Tout d'abord l'équation $\widetilde{Y}(x_n; x', y) = z$ est équivalente à $y = \kappa(x, z)$ où κ vérifie

$$\kappa(x,z) = \frac{1}{1-2ix_n}\left\{ z - 2ix_n \begin{pmatrix} x' \\ y_{on} - i\eta_{on} \end{pmatrix} - \widetilde{Z}(x_n; x', \kappa(x,z)) \right\}$$

On en déduit que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,z) = \frac{i}{1-2ix_n}\left\{ z + (i\tilde{\zeta} + 2x_n\tilde{\zeta} - \tilde{Z}) \circ \kappa - \begin{pmatrix} x' \\ y_{on} - i\eta_{on} \end{pmatrix} \right\}$$

La première propriété que l'on déduit est résumée dans le

Lemme 8 *Il existe $C > 0$ telle que*

$$Im \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}(x,z) \geq \frac{C}{(1+|x_n|)^2} Id \ , \ \forall (x,z) \in E \ .$$

D'autre part la fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $z \mapsto -Im\varphi(x,z)$ admet pour $|x' - x'_0| < \varepsilon$, $|Im\ x_n| < \varepsilon$, $Re\ x_n \geq 0$, un maximum en un unique point $z = z(x) \in \mathbb{R}^n$. Ce point est caractérisé par $Im \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, z(x)) = 0$ et il vérifie $z(x'_0, Rex_n) = Y(Rex_n; x'_0, y_0) = y(Rex_n)$ où $y(s)$ est l'équation de la projection de la bicaractéristique $\gamma^+_{\rho_0}$. On pose

$$\Phi(x) = -Im[\varphi(x, z(x))] \tag{IV.9}$$

On a alors

Lemme 9

$$\frac{\partial}{\partial Rex_n}\Phi(x) = 0$$

V Construction de l'amplitude.

La transformation du type FBI que nous cherchons est de la forme

$$Sv(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(x,z)} f(x,z,\lambda) \chi\left(\frac{z - y(Re\ x_n)}{1+|x_n|}\right) v(z) dz \ , \tag{V.1}$$

où φ est la phase construite au §IV, χ une troncature près de la bicaractéristique et f une amplitude qui sera un symbole analytique d'ordre zéro i.e. $f = \sum_{k\geq 0} \lambda^{-k} f_k(x,z,\lambda)$ où $|f_k| \leq C^{k+1} k^k$.

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 10 *Soit $v \in L^2(\Gamma_{\varepsilon_0})$. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi(t) = 1$ si $|t| \leq \frac{1}{2}\varepsilon_0$, $\chi(t) = 0$ si $|t| \geq \varepsilon_0$. Il existe alors un symbole analytique f d'ordre zéro elliptique dans E tel que si l'on pose $I(x) = \frac{1}{\lambda} D_{x_n} Sv(x) - \frac{1}{\lambda^2} SPv(x)$ où S est défini en (V.1) alors il existe $\varepsilon^* > 0, C > 0, \mu > 0$, $N \in \mathbb{N}$ tels que si $|x' - x_0'| < \varepsilon^*, |Im\ x_n| < \varepsilon^*$, $Re\ x_n \geq 0$ on a pour tout $\lambda \geq 1$*

$$|I(x)| \leq Ce^{\lambda\Phi(x) - \mu\lambda}(1 + |x_n|)^N \|v\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon 0})} \ .$$

La preuve de ce théorème est techniquement délicate et on renvoie à [RZ] pour les détails. Disons simplement que, comme dans le cas classique, l'existence de f résulte de la résolution d'équations de transport du type $Xf_k = -Qf_{k-1}$ où X est un champ de vecteurs et Q un opérateur du second ordre. Si la résolution formelle globale ne pose aucun problème, en revanche le fait que l'on obtienne ainsi un symbole analytique n'est pas immédiate. Dans le cas local, Sjöstrand utilise de manière astucieuse une méthode d'ouverts emboités. L'application directe de cette méthode à notre cas global (en Rex_n) conduit à des estimations grossières du symbole analytique f inadéquates à la poursuite de la preuve. Cependant un fait important ici est que les coefficients de l'opérateur Q décroissent en $(1 + |x_n|)^{-(1+\sigma_0)}$; ce fait est exploité ici en couplant la méthode des ouverts emboités avec un découpage "dyadique" en Rex_n.

VI Preuve du théorème I.1 dans le cas des points sortants.

Soit $u \in C^0(]-\infty, 0], L^2)$ une solution de $\frac{\partial u}{\partial t} + iP(z, D_z)u = 0$ pour $t < 0$ avec $u_{|t=0} = u_0$. On applique la transformation S aux deux membres de l'équation. Alors Su est solution du problème

$$\text{(VI.1)} \qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} Su + \lambda \frac{\partial}{\partial x_n} Su\right)(t, x) = i\lambda^2 I(t, x) \ , t < 0 \\ Su(x, 0) = Su_0(x) \end{cases}$$

où I a été définie au théorème V.1.

On en déduit

(VI.2)

$$Su(t, x, \lambda) = Su_0((x', x_n - \lambda t), \lambda) + i\lambda^2 \int_0^t I(\sigma, (x', x_n + \lambda(\sigma - t)))d\sigma$$

Proposition 11 *Supposons que* $e^{\delta_0|z|}u_0 \in L^2(\Gamma_{\varepsilon_0})$ *pour certains* $\delta_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$. *Il existe* $\varepsilon^* > 0$, $\lambda_0 > 0$, $C > 0$ *tels que pour tout* $t_0 < 0$ *il existe* $\eta > 0$, $\mu > 0$ *tels que si* $|x' - x'_0| + |x_n| < \varepsilon^*$ *et* $|t - t_0| < \eta$ *on a*

$$|Su(t,x,\lambda)| \leq Ce^{\lambda\Phi(x)-\mu\lambda}\|e^{\delta_0|z|}u_0\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon_0})}.$$

Preuve :

On utilise la formule (VI.2). L'estimation du terme intégral résulte du théorème V.1. Pour estimer le terme provenant de u_0 on écrit dans Su_0 , $u_0(z) = e^{-\delta_0|z|}e^{\delta_0|z|}u_0$ puis on remarque que sur le support de χ on a $|z| \geq C|\eta_0||t_0|\lambda$. D'autre part, d'après le Lemme IV.7, $\Phi(x', x_n - \lambda t) = \Phi(x)$ car $\lambda t \in \mathbb{R}$.

La transformation S introduite en (V.1) n'est pas tout à fait une FBI à cause du terme $\chi\left(\frac{z-y(Rex_n)}{1+|x_n|}\right)$. Cependant elle n'en diffère ici que d'un terme exponentiellement décroissant. En effet posons

$$Tu(t,x,\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\varphi(x,z)}f(x,z,\lambda)\chi(z-y_0)u(t,z)dz\ . \tag{VI.3}$$

Proposition 12 *Il existe des constantes positives* ε^*, C *telles que pour tout* $t_0 < 0$ *il existe* $\eta, \mu > 0$ *tels que pour* $|x' - x'_0| + |x_n| < \varepsilon^*$ *et* $|t - t_0| < \eta$ *on a*

$$|Tu(t,x,\lambda) - Su(t,x,\lambda)| \leq Ce^{\lambda\Phi(x)-\mu\lambda} \sup_{|t-t_0|<\eta} \|u(t,.)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon_0})}\ .$$

On déduit des Propositions VI.1, VI.2, du théorème IV.2 et de la Définition II.1 que $\rho_0 \notin \widetilde{WF}_a(u(t_0,.))$ pour $t_0 < 0$.

VII Propagation du font d'onde analytique uniforme.

On s'intéresse ici à la propagation de $\widetilde{WF}_a$ décrit dans la définition II.1. Soit $u \in C^0(\mathbb{R}, L^2)$ une solution de $\frac{\partial}{\partial t}u + iPu = 0$.

Théorème 13 *Soit* $\rho^* \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ *et* γ_{ρ^*} *la bicaractéristique de* p *issue de* p^*. *Soit* $t_0 \in \mathbb{R}$. *Si* $\rho^* \notin \widetilde{WF}_a(u(t_0,.))$ *alors* $\widetilde{WF}_a(u(t_0,.)) \cap \gamma_{\rho^*} = \emptyset$.

Idée de la preuve :

On introduit l'ensemble $F = \{s \in \mathbb{R} : e^{sH_p}\rho^* \notin \widetilde{WF}_a(u(t_0,.))\}$. Evidemment F est un ouvert non vide. Pour montrer que F est fermé on utilise la même idée qu'au début de la preuve qui consiste à transformer l'opérateur $\lambda^{-2}P$ en $\lambda^{-1}D_{x_n}$ par une FBI T. Cependant, ici, la construction est seulement locale. Comme $Tu(t,x,\lambda)$ est (modulo des termes exponentiellement décroissants) solution de $(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\frac{\partial}{\partial x_n})Tu = 0$ on a pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$, tout $x \in \mathbb{C}^n$,

$$Tu(t,x) = Tu(t', (x', x_n + \lambda(t-t'))) \ ;$$

ceci permet de montrer que si $\rho \in \overline{F}$ alors $\rho \in F$ et donc F est fermé.

VIII Fin de la preuve du théorème I.1.

Compte tenu du théorème VII.1 et du fait que le théorème I.1 a été prouvé dans le cas des points sortants, il suffit de montrer que sur la bicaractéristique future issue de ρ_0 il y a forcément un point sortant. En effet on sait par hypothèse que $|y(s)| \to +\infty$ lorsque $s \to +\infty$. On prend s_1 assez grand pour que $|y(s)| > 2R$, $s \in [s_1 + \infty[$ et on calcule $\frac{d}{ds}(y(s).\eta(s))$. On utilise les équations (I.4), l'hypothèse (I.3). Il en résulte que si R est assez grand et $s \geq s_2$ on a

$$y(s).\eta(s) \geq y(s_2).\eta(s_2) + \nu|\eta_0|^2(s - s_2)$$

ce qui prouve que $y(s).\eta(s) \to +\infty$.

Références

[B] J.-M. Bony : *Equivalence des diverses notions de spectre singulier analytique*, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-77, exposé n° 3, École Polytechnique.

[Bi] J. Bros, D. Iagolnitzer : *Support essentiel et structure analytique des distributions*, Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1975, exposé n°18, École Polytechnique.

[C] W. Craig : *Les moments microlocaux et la régularité des solutions de l'équation de Schrödinger*, Séminaire EDP 1995-96, exposé n°XX, École Polytechnique.

[CKS] W. Craig, T. Kappeler, W. Strauss : *Microlocal dispersive smoothing for the Schrödinger equation*, Comm. on Pure Appl. Math., **48** (1995), 769-860.

[D1] S.I. Doi : *Smoothing effect of Schrödinger evolution groups on Riemanian manifolds*, Duke Math. J., **82** (1996), 679-706.

[D2] S.I. Doi : *Smoothing effect for Schrödinger evolution equation via commutator algebra*, Séminaire EDP 1996-97 exposé n°20 École Polytechnique.

[Ho] L. Hörmander : *Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients* Comm. on Pure Appl. Math., **24** (1971), 671-704.

[KS] L. Kapitanski, Y. Safarov : *Dispersive smoothing for Schrödinger equations*, Math. Research Letters, **3** (1996), 77-91.

[RZ] L. Robbiano, C. Zuily : *Microlocal analytic smoothing effect for the Schrödinger equation.* Prépublication d'Orsay 1998.

[SKK] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara : *Microfunctions and pseudo-differential equations*, Lecture Notes in Math., **287** (1973), 263-529.

[Sh] N.A. Shananin : *On singularities of solutions of the Schrödinger equation for a free particule*, Mathematical Notes, **55** (1994), 626-631.

[Sj] J. Sjöstrand : *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque, **95** (1982).

[W] J. Wunsh : *Propagation of singularities and growth for Schrödinger operators*, Preprint, October 1997.